УДК 517.5

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук,
Ю. В. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МЕТОД СІЧНОЇ ПЛОЩИНИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ОПУКЛОЇ ЛІПШІЦЕВОЇ ФУНКЦІЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ

У статті на основі ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування побудовано метод розв'язання задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *компакнозначне відображення, найкраща у розумінні опуклої ліпшіцевої функції апроксимація, метод січної площини.*

Вступ. У роботі для розв'язування задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень побудовано метод, який базується на ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування, запропонованого у праці [1], а також доведено його збіжність.

Отримано двосторонні оцінки, які дозволяють знайти величину найкращого наближення з наперед заданою точністю.

Побудований метод узагальнює також на випадок вищеназваної задачі метод розв'язування задачі найкращої у розумінні норми рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень, розглянутий у праці [2].

Постановка задачі. Нехай S-компакт, s — його елементи, X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору X, $C(S,K(X))$ — множина багатозначних відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$ і які неперервні на S у розумінні метрики Хаусдорфа на $K(X)$, V — скінченновимірний підпростір простору $C(S, X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in C(S, X)$, $i = \overline{1, n}$, p — задана на X дійснозначна опукла ліпшіцева з константою l функція.

Задачею найкращої у розумінні функції p рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ підпростором $V = \left\{ g : g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i, \alpha_i \in R, \right.$ $\left. i = \overline{1, n} \right\}$ неперервних однозначних відображень будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*(a) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right) =$$
$$= \inf_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(s)\right). \tag{1}$$

Якщо існує відображення $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$, $\alpha_i^* \in R^n$, $i = \overline{1, n}$, таке, що $\alpha_V^*(a) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*(s)\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i(s)\right)$, то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Виникають задачі наближення, в яких міра відхилення між елементами лінійного нормованого простору оцінюється не з допомогою норми, а з допомогою деякої дійснозначної опуклої ліпшіцевої функції. До таких задач відносяться задачі наближення по передནормі, функціоналу повільного зростання та інші. Вищеназвані задачі є частковими випадками задачі відшукання величини (1).

Практичне використання величини (1) та її екстремального елемента вимагає розробки чисельних методів їх відшукання.

Мета роботи. Побудувати метод відшукання величини (1) та її екстремального елемента, оснований на ідеї методу січних площин розв'язання задачі опуклого програмування.

Деякі означення та допоміжні твердження. Нехай X^* — простір, спряжений з X, F — дійснозначна функція, задана на X.

Полярою F^* функції F, або функцією, спряженою з F, називається функція, задана на X^*, означена рівністю $F^*(f) = = \sup_{x \in X} \left(f(x) - F(x) \right)$, $f \in X^*$, (див., наприклад, [3, с. 306]).

Множина $domF^* = \left\{ f : f \in X^*, F^*\left(f\right) < +\infty \right\}$ називається ефективною множиною функції F^* (див., наприклад, [3, с. 306]).

Елемент $f \in X^*$ називається субградієнтом функції F в точці $x_0 \in X$, якщо

$$F\left(x\right) - F\left(x_0\right) \geq f\left(x\right) - f\left(x_0\right),\ x \in X,$$

(див., наприклад, [3, с. 324]).

Множину субградієнтів функції F в точці $x_0 \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x_0 і позначають $\partial F\left(x_0\right)$ (див., наприклад, [3, с. 324]).

Якщо F є опуклою неперервною на X функцією, то для $x_0 \in X$ $\partial F\left(x_0\right)$ є непорожньою опуклою слабко* компактною множиною простору X^* (див., наприклад, [3, с. 327]).

Якщо F задана на X опукла напівнеперервна знизу дійснозначна функція, то функція $F_\infty\left(x\right) = \sup\limits_{f \in domF^*} f\left(x\right)$, $x \in X$, називається асимптотичною функцією для F (див., наприклад, [3, с. 346,347]).

Твердження 1. Для того щоб опукла напівнеперервна знизу на X функція p задовольняла умову Ліпшіца на X з константою l, необхідно і достатньо, щоб для всіх $f \in domp^*$ виконувалась нерівність $\left\| f \right\| \leq l$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай опукла на X функція p задовольняє умову Ліпшіца на X з константою $l > 0$. Тоді

$$p\left(x\right) \leq p\left(0\right) + l\left\| x \right\|,\ x \in X. \tag{2}$$

Нехай $f \in domp^*$. З урахуванням (2) одержимо, що

$$+\infty > p^*\left(f\right) = \sup_{x \in X}\left(f\left(x\right) - p\left(x\right)\right) \geq \sup_{x \in X}\left(f\left(x\right) - l\left\| x \right\|\right) - p\left(0\right).$$

Звідси випливає, що $f\left(x\right) \leq l\left\| x \right\|$, $x \in X$.

Тому

$$\left\| f \right\| = \sup_{\substack{x \in X, \\ x \neq 0}} \frac{f\left(x\right)}{\left\| x \right\|} \leq l.$$

Отже, для всіх $f \in domp^*$ виконується нерівність $\left\| f \right\| \leq l$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для опуклої напівнеперервної знизу на X функції p має місце нерівність

$$\|f\| \le l,\ f \in domp^*,\ \text{де}\ l > 0. \tag{3}$$

Згідно з теоремою Фенхеля-Моро (див., наприклад, [4, с. 186])

$$p(x) = \sup_{f \in domp^*} \left(f(x) - p^*(f) \right),\ x \in X. \tag{4}$$

З урахуванням (3), (4) для довільних $x_1, x_2 \in X$ одержимо

$$\left| p(x_1) - p(x_2) \right| = \left| \sup_{f \in domp^*} \left(f(x_1) - p^*(f) \right) - \sup_{f \in domp^*} \left(f(x_2) - p^*(f) \right) \right| \le$$

$$\le \sup_{f \in domp^*} \|f\| \|x_1 - x_2\| \le l \|x_1 - x_2\|.$$

Це й означає, що функція p є ліпшіцевою на X з константою l.

Твердження доведено.

В подальшому, як і в постановці задачі, будемо вважати, що функція p є заданою на X дійснозначною опуклою ліпшіцевою з константою l функцією.

Твердження 2. Асимптотична функція $p_\infty(x)$, $x \in X$, є сублінійною ліпшіцевою з константою l функцією.

Справедливість твердження випливає із задання функції $p_\infty(x)$, $x \in X$, та твердження 1.

Твердження 3. Якщо для $a \in R$ множина

$$dom_a p^* = \left\{ f : f \in X^*, p^*(f) \le a \right\} \ne \varnothing,$$

то вона є опуклою обмеженою слабко* компактною множиною простору X^*, причому $\|f\| \le l$, $f \in dom_a p^*$.

Справедливість твердження випливає з опуклості функції $p^*(f)$, $f \in X^*$, (див., наприклад, [4, с. 185]), обмеженості множини $domp^*$ (див. твердження 1), відкритості щодо слабкої* топології простору X^* множини $X^* \setminus dom_a p^*$.

Твердження 4. Якщо $a \in R$ і $dom_a p^* \ne \varnothing$, то функція $p_\infty^a(x) = \max_{f \in dom_a p^*} f(x)$, $x \in X$, є сублінійною ліпшіцевою з константою l функцією.

Для будь-якого $x \in X$ має місце рівність

$$p_\infty(x) = \lim_{k \to \infty} p_\infty^k(x).$$

Справедливість цього твердження випливає із задання функції $p_\infty^a(x)$, $x \in X$, та твердження 3.

Твердження 5. Для кожного елемента $g \in C(S, X)$ та числа a, для якого $dom_a p^* \neq \varnothing$, відображення $(s, f) \in S \times dom_a p^* \to f(g(s))$ є неперервним на $S \times dom_a p^*$ у розумінні топології на $S \times dom_a p^*$, яка є добутком топології компакта S та топології $dom_a p^*$, індукованої слабко* топологією простору X^*.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Для всіх $(s, f) \in S \times dom_a p^*$ і $(s_0, f_0) \in S \times dom_a p^*$ маємо, що

$$\begin{aligned} \left|f(g(s)) - f_0(g(s_0))\right| &\le \|f\|\left\|g(s) - g(s_0)\right\| + \left|f(g(s_0)) - f_0(g(s_0))\right| \le \\ &\le l\left\|g(s) - g(s_0)\right\| + \left|f(g(s_0)) - f_0(g(s_0))\right|. \end{aligned} \tag{5}$$

Оскільки $g \in C(S, X)$, то існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 компакта S такий, що $\left\|g(s) - g(s_0)\right\| < \dfrac{\varepsilon}{2l}$, $s \in V(s_0)$.

Розглянемо окіл $O\left(f_0; g(s_0); \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ точки f_0 у топології $dom_a p^*$, який визначається елементом $g(s_0)$ та числом $\dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$O\left(f_0; g(s_0); \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{f : f \in dom_a p^*, \left|f(g(s_0)) - f_0(g(s_0))\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

З урахуванням (5) для всіх $(s, f) \in V(s_0) \times O\left(f_0; g(s_0); \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ одержимо $\left|f(g(s)) - f_0(g(s_0))\right| < \varepsilon$.

Це й означає неперервність відображення $(s, f) \in S \times dom_a p^* \to$ $\to f(g(s))$ у довільній точці $(s_0, f_0) \in S \times dom_a p^*$.

Твердження доведено.

Будемо позначати далі через

$$h(g) = \max_{s \in S} p_\infty(g(s)), \; g \in C(S, X),$$

а для числа a, для якого $dom_a p^* \neq \varnothing$, позначимо через

$$h_a(g) = \max_{s \in S} p_\infty^a(g(s)), \; g \in C(S, X).$$

Твердження 6. Функції $h(g)$, $h_a(g)$, $g \in C(S, X)$, є сублінійними на $C(S, X)$ функціями, які задовольняють на $C(S, X)$ умові Ліпшіца з константою l.

Справедливість твердження випливає із задання функцій $h(g)$, $h_a(g)$, $g \in C(S,X)$, та тверджень 2—4.

Твердження 7. Для кожного $g \in C(S,X)$ має місце рівність

$$h(g) = \lim_{k\to\infty} h_k(g) = \sup_{k\in N} h_k(g). \tag{6}$$

Доведення. Оскільки для $k \in N$ $dom_k p^* \subseteq dom_{k+1} p^* \subseteq domp^*$, то $h_k(g) \le h_{k+1}(g) \le h(g)$. Звідси випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} h_k(g) = \sup_{k\in N} h_k(g) \le h(g).$$

Припустимо, що

$$\lim_{k\to\infty} h_k(g) = \sup_{k\in N} h_k(g) < h(g). \tag{7}$$

Нехай

$$h(g) = \max_{s\in S} \sup_{f\in domp^*} f(g(s)) = \sup_{f\in domp^*} f(g(s_0)). \tag{8}$$

З (7), (8) випливає, що існує функціонал $f_0 \in domp^*$ такий, що

$$f_0(g(s_0)) > \sup_{k\in N} h_k(g) \ge h_k(g),\ k \in N. \tag{9}$$

Оскільки $p^*(f_0) < +\infty$, то існує $k_0 \in N$ таке, що $p^*(f_0) < k_0$. Тому $f_0 \in dom_{k_0} p^*$. З урахуванням цього одержимо, що

$$f_0(g(s_0)) \le \max_{f\in dom_{k_0} p^*} f(g(s_0)) \le \max_{s\in S} \max_{f\in dom_{k_0} p^*} f(g(s)) = h_{k_0}(g),$$

що суперечить (9).

Одержана суперечність дозволяє зробити висновок про справедливість рівності (6).

Твердження доведено.

Твердження 8. Якщо $h(g) > 0$, $g \in V$, $g \ne 0$, то має місце співвідношення

$$\min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_{R^n}} h\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\right) = \mu > 0,$$

де $S_{R^n} = \left\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1\right\}$ — одинична сфера простору R^n.

Справедливість твердження випливає з неперервності відображення $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in R^n \to h\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\right)$ на R^n (див. твердження 6), компактності S_{R^n}, лінійної незалежності елементів $g_1,\ldots,g_n$ та умов твердження.

Твердження 9. Якщо $h(g)>0$, $g\in V$, $g\neq 0$, то існує натуральне число k_0 таке, що

$$\min_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_{R^n}} h_{k_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\right)=\mu_{k_0}>0 .$$

Справедливість твердження випливає з компактності S_{R^n}, ліпшіцевості з константою l функцій $h_k(g)$, $g\in C(S,X), k=1,2,\dots$, (див., твердження 6), тверджень 7 та 8.

Основні результати.

Теорема 1. Якщо $h(g)>0$, $g\in V$, $g\neq 0$, то існують точки $s_j\in S$, функціонали $f_j\in domp^*$, $j=\overline{1,m_1}$, такі, що

$$\min_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_{R^n}}\ \max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)=\bar{\mu}>0 . \tag{10}$$

Доведення. Згідно з твердженням 9 існує натуральне число k_0 таке, що

$$\min_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in S_{R^n}} h_{k_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\right)=\mu_{k_0}>0 .$$

Відповідно до твердження 5 відображення $(s,f)\in S\times dom_{k_0}p^*\to$ $\to f\left(g_i(s)\right)$, $i=\overline{1,n}$, є неперервними на $S\times dom_{k_0}p^*$ у розумінні топології на $S\times dom_{k_0}p^*$, яка є добутком топології компакта S та топології $dom_{k_0}p^*$, індукованої слабко* топологією простору X^*. Тоді для $\varepsilon'=\dfrac{\mu_{k_0}}{2\sqrt{n}}$ і кожної точки $(s,f)\in S\times dom_{k_0}p^*$ існує її окіл $V(s)\times O(f)$, де $V(s)$ — окіл точки s компакта S, $O(f)$ — окіл f компакта $dom_{k_0}p^*$ (див. твердження 3) такі, що

$$\left|f'\left(g_i(s')\right)-f\left(g_i(s)\right)\right|<\varepsilon',\ i=\overline{1,n},(s',f')\in V(s)\times O(f). \tag{11}$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{(s,f)\in S\times dom_{k_0}p^*}\left(V(s)\times O(f)\right)$ є відкритим покриттям $S\times dom_{k_0}p^*$. Оскільки $S\times dom_{k_0}p^*$ є компактом, то з цього покриття можна виділити скінченне підпокриття $V\left(s_j\right)\times O\left(f_j\right)$, $j=\overline{1,m_1}$. Тоді для кожної пари $(s,f)\in S\times dom_{k_0}p^*$ існує індекс $j_{(s,f)}\in\{1,...,m_1\}$ такий, що $(s,f)\in V\left(s_{j_{(s,f)}}\right)\times O\left(f_{j_{(s,f)}}\right)$. Тому згідно з (11)

$$\left|f\left(g_i(s)\right)-f_{j_{(s,f)}}\left(g_i\left(s_{j_{(s,f)}}\right)\right)\right|<\varepsilon',\ i=\overline{1,n}.$$

З урахуванням цього для кожного $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in S_{R^n}$, $(s,f)\in S\times dom_{k_0}p^*$ одержимо, що

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f\left(g_i(s)\right)-\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f\left(g_i(s)\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_{j_{(s,f)}}\left(g_i\left(s_{j_{(s,f)}}\right)\right)=$$
$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(g_i(s)\right)-f_{j_{(s,f)}}\left(g_i\left(s_{j_{(s,f)}}\right)\right)\right)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon')^2}=\varepsilon'\sqrt{n}.$$

Звідки для кожного $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in S_{R^n}$ і всіх $(s,f)\in S\times dom_{k_0}p^*$

$$\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)\ge f\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\right)(s)\right)-\varepsilon'\sqrt{n}.$$

Тому для кожного $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in S_{R^n}$

$$\begin{aligned}\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)&\ge\max_{s\in S}\max_{f\in dom_{k_0}p^*}f\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i g_i)(s)\right)-\varepsilon'\sqrt{n}=\\&=h_{k_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\right)-\varepsilon'\sqrt{n}\ge\mu_{k_0}-\varepsilon'\sqrt{n}=\mu_{k_0}-\frac{\mu_{k_0}}{2\sqrt{n}}\sqrt{n}=\frac{\mu_{k_0}}{2}>0.\end{aligned}\qquad(12)$$

Внаслідок (12) одержимо, що

$$\min_{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in S_{R^n}}\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)=\overline{\mu}\ge\frac{\mu_{k_0}}{2}>0.$$

Теорему доведено.

Перейдемо до описання запропонованого методу розв’язування задачі відшукання величини (1) та її екстремального елементу. При цьому будемо припускати, що $h(g)>0$, $g\in V$, $g\ne 0$. На попередньому його кроці вибираємо точки $s_j\in S$, функціонали $f_j\in domp^*$, $j=\overline{1,m_1}$, такі, для яких виконується умова (10).

Відповідно до теореми 1 вищеназвані точки та функціонали існують.

На k-му кроці $(k\ge 1)$ будемо розв’язувати задачу лінійного програмування:

$$\inf \theta \tag{13}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) + \theta \geq f_j\left(y_j\right) - p^*\left(f_j\right),\; j = \overline{1, m_1 + k - 1}\,. \tag{14}$$

Зрозуміло, що задача лінійного програмування (13)-(14) має допустимий розв'язок. Таким допустимим розв'язком буде, наприклад, вектор $\left(\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_n; \overline{\theta}\right)$, де $\left(\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_n\right)$ вибрано довільно з R^n, а

$$\overline{\theta} = \max_{1 \leq j \leq m_1}\left(f_j\left(y_j\right) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) - p^*\left(f_j\right)\right).$$

Для всіх допустимих розв'язків $\left(\alpha_1, ..., \alpha_n; \theta\right)$ задачі (13), (14) маємо, що

$$\max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_j\left(-g_i\left(s_j\right)\right) - \max_{1 \leq j \leq m_1}\left(p^*\left(f_j\right) - f_j\left(y_j\right)\right) \leq \theta\,.$$

Звідки при $\left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \neq \left(0, ..., 0\right)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2}\; \max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{-\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2{}_i}} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) - \max_{1 \leq j \leq m_1}\left(p^*\left(f_j\right) - f_j\left(y_j\right)\right) \leq \theta\,.$$

Оскільки згідно з (10)

$$\max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{-\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha^2{}_i}} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) \geq \overline{\mu} > 0\,,$$

то звідси випливає, що

$$\theta \geq -\max_{1 \leq j \leq m_1}\left(p^*\left(f_j\right) - f_j\left(y_j\right)\right). \tag{15}$$

Отже, для будь-якого допустимого розв'язку $\left(\alpha_1, ..., \alpha_n; \theta\right)$ задачі (13), (14) має місце співвідношення (15).

Це означає, що цільова функція θ цієї задачі лінійного програмування обмежена знизу на множині її допустимих розв'язків. Тому задача лінійного програмування (13), (14) має оптимальний розв'язок (див., наприклад, [5, с.110]).

Теорема 2. Якщо $\left(\alpha^k; \theta^k\right) = \left(\alpha_1^k, ..., \alpha_n^k; \theta^k\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (13), (14), то мають місце співвідношення

$$\theta^k \leq \alpha_V^*\left(a\right) \leq \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^k\left(s\right)\right), \tag{16}$$

де $g^k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k g_i$, $k = 1, 2, \ldots$.

Якщо для деякого натурального k

$$\theta^k = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^k(s)\right),$$

то g^k є екстремальним елементом для величини (1) і справедлива рівність

$$\theta^k = \alpha_V^*(a) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^k(s)\right). \tag{17}$$

Доведення. Оскільки вектор $\left(\alpha^k, \theta^k\right) = \left(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k; \theta^k\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (13)—(14), то

$$\begin{aligned}
\theta^k &= \inf\Big\{\theta : f_j\Big(y_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(g_i(s_j)\right)\Big) - p^*(f_j) \le \theta, \\
&\quad j = \overline{1, m_1 + k - 1}, \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \theta\right) \in R^{n+1}\Big\} = \\
&= \max_{1 \le j \le m_1 + k - 1}\Big(f_j\Big(y_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k\left(g_i(s_j)\right)\Big) - p^*(f_j)\Big) = \\
&= \max_{1 \le j \le m_1 + k - 1}\left(f_j\left(y_j - g^k(s_j)\right) - p^*(f_j)\right) \le \\
&\le \inf\Big\{\theta : f\Big(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(s)\Big) - p^*(f) \le \theta, s \in S, \\
&\quad y \in a(s), f \in dom p^*, \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \theta\right) \in R^{n+1}\Big\} = \qquad (18) \\
&= \inf\Big\{\theta : \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \max_{f \in dom p^*}\Big(f\Big(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(s)\Big) - p^*(f)\Big) \le \theta, \\
&\quad \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \theta\right) \in R^{n+1}\Big\} = \inf\Big\{\theta : \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\Big(y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(s)\Big) \le \theta, \\
&\quad \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \theta\right) \in R^{n+1}\Big\} = \inf\Big\{\theta : \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right) \le \theta, \\
&\quad g \in V, \theta \in R\Big\} = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right) = \alpha_V^*(a) \le \\
&\le \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^k(s)\right).
\end{aligned}$$

Із співвідношення (18) випливають співвідношення (16).

Якщо для деякого натурального k

$$\theta^k = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^k(s)\right),$$

то, враховуючи (16), робимо висновок, що g^k є екстремальним елементом для величини (1) і справедлива рівність (17).

Теорему доведено.

Отже, якщо для деякого натурального k

$$\theta^k = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\left(y - g^k(s)\right),$$

то згідно з теоремою 2 g^k є екстремальним елементом для величини (1) і $\alpha_V^*(a) = \theta^k$.

В цьому випадку процес відшукання величини (1) та її екстремального елемента завершено.

Розглянемо випадок, коли

$$\theta^k < \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\left(y - g^k(s)\right).$$

Тоді знаходимо точки $s_{m_1+k} \in S$, $y_{m_1+k} \in a\left(s_{m_1+k}\right)$ такі, що

$$\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\left(y - g^k(s)\right) = \max_{y\in a\left(s_{m_1+k}\right)} p\left(y - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right) = p\left(y_{m_1+k} - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right),$$

функціонал $f_{m_1+k} \in \partial p\left(y_{m_1+k} - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right)$ та до обмежень (14) задачі лінійного програмування (13), (14) добавляємо обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{m_1+k}\left(g_i\left(s_{m_1+k}\right)\right) + \theta \ge f_{m_1+k}\left(y_{m_1+k}\right) - p^*\left(f_{m_1+k}\right),$$

де $p^*\left(f_{m_1+k}\right) = f_{m_1+k}\left(y_{m_1+k} - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right) - p\left(y_{m_1+k} - g^k\left(s_{m_1+k}\right)\right)$ (див., наприклад, [3, с. 316]), знаходимо оптимальний розв'язок $\left(\alpha^{k+1}, \theta^{k+1}\right) = \left(\alpha_1^{k+1}, ..., \alpha_n^{k+1}; \theta^{k+1}\right)$ одержаної внаслідок цього нової задачі лінійного програмування і т.д.

Теорема 3. Послідовність $\left\{\theta^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є неспадною, існує $\lim_{k\to\infty} \theta^k$. Послідовність $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, де $\alpha^k = \left(\alpha_1^k, ..., \alpha_n^k\right)$, $k = 1, 2, ...$, є обмеженою послідовністю простору R^n. Для будь-якої часткової границі $\alpha^* = \left(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*\right)$ послідовності $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ елемент $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Мають місце співвідношення:

$$\lim_{k\to\infty} \theta^k = \alpha_V^*(a) = \lim_{k\to\infty} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\left(y - g^k(s)\right), \tag{19}$$

де $g^k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k g_i$, $k = 1, 2, ...$.

Доведення. Оскільки обмеження задачі лінійного програмування (13), (14), яка розв'язується на k-ому кроці, включається в обмеження задачі лінійного програмування, яка розв'язується на $k+1$-му кроці методу, а цільові функції цих задач однакові, то для відповідних їх оптимальних розв'язків $\left(\alpha_1^k,...,\alpha_n^k;\theta^k\right)$ та $\left(\alpha_1^{k+1},...,\alpha_n^{k+1};\theta^{k+1}\right)$ виконується нерівність: $\theta^k \le \theta^{k+1}$, $k=1,2,...$. Згідно з теоремою 2 $\theta^k \le \alpha_V^*\left(a\right)$. Тому існує $\lim\limits_{k\to\infty}\theta^k$ і

$$\lim_{k\to\infty}\theta^k \le \alpha_V^*\left(a\right). \tag{20}$$

Переконаємось, що послідовність $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору R^n. Припустимо супротивне. Тоді існує її підпослідовність $\left\{\alpha^{k_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ така, що $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left\|\alpha^{k_\nu}\right\|=+\infty$. Без обмеження загальності будемо вважати, що уже $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\alpha^k\right\|=+\infty$. Оскільки $\left(\alpha_1^k,...,\alpha_n^k;\theta^k\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (13), (14), то

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\alpha_i^k\right)f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)-\theta^k \le p^*\left(f_j\right)-f_j\left(y_j\right),\ j=\overline{1,m_1},\ k=1,2,....$$

Звідки

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{-\alpha_i^k}{\left\|\alpha^k\right\|}f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right)-\frac{1}{\left\|\alpha^k\right\|}\theta^k \le \frac{1}{\left\|\alpha^k\right\|}p^*\left(f_j\right)-\frac{1}{\left\|\alpha^k\right\|}f_j\left(y_j\right),\ j=\overline{1,m_1},\ k=1,2,.... \tag{21}$$

Оскільки $\left(-\dfrac{\alpha_1^k}{\left\|\alpha^k\right\|},...,-\dfrac{\alpha_n^k}{\left\|\alpha^k\right\|}\right)\in S_{R^n}$, то з послідовності $\left\{\left(-\dfrac{\alpha_1^k}{\left\|\alpha^k\right\|},...,-\dfrac{\alpha_n^k}{\left\|\alpha^k\right\|}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\left\{\left(-\dfrac{\alpha_1^{k_\nu}}{\left\|\alpha^{k_\nu}\right\|},...,-\dfrac{\alpha_n^{k_\nu}}{\left\|\alpha^{k_\nu}\right\|}\right)\right\}_{\nu=1}^{\infty}$. Нехай $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(-\dfrac{\alpha_1^{k_\nu}}{\left\|\alpha^{k_\nu}\right\|},...,-\dfrac{\alpha_n^{k_\nu}}{\left\|\alpha^{k_\nu}\right\|}\right)=\left(\alpha_1^{/},...,\alpha_n^{/}\right)$.

Зрозуміло, що $\left(\alpha_1^{/},...,\alpha_n^{/}\right)\in S_{R^n}$.

З урахуванням зазначеного вище, обмеженості послідовності $\left\{\theta^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ (існує $\lim\limits_{k\to\infty}\theta^k$) з (21) одержимо, що

$$\max_{1\le j\le m_1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{/}f_j\left(-g_i\left(s_j\right)\right)\le 0,$$

що суперечить (10).

Отже, $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору R^n.

Нехай $\alpha^* = \left(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*\right)$ її часткова границя.

Переконаємося, що вектор $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Існує підпослідовність $\left\{\alpha^{k_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha^{k_\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\left(\alpha_1^{k_\nu}, ..., \alpha_n^{k_\nu}\right) = \left(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*\right) = \alpha^*.$$

До обмежень задачі лінійного програмування типу (13), (14), яка розв'язана на кроці k_ν добавляється обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right) + \theta \geq f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right) - p^*\left(f_{m_1+k_\nu}\right),$$

де точки $s_{m_1+k_\nu} \in S$, $y_{m_1+k_\nu} \in a\left(s_{m_1+k_\nu}\right)$ вибрані так, що

$$\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\left(y - g^{k_\nu}(s)\right) = \max_{y\in a\left(s_{m_1+k_\nu}\right)} p\left(y - g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right) = \\ = p\left(y_{m_1+k_\nu} - g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right), \tag{22}$$

а $f_{m_1+k_\nu} \in \partial p\left(y_{m_1+k_\nu} - g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)$,

$$p^*\left(f_{m_1+k_\nu}\right) = f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu} - g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right) - p\left(y_{m_1+k_\nu} - g^{k_\nu}\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right).$$

Тому уже

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right) + \theta^{k_{\nu+1}} \geq f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right) - p^*\left(f_{m_1+k_\nu}\right). \tag{23}$$

Маємо далі з урахуванням (22), (23), що

$$\left|\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p\left(y - g^{k_\nu}(s)\right) - \left(f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - p^*\left(f_{m_1+k_\nu}\right)\right)\right| = \left|f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{k_\nu} g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right) - p^*\left(f_{m_1+k_\nu}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right) - p^*\left(f_{m_1+k_\nu}\right)\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_i^{k_{\nu+1}} - \alpha_i^{k_\nu}\right| \left\|g_i\right\|.$$

Оскільки $\lim_{\nu\to\infty}\left(\alpha_1^{k_\nu}, ..., \alpha_n^{k_\nu}\right) = \left(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*\right)$, то звідси, співвідношення (20) та неперервності відображення

$$\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\in R^n \to \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i\left(s\right)\right)$$

по $\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\in R^n$ випливає, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-g^{k_\nu}\left(s\right)\right)=\lim_{\nu\to\infty}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k_\nu} g_i\left(s\right)\right)=$$

$$=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{*} g_i\left(s\right)\right)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-g^{*}\left(s\right)\right)=$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\left(f_{m_1+k_\nu}\left(y_{m_1+k_\nu}\right)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{k_{\nu+1}} f_{m_1+k_\nu}\left(g_i\left(s_{m_1+k_\nu}\right)\right)-p^{*}\left(f_{m_1+k_\nu}\right)\right)\le$$

$$\le\lim_{\nu\to\infty}\theta^{k_\nu+1}=\lim_{k\to\infty}\theta^{k}\le\alpha_V^{*}\left(a\right).$$

Отже,

$$\alpha_V^{*}\left(a\right)\le\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-g^{*}\left(s\right)\right)\le\lim_{k\to\infty}\theta^{k}\le\alpha_V^{*}\left(a\right).$$

Звідси робимо висновок, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-g^{*}\left(s\right)\right)=\alpha_V^{*}\left(a\right)=\lim_{k\to\infty}\theta^{k}. \tag{24}$$

Це означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1). Оскільки рівність (24) має місце для будь-якої граничної точки $\alpha^*=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*\right)$ послідовності $\left\{\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}=\left(\alpha_1^k,...,\alpha_n^k\right)$, то справедлива рівність (19).

Теорему доведено.

Зауважимо, що з доведеної теореми випливає, що оцінки (16) можна використати для відшукання величини (1) з наперед заданою точністю.

Крім того, з теореми 3 випливає, що умова $h\left(g\right)>0$, $g\in V$, $g\neq 0$, є достатньою для існування екстремального елемента для величини (1).

Висновок. Побудовано чисельний метод розв'язування задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень. Отримано двосторонні оцінки, які дозволяють знайти величину найкращого наближення з наперед заданою точністю.

Встановлено достатню умову існування екстремального елемента для вищеназваної задачі.

Список використаних джерел:

1. Kelly J. E. The „Cutting plane" methods for solving convex programs / J. E. Kelly // SIAM J. — 1960. — Vol. 8, № 4. — P. 703–712.

2. Гнатюк Ю. В. Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2005. — Вип. 3. — С. 245–251.
3. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация/ П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
4. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
5. Юдин Д. Б. Линейное программирование (теория и конечные методы)/ Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. — М. : Физматгиз, 1963. — 774 с.

We generalized the method of cutting planes for the problem of the best at sense of the convex lipschitz function uniform approximation of continuous compact-valued maps by finite dimensional space of continuous single-valued maps.

Key words: *the compact-valued maps, the best in sense of the convex lipschitz function uniform approximation, the method of cutting planes.*

Отримано: 06.03.2012

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЇ СИЛЬНОЇ ЄДИНОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНАМИ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

У статті встановлено критерії сильної єдиності екстремального елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої функції рівномірної апроксимації компактнозначного відображення Γ-множинами однозначних відображень.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща у розумінні опуклої неперервної функції рівномірна апроксимація, сильна єдиність екстремального елемента, критерії.*

Вступ. У статті для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення Γ-множинами неперервних однозначних відображень встановлено деякі критерії сильної єдиності екстремального елемента, які узагальнюють на випадок вищеназваної задачі критерій сильної єдиності екстремального елемента для задачі найкращої у розумінні норми