УДК 517.929

Я. Й. Бігун, д-р фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

УСЕРЕДНЕННЯ БАГАТОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

У роботі досліджено існування розв'язку та обґрунтовано метод усереднення для системи диференціальних рівнянь із повільними і швидкими змінними та лінійно перетвореним аргументом. Для розв'язку системи нелінійних рівнянь задано багатоточкові крайові умови.

Ключові слова: *метод усереднення, малий параметр, крайова задача, лінійно перетворений аргумент, повільні і швидкі змінні.*

Вступ. Різноманітні прикладні задачі, зокрема задачі оптимального керування, приводять до розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Спростити їх розв'язування можна, побудувавши відповідну простішу усереднену задачу. У працях [1; 2] для двоточкових крайових задач з повільними і швидкими змінними без запізнення запропоновано схему усереднення уздовж розв'язку породжуючої задачі та дано її обґрунтування. Аналогічна задача для двоточкової задачі із запізненням аргументу розглянута в [3]. Для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом обґрунтування методу усереднення за швидкими змінними дано в працях [4; 5] та ін. У даній роботі досліджується багатоточкова крайова задача з довільною скінченною кількістю лінійно перетворених аргументів, які характеризують запізнення в системі рівнянь. Відзначимо, що система рівнянь, яка досліджується, залежить від «швидкого» t і «повільного» $\tau = \varepsilon t$ часу, ε — малий додатний параметр. Для початкової задачі без запізнення з повільним і швидким часом результати асимптотичного інтегрування наведено в монографії [6], для крайових задач у працях [1—3] та ін.

1. Постановка задачі та схема усереднення. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(t, \tau, x, \varphi) + \varepsilon Y(t, \tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, \varepsilon) \tag{2}$$

з крайовими умовами

$$(l_1 x)(\cdot,\varepsilon) := \sum_{\nu=0}^{r} A_\nu \left. x\right|_{t=t_\nu} = d_1, \tag{3}$$

$$(l_2 \varphi)(\cdot,\varepsilon) := \sum_{\nu=0}^{r} B_\nu \left. \varphi\right|_{t=t_\nu} = d_2,\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = T, \tag{4}$$

де $0 \le t \le T$, $x \in D_1 \subseteq \mathrm{R}^n$, $\varphi \in D_2 \subseteq \mathrm{R}^m$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0 << 1$, $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_l = {}$ $=1$, $x_{\theta_\nu}(t,\varepsilon) = x(\theta_\nu t, \varepsilon)$, $\varphi_{\theta_\nu}(t,\varepsilon) = \varphi(\theta_\nu t,\varepsilon)$, $x_\Theta = (x_{\theta_1},\ldots,x_{\theta_l})$ й аналогічне позначення для φ_Θ, A_i і B_i — задані матриці порядку n і m відповідно, d_1 і d_2 — задані n- і m-вектори. Змінні x_i називаються повільними, а φ_i — швидкими [7].

Розглянемо породжуючу крайову задачу для змінних

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \omega(t,\tau,x,\overline{\varphi}),\quad (l_2\overline{\varphi})(\cdot,\varepsilon) = d_2\,, \tag{5}$$

де τ і x вважаються параметрами. Нехай існує розв'язок $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t,\tau,x)$ задачі (5). Усереднимо вектор-функцію X по t уздовж розв'язку $\overline{\varphi}(t,\tau,x)$, де τ, x — параметри. Одержимо усереднену задачу для повільних змінних

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \varepsilon X_0(\tau,\overline{x}_\Theta)\,,\ (l_1\overline{x})(\cdot,\varepsilon) = d_1, \tag{6}$$

де

$$X_0(\tau,x_\Theta) = \frac{1}{T}\int_0^T X\left(t,\tau,x_\Theta,\overline{\varphi}_\Theta(t,\tau,x),0\right)dt,$$

$$\overline{\varphi}_\Theta(t,\tau,x) = \left(\overline{\varphi}(\theta_1 t,\tau,x),\ldots,\overline{\varphi}(\theta_l t,\tau,x)\right).$$

Зауважимо, що хоч система рівнянь (6) є системою із запізненням, але її розв'язування значно простіше, порівняно з (1)—(4), оскільки рівняння для вектора повільних змінних $\overline{x}$ не залежить від швидких змінних, а в задачі (5) τ і x — параметри.

2. Умови й основний результат. Введемо такі позначення:

$$G_1 = [0,T]\times[0,T]\times D_1^l \times D_2^l \times [0,\varepsilon_0]\,,\ G_2 = [0,T]\times[0,T]\times D_1 \times D_2\,,$$

$$G_3 = [0,T]\times[0,\varepsilon_0]\,,\ \overline{M} := \left(t,\tau,\overline{x}_\Theta(t,\varepsilon)\right),\ \overline{\overline{M}} := \left(t,\tau,\overline{x}_\Theta(t,\varepsilon),\overline{\varphi}_\Theta(t,\varepsilon)\right).$$

Розглянемо відповідну рівнянням (6) і (5) систему рівнянь у варіаціях:

$$\frac{d\eta}{dt} = \varepsilon\sum_{\nu=1}^{r} C_\nu(t,\varepsilon)\eta_{\theta_\nu}\,, \tag{7}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = D(t,\varepsilon)\xi, \tag{8}$$

де $C_i(t,\varepsilon) = \dfrac{\partial X_0}{\partial x_{\theta_i}}(\bar{M})$, $i = 1,...,l$; $D(t,\varepsilon) = \dfrac{\partial \omega}{\partial \varphi}(\bar{\bar{M}})$.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1. Існує розв'язок $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t,\tau,x)$ крайової задачі (5), де τ і x — параметри, і за цими параметрами функція $\bar{\varphi}$ неперервно диференційовна.

2. Існує розв'язок $x = \bar{x}(t,\varepsilon)$ усередненої задачі (6).

3. Нехай $U(t,s,\varepsilon)$ і $V(t,s,\varepsilon)$ — матриці Коші систем рівнянь (7) і (8) відповідно, $\Delta_1(\varepsilon) = (l_1 U)(\cdot,0,\varepsilon)$, $\Delta_2(\varepsilon) = (l_2 V)(\cdot,0,\varepsilon)$. Припустимо, що для всіх $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$

$$|\det \Delta_j(\varepsilon)| \geq \delta_i > 0, \quad j = 1,2.$$

4. Введемо функцію

$$w = \int_0^t \Big[X\big(s,\tau,x_\Theta,\bar{\varphi}_\Theta(s,\tau,x),0\big) - X_0(\tau,x_\Theta) \Big] ds,$$

де τ і x — параметри. Вважатимемо, що функція $w = w(\tau,x)$ і не залежить від x_Θ.

Зауважимо, що розв'язок системи рівнянь (7) можна записати у вигляді [8] $\eta(t,\varepsilon) = U(t,0,\varepsilon)\eta(0,\varepsilon)$.

Із виконання нерівності випливає, що системи рівнянь (7) і (8) з однорідними крайовими умовами мають тільки тривіальний розв'язок. Сформулюємо основну теорему.

Теорема. Нехай вектор-функції X, Y і ω визначені та неперервно диференційовні за всіма аргументами у відповідних областях визначення та виконуються умови 1—4.

Тоді для досить малого $\varepsilon^* \in [0,\varepsilon_0]$ крайова задача (1)—(4) має єдиний розв'язок $\left\{x^*(t,\varepsilon),\ \varphi^*(t,\varepsilon)\right\}$, який неперервний за ε і рівномірно по $t \in [0,T]$ виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\Big(\left\| x^*(t,\varepsilon) - \bar{x}(t,\varepsilon) \right\| + \left\| \varphi^*(t,\varepsilon) - \bar{\varphi}(t,\varepsilon t,\bar{x}(t,\varepsilon)) \right\| \Big) = 0. \tag{9}$$

Розглянемо допоміжну систему рівнянь

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon \sum_{i=1}^{r} F_i(t,\varepsilon)\, u_{\theta_i} + b(t,u_\Theta,v_\Theta,\varepsilon), \tag{10}$$

$$\frac{dv}{dt} = G(t,\varepsilon)u + H(t,\varepsilon)\, v + d(t,u_\Theta,v_\Theta,\varepsilon)$$

з крайовими умовами

$$(l_1 u)(\cdot,\varepsilon)=0\,,\ (l_2 v)(\cdot,\varepsilon)=0\,, \tag{11}$$

де u і v — n- і m-вектори, F_i, H і G — неперервні в G_3 матриці.

Нехай $p=colon(u_\Theta,v_\Theta)$, $f=colon(b,d)$. Застосувавши методику доведення аналогічного твердження в [1; 3] нескладно довести наступну лему.

Лема. Нехай:

1) вектор-функція $f(t,p,\varepsilon)$ неперервна при $t\in[0,T]$, $\|p\|\le\chi_0$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$;

2) існують неспадні за кожним з аргументів функції $\lambda(\varepsilon)$ і $\mu(\sigma,\varepsilon)$, і такі, що $\lambda(0)=\mu(0,0)=0$, $\|f(t,0,\varepsilon)\|\le\lambda(\varepsilon)$,

$$\|f(t,p_1,\varepsilon)-f(t,p_2,\varepsilon)\|\le\mu(\sigma,\varepsilon)\|p_1-p_2\|$$

для всіх $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ і $\|p_1\|\le\chi_0$, $\|p_2\|\le\chi_0$;

3) матриці Коші $\bar U(t,s,\varepsilon)$ і $\bar V(t,s,\varepsilon)$ систем рівнянь

$$\frac{du}{dt}=\varepsilon\sum_{\nu=1}^{r}F_\nu(t,\varepsilon)\,u_{\theta_\nu}\,,\ \frac{dv}{dt}=H(t,\varepsilon)\,v$$

відповідно, задовольняють умови 3 і 4, в яких замість матриць U і V потрібно записати $\bar U$ і $\bar V$.

Тоді можна вказати додатні числа $\varepsilon^*\in(0,\varepsilon_0]$ і $\chi^*\in[0,\chi_0]$, такі, що для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$ існує єдиний розв'язок $\left\{u^*(t,\varepsilon),\ v^*(t,\varepsilon)\right\}$ крайової задачі (10), (11), неперервний за ε і

$$\|u^*(t,\varepsilon)\|+\|v^*(t,\varepsilon)\|\le\chi_0^*,\ (t,\varepsilon)\in[0,T]\times(0,\varepsilon^*]\,.$$

2. Доведення теореми

Зробимо в системі (1), (2) заміну

$$x=\xi+\varepsilon w(t,\tau,\xi)\,,\ \varphi=\bar\varphi(t,\tau,\xi)+\varepsilon\psi\,, \tag{12}$$

де $\bar\varphi$ — розв'язок усередненої крайової задачі (5). Із вигляду функцій w і X_0 випливає, що $w(0,\tau,\xi)=w(T,\tau,\xi)\equiv 0$.

Із першої з рівностей (12), рівнянь (1), (6) і враховуючи вираз функції w одержимо

$$\left(I-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)\frac{d\,\xi}{dt}=$$

$$=\varepsilon X_0(\varepsilon t,\xi_\Theta)+\varepsilon\left[X(t,\varepsilon t,x_\Theta,\varphi_\Theta,\varepsilon)-X(t,\varepsilon t,\xi_\Theta,\varphi_\Theta,\Theta)\right]+\varepsilon^2\,\frac{\partial w(t,\varepsilon t,\xi)}{\partial\tau},$$

де I — одинична матриця.

Для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, матриця $I - \varepsilon \dfrac{\partial w}{\partial \xi}$ невироджена. Тому

$$\left(I - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^{-1} = I + \varepsilon W(t, \xi_\Theta, \varepsilon) ,$$

де W — деяка матриця. Отже, для ξ маємо рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\varepsilon t, \xi_\Theta) + \varepsilon X_1(t, \xi_\Theta, \psi_\Theta, \varepsilon) , \tag{13}$$

де

$$X_1 = W(t, \xi_\Theta, \varepsilon) X_0(\varepsilon t, \xi_\Theta) + \left(I + \varepsilon W(t, \xi_\Theta, \varepsilon) \right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(X(t, \varepsilon t, \xi_\Theta + \varepsilon w_\Theta, \bar{\varphi}_\Theta + \varepsilon \psi_\Theta, \varepsilon) - X(t, \varepsilon t, \xi_\Theta, \bar{\varphi}_\Theta, 0) + \varepsilon \frac{\partial w(t, \varepsilon t, \xi)}{\partial \tau} \right) \right].$$

Із рівнянь (2) і (13) знаходимо:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\omega(t, \varepsilon t, \xi + \varepsilon w, \bar{\varphi} + \varepsilon \psi) - \omega(t, \varepsilon t, \bar{\varphi}) \right] - \frac{\partial \bar{\varphi}(t, \varepsilon t, \xi)}{\partial \xi} X_0(\varepsilon t, \xi_\Theta) -$$

$$- \frac{\partial \varphi(\varepsilon t, \xi)}{\partial \tau} + Y\left(t, \varepsilon t, \xi_\Theta + \varepsilon w_\Theta, \bar{\varphi}_\Theta + \varepsilon \varphi_\Theta, \varepsilon \right) + \varepsilon \frac{\partial \bar{\varphi}(t, \varepsilon t, \xi)}{\partial \xi} X_1(t, \xi_\Theta, \psi_\Theta, \varepsilon).$$

Із крайових умов (3) і співвідношень (12) випливає, що

$$(l_1 \xi)(\cdot, \varepsilon) = d_1 , \ (l_2 \psi)(\cdot, \varepsilon) = 0.$$

Зробимо ще одну заміну: $\xi = \bar{x}(t, \varepsilon) + z$. У підсумку одержимо крайову задачу

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon \sum_{i=1}^{l} C_i(t, \varepsilon) z_i + X_2(t, z_\Theta, \psi_\Theta, \varepsilon),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = D(t, \varepsilon) Z + Y_2(t, z_\Theta, \psi_\Theta, \varepsilon), \tag{14}$$

$$(l_1 z)(\cdot, \varepsilon) = 0, \quad (l_2 \psi)(\cdot, \varepsilon) = 0,$$

де матриці C_i та D визначені як і в системі (7), (8).

Одержана система має вигляд (10). Умови на систему рівнянь (1), (2) дозволяють зробити висновок, що виконані умови леми, тому для досить малого $\varepsilon^* \le \varepsilon_1$ існує єдиний розв'язок $z^*(t, \varepsilon)$, $\psi^*(t, \varepsilon)$ задачі (14), неперервний по ε при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon^*$, $z^*(t, 0) = \psi^*(t, 0) = 0$. На підставі рівностей (12) і (14) одержимо рівність (9).

Список використаних джерел:

1. Balachandra M. An Averaging Theorem for Two-Point Boundary Value Problems with Applications to Optimal Control / M. Balachandra // Journal of Math. Anal. and Appl. — 1976. — V. 55, № 1. — P. 46–60.

2. Balachandra M. A generalization of the method averaging for systems with two time scales / M. Balachandra, P. R. Sethna // Arch. Rational. Mech. Anal. — 1975. — № 58. — P. 261–283.
3. Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння / В. І. Фодчук, Я. Й. Бігун, І. І. Клевчук та ін. — К. : Ін-т математики НАН України, 1996. — 209 с.
4. Бігун Я. Й. Про усереднення в багаточастотних системах із змінним запізненням / Я. Й. Бігун // Наук. вісник Чернівецького університету : зб. наук. пр. — Чернівці : Рута, 2008. — Вип. 374. — С. 30–34.
5. Бігун Я. Й. Існування розв'язку та усереднення багатоточкових крайових задач для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом / Я. Й. Бігун // Нелінійні коливання. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 462–471.
6. Митропольский Ю. А. Проблеми асимптотической теории нестационарных колебаний / Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1964. — 431 с.
7. Гребеников Е. А. Новые качественные методы в небесной механике / Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов — М. : Наука, 1971. — 444 с.
8. Тышкевич В. А. Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений / В. А. Тышкевич. — К. : Наук. думка, 1981. — 80 с.

In this paper we researched the existence of solution and give justifiction of averaging method for systems of differential equations with slow and fast variables and with linearly transformed argument. The solution of systems of nonlinear equations satisfies the multipoint boundary conditions.

Key words: *averaging method, small parameter, boundary-value problem, linearly transformed argument, slow and fast variables.*

Отримано: 27.03.2012