22. Мансимов К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов. — Баку : Изд-во БГУ, 2002. — 114 с.
23. Габасов Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Мн. : Изд-во БГУ. — 400 с.
24. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. — М. : Наука, 1973. — 256 с.
25. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л. Т. Ащепков. — Новосибирск, 1987 — 272 с.
26. Габасов Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, 1973. — 256 с.

In this work there is considered an optimal control problem for Volterra discrete systems. Necessary conditions of optimality are derived.

Key words: *necessary optimality condition, system of Volterra difference equations, discrete maximum principle, singular control, increment formula.*

Отримано: 02.03.2012

УДК 517.9

С. М. Бак*, канд. фіз.-мат. наук,
К. Є. Рум'янцева,** канд. пед. наук

*Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця,
**Вінницький інститут економіки Тернопільського національного економічного університету, м. Вінниця

КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ З КУБІЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Отримано результат про існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші у випадку кубічного потенціалу.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, задача Коші, глобальний розв'язок, кубічний потенціал.*

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,\,m} = -U'_{n,\,m}(q_{n,\,m}) + a_{n-1,\,m}\left(q_{n-1,\,m} - q_{n,\,m}\right) - a_{n,\,m}\left(q_{n,\,m} - q_{n+1,\,m}\right) + \\ + b_{n,\,m-1}\left(q_{n,\,m-1} - q_{n,\,m}\right) - b_{n,\,m}\left(q_{n,\,m} - q_{n,\,m+1}\right),\ \left(n,\,m\right) \in \mathbb{Z}^2. \tag{1}$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,\,m \to \pm\infty} q_{n,\,m}(t) = 0, \tag{2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [8; 10; 11]. В статті [14] вивчались періодичні розв'язки для системи осциляторів на двовимірних ґратках, а в статтях [2; 3; 12] та [13] — біжучі хвилі. Питання коректності задачі Коші для ланцюгів нелінійних осциляторів (випадок одновимірної ґратки) вивчалося в [5] і [9], а для систем осциляторів на двовимірних ґратках — в [3] і [4]. Зауважимо, що в статтях [3] і [4] отримано умови існування та єдиності глобального розв'язку, які не задовольняє кубічний потенціал.

Метою статті є одержання умов існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці у випадку кубічної потенціальної функції.

Постановка задачі та основні припущення. Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді $U_{n,m}(r) = -\dfrac{d_{n,m}}{2} r^2 + V_{n,m}(r)$ і покладемо $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}\, q_{n-1,m} + a_{n,m}\, q_{n+1,m} + b_{n,m-1}\, q_{n,m-1} + b_{n,\,m}\, q_{n,m+1} + \\ + c_{n,m}\, q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}),\ \left(n, m\right) \in \mathbb{Z}^2. \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \tag{4}$$

де

$$\left(Aq\right)_{n,m} = a_{n-1,m}\, q_{n-1,m} + a_{n,m}\, q_{n+1,m} + b_{n,m-1}\, q_{n,m-1} + b_{n,m}\, q_{n,m+1} + c_{n,m}\, q_{n,m},$$

(такі оператори вивчалися в [6, с. 597]), а нелінійний оператор B визначається формулою

$$\left(B(q)\right)_{n,\,m} = V'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right), \tag{5}$$

в просторі $l_2 = l_2\left(\mathbb{Z}^2\right)$ дійсних послідовностей $q = \left\{q_{n,\,m}\right\}$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)},\, q^{(2)}\right) = \sum_{n,\, m\in\mathbb{Z}} q_{n,\,m}^{(1)}\, q_{n,\,m}^{(2)}.$$

Скалярний добуток і норму в l_2 позначатимемо $(\cdot\,,\,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ відповідно.

Відмітимо, що рівняння (3) у просторі l_2 можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H_q'\left(p,\, q\right), \\ \dot{q} = H_p'\left(p,\, q\right); \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H\left(p,\, q\right) = \frac{1}{2}\left(\|p\|^2 - \left(Aq,\, q\right)\right) + \sum_{n,\, m\in\mathbb{Z}} V_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right), \tag{6}$$

де $p = \dot{q}$.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значеннями в l_2.

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)},\ \ \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{7}$$

Розглянемо тепер випадок кубічного потенціалу:

$$V_{n,m}(r) = \frac{d_{n,m}}{3} r^3,$$

де $d_{n,m}$ — обмежена послідовність. Передбачається, що оператор A від'ємно визначений, тобто

$$\left(Aq,\, q\right) \le -\alpha_0 \|q\|^2,\ \ \alpha_0 > 0, \tag{8}$$

для $q \in l_2$.

Покладемо

$$J(q) = -\frac{1}{2}\left(Aq,\, q\right) + \frac{1}{3}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} d_{n,m} q_{n,m}^3 = \frac{1}{2}a(q) + \frac{1}{3}b(q).$$

Відмітимо, що $a^{1/2}(q)$ — норма на l_2, еквівалентна стандартній нормі $\|\cdot\|_{l_2}$. Тоді гамільтоніан (6) набуде вигляду

$$H(p,\, q) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + J(q).$$

Оскільки $\left|b(q)\right| \le c'\left\|q\right\|_{l_3}^3 \le c''\left\|q\right\|^3$, то існує така константа $c > 0$, що

$$\left|b(q)\right|^{1/3} \le ca(q)^{1/2}, \quad q \in l_2. \tag{9}$$

Далі c завжди позначає константу з (9).

Допоміжні леми. Покладемо

$$\gamma = \inf_q \left\{ \sup_{\lambda \ge 0} J\left(\lambda q\right) : q \in l_2,\ q \ne 0 \right\}. \tag{10}$$

Лема 1. Правильна нерівність

$$\gamma \ge \frac{1}{6c^6}.$$

Доведення. Маємо $J\left(\lambda q\right) = \dfrac{\lambda^2}{2}a(q) + \dfrac{\lambda^3}{3}b(q).$ Якщо $b(q) \ge 0$, то

$$\sup_{\lambda \ge 0} J\left(\lambda q\right) = +\infty.$$

Якщо $b(q) < 0$, то

$$\sup_{\lambda \ge 0} J\left(\lambda q\right) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)} q \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3(q)}{b^2(q)}.$$

Підносячи нерівність (9) до 6-го степеня, отримуємо необхідне.

Лему доведено.

Покладемо

$$W_\gamma = \left\{ q \in l_2 : 0 \le J\left(\lambda q\right) < \gamma,\ \forall\, \lambda \in \left[0, 1\right] \right\}. \tag{11}$$

Очевидно, що W_γ зірковий відносно початку координат, тобто якщо $q \in W_\gamma$, то $\theta q \in W_\gamma$ для будь-якого $\theta \in \left[0, 1\right]$.

Лема 2. Множина W_γ містить відкритий еліпсоїд $B = \left\{ q \in l_2 : a(q) < \rho \right\}$, для будь-якого $\rho > 0$, що задовольняє умовам:

$$\rho \le \frac{9}{4c^6},$$

$$\frac{\rho}{2} + \frac{c^3}{3}\rho^{3/2} < \gamma.$$

Доведення. Згідно (9)

$$\frac{\lambda^2}{2}a(q) - \frac{\lambda^3 c^3}{3}a^{3/2}(q) \le J\left(\lambda q\right) \le \frac{\lambda^2}{2}a(q) + \frac{\lambda^3 c^3}{3}a^{3/2}(q).$$

При $a(q) \le \dfrac{9}{4c^6}$ маємо

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda c^3}{3} a^{1/2}(q) \geq 0,$$

для всіх $\lambda \in [0, 1]$.

Отже, $J(\lambda q) \geq 0$ для будь-якого $\lambda \in [0, 1]$.

Якщо $a(q) \leq \rho$, то, згідно другої умови для ρ:

$$J(\lambda q) < \frac{\lambda^2}{2}\rho + \frac{\lambda^3 c^3}{3}\rho^{3/2} = \lambda^2\left[\frac{1}{2}\rho + \frac{\lambda c^3}{3}\rho^{3/2}\right] < \gamma,$$

для всіх $\lambda \in [0, 1]$.

Отже, $J(\lambda q) < \gamma$.

Лему доведено.

Покладемо

$$W_{*,\gamma} = \{q \in l_2 : a(q) + b(q) > 0,\ J(q) < \gamma\}.$$

Згідно неперервності функціоналів $a(q)$ і $b(q)$, $W_{*,\gamma}$ — відкрита множина.

Лема 3. $W_\gamma = W_{*,\gamma} \bigcup B$.

Доведення. Достатньо показати, що $W_\gamma = W_{*,\gamma} \bigcup \{0\}$.

Нехай $q \in W_\gamma$, $q \neq 0$. Якщо $b(q) \geq 0$, то $a(q) + b(q) > 0$ і $J(q) < \gamma$. Якщо ж $b(q) < 0$, то

$$\sup J(\lambda q) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)} q\right) \geq \gamma.$$

Тоді $-\frac{a(q)}{b(q)} > 1$ і $J(q) < \gamma$. Це показує, що $q \in W_{*,\gamma}$.

Навпаки, нехай $q \in W_{*,\gamma}$. Якщо $b(q) \geq 0$, то

$$\sup_{\lambda \in [0, 1]} J(\lambda q) = J(q) < \gamma$$

і $q \in W_\gamma$. Якщо ж $b(q) < 0$, то нерівність $-\frac{a(q)}{b(q)} > 1$ показує, що

$$\sup_{\lambda \in [0, 1]} J(\lambda q) = J(q),$$

що й дає необхідне. **Лему доведено.**

В силу відкритості $W_{*,\gamma}$ і B, лема 3 показує, що множина W_γ відкрита, тобто є околом нуля в l_2.

Лема 4. W_γ — обмежена множина.

Доведення. Якщо $b(q)\ge 0$, то $J(q)\ge \frac{1}{2}a(q)$ і $a(q)<2\gamma$. Якщо ж $b(q)<0$, то за лемою 3, $b(q)>-a(q)$. Значить, $J(q)>\frac{1}{6}a(q)$ і $a(q)<6\gamma$. Таким чином, W_γ міститься в обмеженій множині $\{q\in l_2 : a(q)<6\gamma\}$. **Лему доведено.**

Основний результат. Наступна теорема є основним результатом цієї статті.

Теорема 1. Нехай $V_{n,m}(r)=\frac{d_{n,m}}{3}r^3$, де $d_{n,m}$ — обмежена послідовність, оператор A від'ємно визначений і $q^{(0)}\in W_\gamma$, $q^{(1)}\in l_2$ такі, що $\frac{1}{2}\left\|q^{(1)}\right\|^2+J\left(q^{(0)}\right)<\gamma.$ Тоді задача Коші з початковими даними $q^{(0)}$, $q^{(1)}$ має єдиний глобальний розв'язок.

Доведення. Існування та єдиність локального розв'язку $q(t)$ випливає із теореми 1 статті [4]. Далі, як і в доведенні теореми 3, випадок (а) (див. [3]), достатньо показати, що $q(t)$ залишається обмеженим.

Покажемо, що $q(t)\in W_\gamma$. Припустимо, що це не так і нехай $t_1>0$ найменше значення $t>0$, для якого $q(t_1)\notin W_\gamma$. Тоді $q(t_1)$ належить межі ∂W_γ множини W_γ. Оскільки W_γ зірковий, то $\theta q(t_1)\in W_\gamma$ для будь-якого $\theta\in[0,1)$. Значить, $J\left(\theta q(t_1)\right)<\gamma$. Переходячи до границі при $\theta\to 1$, отримуємо, що $J\left(q(t_1)\right)\le\gamma$. Якщо $J\left(q(t_1)\right)<\gamma$, то, згідно означення W_γ і того, що $J\left(\theta q(t_1)\right)<\gamma$, отримуємо $q(t_1)\in W_\gamma$. Останнє протирічить зробленому припущенню. Таким чином, $J\left(q(t_1)\right)=\gamma.$

Оскільки гамільтоніан H зберігається (див. [3]), то

$$J\left(q(t_1)\right)\le\frac{1}{2}\left|\dot q(t_1)\right|^2+J\left(q(t_1)\right)=\frac{1}{2}\left|q^{(1)}\right|^2+J\left(q^{(0)}\right)<\gamma.$$

Отримане протиріччя показує, що $q(t)\in W_\gamma$ для всіх $t>0$, для яких q визначене. Отже, розв'язок існує при всіх $t>0.$

Оскільки рівняння (1) інваріантне відносно заміни t на $-t$, то розв'язок визначено при всіх $t\in\mathbb{R}.$ **Теорему доведено.**

Доведена теорема дає існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші у випадку, коли початкові дані достатньо малі в l_2-нормі.

Оскільки множина початкових даних із теореми 1 статті [4] відкрита і містить нульові дані, то отримуємо такий наслідок.

Наслідок. Нехай $V_{n,m}(r) = \dfrac{d_{n,m}}{3} r^3$, де $d_{n,m}$ — обмежена послідовність, оператор A від'ємно визначений. Тоді існує таке $\delta > 0$, що для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l_2$ з $\left\| q^{(0)} \right\| \le \delta$ і $\left\| q^{(1)} \right\| \le \delta$ задача Коші має єдиний глобальний розв'язок.

Висновок. У статті одержано умови існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці (теорема 1), які поширюють результати статей [3—5].

Список використаних джерел:

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154–175.
2. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2011. — Т. 35, № 1. — С. 60–65.
3. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 3–9.
4. Бак С. М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С. М. Бак, О. О. Баранова, Ю. П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 18–24.
5. Бак С. Н. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний журнал. — 2006. — Т. 58, № 6. — С. 723–729.
6. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 798 с.
7. Рид М. Методы современной математической физики : в 4-х т. / М. Рид, Б. Саймон. — М. : Мир, 1978. — Т. 2. — 395 с.
8. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. — 1997. — Vol. 103. — P. 201–250.
9. Bak S. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations / S. Bak, G. N'Guerekata, A. Pankov // Communications in Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 8, № 1. — P. 79–86.

10. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. — 1998. — Vol. 306. — P. 1–108.
11. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. — Berlin : Springer, 2004. — 427 p.
12. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — Vol. 20. — P. 319–341.
13. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, №1. — P. 105–114.
14. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998. — Vol. 377. — P. 118–122.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear oscillators on 2D-lattice. It is obtained result on existence and uniqueness of global solution to the Cauchy problem in the case of cubic potential.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, Cauchy problem, global solution, cubic potential.*

Отримано: 21.03.2012

УДК 519.24+51-7

В. І. Баранецький, молодший науковий співробітник

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка, м. Дрогобич

ДИСПЕРСІЯ ПРОГНОЗОВАНИХ ЗНАЧЕНЬ ЯК КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ ПОБУДОВИ КОМПОЗИЦІЙНИХ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ПЛАНІВ ДЛЯ ТРЬОХКОМПОНЕНТНИХ СПОЛУК

Описано використання дисперсії прогнозованого значення, як критерію оптимальності при виборі експериментальних планів. Наведено метод побудови композиційних матриць планування експериментів для трьохкомпонентних сполук. Отримано декілька композиційних матриць для експериментальних планів другого та третього порядків.

Ключові слова: *композиційні експериментальні плани, планування експерименту, дисперсія прогнозованого значення.*

Із бурхливим розвитком обчислювальної техніки побудова математичних моделей для дослідження задач у фізиці, хімії, біології, матеріалознавстві та інших областях науки є досить актуальною.

