УДК 519.876.5;519.6

Ю. И. Першина, канд. физ.-мат. наук

Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗРЫВНЫМ АППРОКСИМАЦИОННЫМ ЛИНЕЙНЫМ СПЛАЙНОМ

В статье построен разрывный аппроксимационный линейный сплайн, коэффициенты которого находятся методом наименьших квадратов, для приближения функции одной переменной с возможными разрывами первого рода в заданных узлах. Причем построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны первой степени.

Ключевые слова: *разрывная функция, разрывный сплайн, аппроксимация.*

Введение. На сегодня основное внимание в теории приближения функций многих переменных сплайнами уделяется приближению непрерывных и дифференцируемых функций непрерывными и дифференцируемыми сплайнами [5—7]. В то же время практика показывает, что среди многомерных объектов, которые нужно исследовать, значительно большее их количество описывается разрывными функциями [1—4]. Например, в компьютерной томографии при исследовании внутренней структуры тела полезно учитывать его неоднородность, то есть разную плотность в разных частях тела (кости, сердце, желудок, печень и т.д. имеют разную плотность, то есть плотность всего тела является функцией с разрывами первого рода на системе линий); при исследовании коры Земли с помощью данных с кернов буровых скважин возникает задача восстановления внутренней структуры кори между скважинами. При этом очевидным является тот факт, что плотность грунта в разных точках коры является неоднородной и чаще всего имеет разрывы первого рода в точках поверхностей, которые отделяют одну составляющую коры от другой (чернозем, песок, глина, гранит и т.д.).

В работе [5] рассматривается задача равномерного приближения непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций разрывными сплайнами одной переменной. Известны также работы по приближению непрерывных функций одной переменной кусочно-постоянными функциями [6—7], в которых непрерывные и дифференцируемые функции приближаются сплайнами степени ноль.

Авторы считают, что приближать разрывные функции нужно с помощью также разрывных функций. Поэтому авторами были разработаны интерполяционные методы приближения разрывных функций, имеющих разрывы первого рода, разрывными сплайнами [8]. В данной работе предлагается разработать и исследовать аппроксимационный метод приближения разрывных функций разрывными сплайнами и использовать при этом метод наименьших квадратов.

Постановка задачи. Пусть задана функция одной переменной $f(x)$ на интервале $[a,b]$ с возможными разрывами первого рода в точках x_k, $k=\overline{1,n}$. Считаем, что хотя бы в одном узле x_k функция имеет разрыв первого рода. Заданные узлы разбивают интервал $[a,b]$ на $n-1$ частей. Целью работы является построение и исследование разрывного линейного аппроксимационного сплайна для приближения функций одной переменной, имеющей возможные разрывы первого рода в узлах разбиения, методом наименьших квадратов.

Построение разрывного линейного аппроксимационного сплайна. Определение. Будем называть разрывным аппроксимационным линейным сплайном на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ следующую функцию

$$S(x)=Sp_k(x,A)=C_k^+\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+C_{k+1}^-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1}, \tag{1}$$

где коэффициенты C_k^+, C_k^- сплайна находятся методом наименьших квадратов из условия

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f(t)-S(t)\right)^2 dt\to\min_C. \tag{2}$$

Теорема. Оценка погрешности приближения разрывной функции $f(x)$ разрывным аппроксимационным сплайном $S(x)$ вида (1), построенного с помощью метода наименьших квадратов, на каждом интервале разбиения $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ имеет вид:

- если $f(x)\in C^1\left[x_k, x_{k+1}\right]$, то

$$\begin{gathered}\|S(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}\le\\ \le\max\left\{\left|f\left(x_k\right)\right|,\left|f\left(x_{k+1}\right)\right|\right\}+\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\cdot\|f'(x)\|_{L_\infty\left[x_k,x_{k+1}\right]};\end{gathered} \tag{3}$$

- если $f(x)\in C^2\left[x_k, x_{k+1}\right]$, то

$$\begin{gathered}\|S(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}\le\\ \le\max\left\{\left|f(x_k)\right|,\left|f(x_{k+1})\right|\right\}+\frac{\left(x_{k+1}-x_k\right)^2}{8}\cdot\|f''(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]},\end{gathered} \tag{4}$$

$$L_\infty[a,b] = \lim_{p\to\infty} L_p[a,b].$$

Доказательство. Решим минимизационную задачу:

$$J_k(C) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} - C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 dx \to \min_C,$$

$$k = \overline{1, n-1}$$

Выпишем систему линейных алгебраических уравнений $\dfrac{\partial J_k(C)}{\partial C_k^+} = 0$, $\dfrac{\partial J_k(C)}{\partial C_{k+1}^-} = 0$, относительно неизвестных C_k^+, C_{k+1}^-:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} 2\cdot\left(f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} - C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)\cdot\left(-\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right) dx = 0, \\ \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} 2\cdot\left(f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} - C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)\cdot\left(-\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) dx = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle C_k^+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\left(x - x_{k+1}\right)^2}{\left(x_k - x_{k+1}\right)^2} dx + C_{k+1}^- \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\left(x - x_k\right)\left(x - x_{k+1}\right)}{\left(x_{k+1} - x_k\right)\left(x_k - x_{k+1}\right)} dx = \\ \displaystyle\qquad = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(x)\left(x - x_{k+1}\right)}{x_k - x_{k+1}} dx, \\ \displaystyle C_k^+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\left(x - x_{k+1}\right)\left(x - x_k\right)}{\left(x_k - x_{k+1}\right)\left(x_{k+1} - x_k\right)} dx + C_{k+1}^- \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\left(x - x_k\right)^2}{\left(x_{k+1} - x_k\right)^2} dx = \\ \displaystyle\qquad = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(x)\left(x - x_k\right)}{x_{k+1} - x_k} dx. \end{cases}$$

В полученной системе сделаем замену $C_{k+1}^- = f\left(x_{k+1} - 0\right) + \varepsilon_{k+1}$, $C_k^+ = f(x_k + 0) + \varepsilon_k$, и заменим $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа с остаточным членом $R(x)$. В результате получим следующие выражения для интегральных членов системы

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cdot\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} dx = \frac{1}{3}\left(x_{k+1} - x_k\right) f\left(x_k + 0\right) +$$

$$+\frac{1}{6}\left(x_{k+1} - x_k\right) f\left(x_{k+1} - 0\right) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x)\cdot\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} dx;$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx = \frac{1}{\left(x_k-x_{k+1}\right)^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(x-x_{k+1}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\left(x_k-x_{k+1}\right)^2}\frac{\left(x-x_{k+1}\right)^3}{3}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{3}\left(x_{k+1}-x_k\right);$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx =$$

$$= -\frac{1}{\left(x_{k+1}-x_k\right)^2}\left(\frac{x^3}{3}-\left(x_{k+1}+x_k\right)\frac{x^2}{2}+x_k x_{k+1}x\right)\Bigg|_{x_k}^{x_{k+1}} =$$

$$= -\frac{1}{\left(x_{k+1}-x_k\right)}\left(\frac{x_{k+1}^2+x_k x_{k+1}+x_k^2}{3}-\left(x_{k+1}+x_k\right)\frac{x_{k+1}+x_k}{2}+x_k x_{k+1}\right) =$$

$$= -\left(\frac{2x_{k+1}^2+2x_k x_{k+1}+2x_k^2-3x_{k+1}^2-6x_k x_{k+1}-3x_k^2+6x_k x_{k+1}}{6\left(x_{k+1}-x_k\right)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x_{k+1}-x_k}\left(\frac{2x_k x_{k+1}-x_k^2-x_{k+1}^2}{6}\right) = \frac{\left(x_{k+1}-x_k\right)^2}{6\left(x_{k+1}-x_k\right)} = \frac{1}{6}\left(x_{k+1}-x_k\right);$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx = \frac{1}{\left(x_{k+1}-x_k\right)^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(x-x_k\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\left(x_{k+1}-x_k\right)^2}\frac{\left(x-x_k\right)^3}{3}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{3}\left(x_{k+1}-x_k\right);$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cdot\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx = \frac{1}{3}\left(x_{k+1}-x_k\right)f\left(x_k+0\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(x_{k+1}-x_k\right)f\left(x_{k+1}-0\right)+\int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x)\cdot\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx;$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cdot\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx = \frac{1}{6}\left(x_{k+1}-x_k\right)f\left(x_k+0\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\left(x_{k+1}-x_k\right)f\left(x_{k+1}-0\right)+\int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x)\cdot\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx.$$

Получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_k+\dfrac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_{k+1}=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}R(x)\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx, \\ \dfrac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_k+\dfrac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_{k+1}=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}R(x)\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx. \end{cases} \quad (5)$$

Для анализа правых частей полученной системы воспользуемся формулами с работы [7]:

$$\|f(x)-S(x)\|_\infty=\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\cdot\|f'(x)\|_\infty;$$

$$\|f(x)-S(x)\|_\infty=\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{8}\cdot\|f''(x)\|_\infty.$$

Используя обозначения $\|\varepsilon\|=\max\{\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1}\}$, перепишем систему (5) в виде:

1. Если $f(x)\in C^1[x_k,x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\|\le\dfrac{1}{6}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\|+\|f'(x)\|_\infty\left(\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2, \\ \dfrac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\|\le\dfrac{1}{3}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\|+\|f'(x)\|_\infty\left(\dfrac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon\|\le\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\cdot\|f'(x)\|_\infty.$$

2. Если $f(x)\in C^2[x_k,x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\|\le\dfrac{1}{6}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\|+\|f''(x)\|_\infty\dfrac{(x_{k+1}-x_k)^3}{16}, \\ \dfrac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\|\le\dfrac{1}{3}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\|+\|f''(x)\|_\infty\dfrac{(x_{k+1}-x_k)^3}{8}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon\|\le\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{8}\cdot\|f''(x)\|_\infty.$$

Из этих неравенств и следует доказательство теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция $f(x)=a(const)$ приближается разрывным линейным сплайном вида (1) методом наименьших квадратов, то оценка (3) является точной, если же функция имеет вид $f(x)=ax+b$, то в оценке (4) также достигается равенство.

Следствие. Если приближаемая функция $f(x)$ является кусочно-линейной или кусочно-постоянной функцией с точками разрыва $x = x_k$, $k = \overline{1,n}$ и приближаем ее кусочно-линейным сплайном $S(x)$, определенным формулами (1) и неизвестные C_k^+, C_k^- находим из условия (2), то получим точно приближаемую функцию, то есть

$$S(x) = f(x).$$

Замечание 2. Если $C_k^+ = C_k^- = S(x_k)$, $k = \overline{1, n-1}$, то построенный разрывный аппроксимационный сплайн вида (1) является непрерывным линейным аппроксимационным сплайном.

Численный эксперимент.

Пусть задана функция $f(x)$ на интервале $[-1,1]$ с тремя точками разрыва первого рода (Рис.1)

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < -0.5 \\ x^2, & -0.5 \le x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \le x < 0.5 \\ 1 - x, & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}.$$

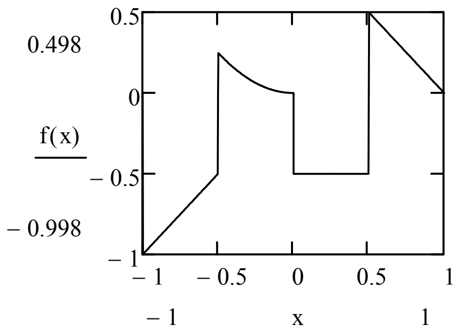

Рис. 1. *Аналитический и графический вид приближаемой функции*

Выберем узлы сплайна: $x_1 = -1$, $x_2 = -0.5$, $x_5 = 1$ $x_3 = 0$, $x_4 = 0.5$. Считаем заданными односторонние значения функции в узлах:

$$f(x_1 + 0) = -1, \qquad f(x_3 + 0) = -0.5,$$
$$f(x_2 - 0) = -0.5, \qquad f(x_4 - 0) = -0.5,$$
$$f(x_2 + 0) = 0.25, \qquad f(x_4 + 0) = 0.5,$$
$$f(x_3 - 0) = 0, \qquad f(x_5 - 0) = 0.$$

Построим аппроксимационный сплайн в виде формулы (1), где коэффициенты матрицы C находятся из условия (2), то есть сплайн имеет следующий вид (рис. 2)

$$Sp(x)=\begin{cases} x, & -1<x<-0.5,\\ -0.5x-0.04, & -0.5<x<0,\\ 0.5, & 0<x<0.5,\\ 1-x, & 0.5<x<1. \end{cases}$$

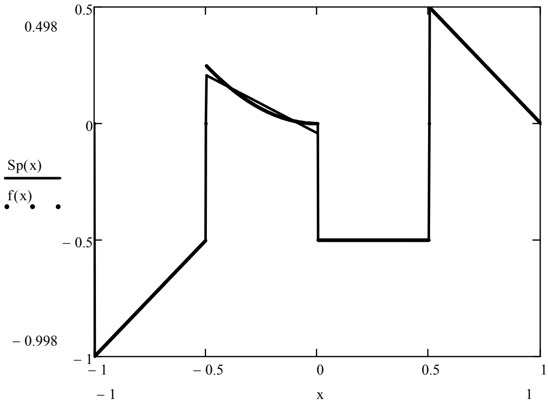

Рис. 2. *Графический вид функции* $f(x)$ *и приближаемого аппроксимационного сплайна сплайна* $Sp(x)$

Как видим, аппроксимационный сплайн точно приближает функцию на тех интервалах, где она постоянна или задана линейно. Численный эксперимент подтверждает изложенную выше теорию.

Выводы. Таким образом, в статье построен разрывный аппроксимационный сплайн, коэффициенты которого находятся методом наименьших квадратов, для приближения функции одной переменной с возможными разрывами первого рода в заданных узлах. Причем построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны первой степени.

Предложенный метод приближения можно использовать для восстановления внутренней структуры объектов, имеющей разную плотность, в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

Список використаних джерел:

1. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1984. — 352 с.
2. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга ; перевод с английского Ю. А. Кузнецова. — М. : Изд-во "Мир", 1974. — 124 с.
3. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1976. — 355 с.

4. Литвин О.М. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування / О. М. Литвин, В. Л. Рвачов. — К. : Наук. думка, 1973 — 122 с.
5. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами / Б. А. Попов. — К. : Наук. думка, 1989. — 272 с.
6. De Vore R. A. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering / R. A. De Vore. — 1983. — Vol. 41. — P. 29—45.
7. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. — Х. : Основа, 2002. — 544 с.
8. Литвин О. М. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 3. — С. 122—131.

In paper it is constructed explosive approximating linear spline which factors are a method of least squares, for approach of function of one variable with possible ruptures of the first sort in the set knots. And the constructed explosive splines include, as a special case, classical continuous splines of the first degree.

Key words: *explosive functions, explosive spline, approximation.*

Отримано: 26.04.2011

УДК 517.91:532.26

Т. М. Пилипюк, викладач

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ — ЛЕЖАНДРА — ФУР'Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя — Лежандра — Фур'є на полярній осі з двома точками спряження в припущенні, що спектральний параметр бере участь в умовах спряження.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, ядро Коші, функції впливу, спектральна функція, вагова функція, спектральна щільність, основна тотожність.*

Вступ. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рів-

