УДК 517.532.2

О. М. Нікітіна, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький факультет національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ПОРОДЖЕНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ОПЕРАТОРОМ ЕЙЛЕРА ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ З ОДНІЄЮ ТОЧКОЮ СПРЯЖЕННЯ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено гібридне інтегральне перетворення, породжене на сегменті $[0, R_2]$ полярної осі з однією точкою спряження диференціальним оператором Ейлера другого порядку

Ключові слова: *диференціальний оператор Ейлера, інтегральне перетворення, ядро Діріхле, вагова функція, спектральна функція, спектральна щільність, інтегральне зображення, основна тотожність.*

Вступ. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Ефективним методом одержання інтегрального зображення аналітичного розв'язку таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень, започаткований в роботі [1]. Основні положення теорії гібридних інтегральних перетворень закладено в монографії [2]. Пропонована стаття присвячена запровадженню одного з типів гібридних інтегральних перетворень.

Основна частина. Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_1 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2); R_2 < \infty\}$$

диференціальним оператором Ейлера другого порядку

$$B^*_{(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r)B^*_{\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)B^*_{\alpha_2}, \quad (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2). \quad (1)$$

Тут прийняті позначення: $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3], $B^*_{\alpha_j} = r^2 \dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_j + 1) r \dfrac{d}{dr} + \alpha_j^2$ — диференціальний оператор Ейлера [4]; $2\alpha_j + 1 > 0$.

Означення. Областю задання диференціального оператора $B^*_{(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \left\{B_{\alpha_1}^*[g_1(r)]; B_{\alpha_2}^*[g_2(r)]\right\}$ неперервна на множині I_1; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right) g_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right) g_2(r)\right]\Big|_{r=R_1} = 0, \quad j = 1,2 ; \quad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma} g_1(r)\right] = 0, \quad \left(\alpha_{22}^2 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^2\right) g_2(r)\Big|_{r=R_2} = 0 . \quad (3)$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{jk}^m \geq 0$, $\beta_{jk}^m \geq 0$, $c_{11} \cdot c_{21} > 0$, $c_{j1} = \alpha_{2j}^1 \beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1 \beta_{2j}^1$; $\alpha_{22}^2 + \beta_{22}^2 \neq 0$.

Визначимо числа $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = c_{21} R_1^{2\alpha_1 + 1} : c_{11} R_1^{2\alpha_2 + 1}$, вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} \quad (4)$$

та скалярний добуток: для $u(r) \in G$, $v(r) \in G$

$$\begin{aligned}\big(u(r), v(r)\big) = \int_0^{R_2} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr + \\ + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} dr, \quad 2\alpha_j + 1 > 0.\end{aligned} \quad (5)$$

Лема 1. Для вектор-функцій $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ має місце базова тотожність

$$\left[u_1(r)v_1'(r) - u_1'(r)v_1(r)\right]\Big|_{r=R_1} = \frac{c_{21}}{c_{11}}\left[u_2(r)v_2'(r) - u_2'(r)v_2(r)\right]\Big|_{r=R_1} . \quad (6)$$

Доведення. Покладемо

$$a_{11}^k = \alpha_{11}^k \alpha_{22}^k - \alpha_{21}^k \alpha_{12}^k, \; a_{21}^k = \beta_{11}^k \alpha_{22}^k - \beta_{21}^k \alpha_{12}^k, \quad (7)$$

$$a_{12}^k = \alpha_{11}^k \beta_{22}^k - \alpha_{21}^k \beta_{12}^k, \; a_{22}^k = \beta_{11}^k \beta_{22}^k - \beta_{21}^k \beta_{12}^k, \; k = 1 .$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$a_{11}^k a_{22}^k - a_{12}^k a_{21}^k = c_{1k} \cdot c_{2k} . \quad (8)$$

Із системи рівностей

$$\alpha_{j1}^1 u_1'(R_1) + \beta_{j1}^1 u_1(R_1) = \alpha_{j2}^1 u_2'(R_1) + \beta_{j2}^1 u_2(R_1), \quad j = 1,2$$

знаходимо співвідношення:

$$\begin{aligned} u_1'(R_1) &= c_{11}^{-1}\left[a_{21}^1 u_2'(R_1) + a_{22}^1 u_2(R_1)\right], \\ u_1(R_1) &= -c_{11}^{-1}\left[a_{11}^1 u_2'(R_1) + a_{12}^1 u_2(R_1)\right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Такі ж співвідношення справджуються і для функцій $v_j(r)$:

$$\begin{aligned} v_1'(R_1) &= c_{11}^{-1}\left[a_{21}^1 v_2'(R_1) + a_{22}^1 v_2(R_1)\right], \\ v_1(R_1) &= -c_{11}^{-1}\left[a_{11}^1 v_2'(R_1) + a_{12}^1 v_2(R_1)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Безпосередні підрахунки дають:

$$\left[u_1(r)v_1'(r) - u_1'(r)v_1(r)\right]\Big|_{r=R_1} = -\frac{1}{c_{11}^2}\Big\{\left[a_{11}^1 u_2'(R_1) + a_{12}^1 u_2(R_1)\right]\times$$

$$\times\left[a_{21}^1 v_2'(R_1) + a_{22}^1 v_2(R_1)\right] - \left[a_{21}^1 u_2'(R_1) + a_{22}^1 u_2(R_1)\right]\times$$

$$\times\left[a_{11}^1 v_2'(R_1) + a_{12}^1 v_2(R_1)\right]\Big\} = -c_{11}^{-2}\Big\{a_{11}^1 a_{22}^1 u_2'(R_1)v_2(R_1) +$$

$$+ a_{12}^1 a_{21}^1 u_2(R_1)v_2'(R_1) - a_{21}^1 a_{12}^1 u_2'(R_1)v_2(R_1) - a_{22}^1 a_{11}^1 u_2(R_1)v_2'(R_1)\Big\} =$$

$$= -c_{11}^{-2}\left[(a_{11}^1 a_{22}^1 - a_{12}^1 a_{21}^1)u_2'(R_1)v_2(R_1) - (a_{11}^1 a_{22}^1 - a_{12}^1 a_{21}^1)u_2(R_1)v_2'(R_1)\right] =$$

$$= \frac{a_{11}^1 a_{22}^1 - a_{12}^1 a_{21}^1}{c_{11}^2}\left[u_2(R_1)v_2'(R_1) - u_2'(R_1)v_2(R_1)\right] =$$

$$= \frac{c_{21}}{c_{11}^2}\left[u_2(R_1)v_2'(R_1) - u_2'(R_1)v_2(R_1)\right],$$

що й треба було довести.

Лема 2. Диференціальний оператор $B_{(\alpha)}^*$ самоспряжений.

Доведення. Згідно правила (5) розглянемо скалярний добуток

$$\left(B_{(\alpha)}^*[u], v\right) = \int_0^{R_1} B_{\alpha_1}^*[u_1(r)]\cdot v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr + \int_{R_1}^{R_2} B_{\alpha_2}^*[u_2(r)]\cdot v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr.$$

Проінтегруємо два рази частинами під знаком інтегралів:

$$\begin{aligned} \left(B_{(\alpha)}^*[u], v\right) &= \sigma_1\left[r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R_1} + \\ \sigma_2\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=R_1}^{r=R_2} &+ \int_0^{R_2} u(r)(B_{(\alpha)}^*[v(r)])\sigma(r)dr. \end{aligned} \tag{11}$$

Згідно умов обмеження маємо граничну рівність

$$\lim_{r\to\infty}\left[r^{2\alpha_1+1}\left(v_1(r)\frac{du_1}{dr} - u_1(r)\frac{dv_1}{dr}\right)\right] = 0\,.$$

На підставі базової тотожності

$$\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1} - \sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1} =$$

$$=\left(\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\right)\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1}=$$

$$=\left(\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}R_1^{2\alpha_2+1}\right)\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1}=0\,.$$

Якщо $\alpha_{22}^2 \neq 0$, то

$$\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_2}{dr}v_2(r)-u_2(r)\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2}=$$

$$=\frac{\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}}{\alpha_{22}^2}\left\{\left(\alpha_{22}^2\frac{du_2}{dr}+\beta_{22}^2 u_2\right)\Bigg|_{r=R_2}v_2(R_2)-\right.$$

$$\left.-\left(\alpha_{22}^2\frac{dv_2}{dr}+\beta_{22}^2 v_2\right)\Bigg|_{r=R_2}u_2(R_2)\right\}=$$

$$=\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}(\alpha_{22}^2)^{-1}\left[0\cdot v_2(R_2)-0\cdot u_2(R_2)\right]=0.$$

Рівність (11) набуває вигляду

$$\left(B_{(\alpha)}^*[u],v\right)=\left(u,B_{(\alpha)}^*[v]\right).$$

Отже, диференціальний оператор $B_{(\alpha)}^*$ самоспряжений, що й треба було довести.

Із самоспряженості оператора $B_{(\alpha)}^*$ випливає, що його власні числа дійсні, а із того, що оператор $B_{(\alpha)}^*$ має одну особливу точку $r=0$, випливає, що спектр оператора $B_{(\alpha)}^*$ неперервний [2].

Висновок: спектр оператора $B_{(\alpha)}^*$ дійсний та неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$.

Спектральному параметру β відповідає дійсна спектральна функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\,. \quad (12)$$

При цьому функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння Ейлера

$$\begin{aligned}&(B_{\alpha_1}^*+b_1^2)V_{(\alpha);1}(r,\beta)=0,\ r\in(0,R_1),\\&(B_{\alpha_2}^*+b_2^2)V_{(\alpha);2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2),\end{aligned} \quad (13)$$

умови спряження (2) та крайові умови (3); $b_j^2=\beta^2+k_j^2$, $k_j^2\geq 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_j}+b_j^2)v=0$ складають функції $v_1=r^{-\alpha_j}\cos(b_j\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_j}\sin(b_j\ln r)$, $j=1,2$ [4].

Якщо в силу лінійності задачі покласти

$$\begin{aligned} V_{(\alpha);1}(r,\beta)&=A_1r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)+B_1r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r),\\ V_{(\alpha);2}(r,\beta)&=A_2r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)+B_2r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r),\end{aligned}\tag{14}$$

то крайові умови (3) і умови спряження (2) дають для визначення величин A_j, B_j $(j=1,2)$ алгебраїчну систему рівнянь:

$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)A_1+Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)B_1-Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)A_2-Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)B_2=0,\ j=1,2$$

$$Y^{21}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)A_2+Y^{22}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)B_2=0\,.\tag{15}$$

Візьмемо $A_2=A_0Y^{22}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)$, $B_2=-A_0Y^{21}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)$, де величина A_0 підлягає вибору. Останнє рівняння системи (15) переходить в тотожну рівність.

Розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_1, B_1:

$$\begin{aligned} Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)A_1+Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)B_1&=A_0[Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)-\\ -Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)]&\equiv A_0\delta_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1,R_2),\ j=1,2.\end{aligned}\tag{16}$$

Алгебраїчна система (16) має єдиний розв'язок

$$A_1=\omega_{(\alpha);2}(\beta),\quad B_1=-\omega_{(\alpha);1}(\beta),\quad A_0=c_{11}b_1R_1^{-(2\alpha_1+1)}.$$

$$\omega_{(\alpha);j}(\beta)=\delta_{\alpha_2;12}(b_2,R_1,R_2)Y^{1j}_{\alpha_1;21}(b_1,R_1)-\delta_{\alpha_2;22}(b_2,R_1,R_2)Y^{1j}_{\alpha_1;11}(b_1,R_1),\ j=1,2.$$

Підставимо визначені величини A_j, B_j в рівності (14):

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta)=\omega_{(\alpha);2}(\beta)r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r)-\omega_{(\alpha);1}(\beta)r^{-\alpha_1}\sin(b_1\ln r)\,,\tag{17}$$

$$V_{(\alpha);2}(r,\beta)=\frac{c_{11}b_1}{R_1^{2\alpha_1+1}}\Big[Y^{22}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)-Y^{21}_{\alpha_2;22}(b_2,R_2)r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r)\Big].$$

З цим вектор-функція $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ визначена.

Введемо до розгляду спектральну щільність

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta)=\beta[b_1(\beta)]^{-1}\left(\left[\omega_{(\alpha);1}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{(\alpha);2}(\beta)\right]^2\right)^{-1}.\tag{18}$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності $\Omega_{(\alpha)}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H_{(\alpha)}$ й обернене $H^{-1}_{(\alpha)}$ інтегральне перетворення, породжене на множині I_1 оператором $B^*_{(\alpha)}$ [2]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)] = \int_0^{R_2} g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta)\,, \tag{19}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r)\,. \tag{20}$$

Математичним обґрунтуванням правил (19), (20) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо функція

$$f(r) = \left[\theta(r)\theta(R_1 - r)r^{\alpha_1 - 1/2} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)r^{\alpha_2 - 1/2}\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна та має обмежену варіацію на множині $[0, R_2]$, то для будь-якого $r \in I_1$ має місце інтегральне зображення

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} V_{(\alpha)}(r,\beta)\int_0^{R_2} g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\,. \tag{21}$$

Доведення. Для $\lambda \neq \beta$ функції $V_{(\alpha);1}(r,\lambda)$ та $V_{(\alpha);1}(r,\beta)$ задовольняють відповідно диференціальні рівняння Ейлера:

$$\left(B_{\alpha_1}^{*} + \lambda^2 + k_1^2\right)V_{(\alpha);1}(r,\lambda) = 0\,,$$

$$\left(B_{\alpha_1}^{*} + \beta^2 + k_1^2\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta) = 0\,.$$

Помножимо перше рівняння на $V_{(\alpha);1}(r,\beta)r^{2\alpha_1 - 1}$, а друге — на $V_{(\alpha);1}(r,\lambda)r^{2\alpha_1 - 1}$ і віднімемо від другого перше:

$$(\beta^2 - \lambda^2)V_{(\alpha);1}(r,\beta)V_{(\alpha);1}(r,\lambda)r^{2\alpha_1 - 1} =$$

$$= \frac{d}{dr}\left[r^{2\alpha_1 + 1}\left(V_{(\alpha);1}(r,\beta)\frac{dV_{(\alpha);1}(r,\lambda)}{dr} - V_{(\alpha);1}(r,\lambda)\frac{dV_{(\alpha);1}(r,\beta)}{dr}\right)\right]. \tag{22}$$

Для $\lambda \neq \beta$ функції $V_{(\alpha);2}(r,\lambda)$ та $V_{(\alpha);2}(r,\beta)$ задовольняють відповідно диференціальні рівняння Ейлера:

$$\left(B_{\alpha_2}^{*} + \lambda^2 + k_2^2\right)V_{(\alpha);2}(r,\lambda) = 0\,,$$

$$\left(B_{\alpha_2}^{*} + \beta^2 + k_2^2\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta) = 0\,.$$

Помножимо перше рівняння на функцію $V_{(\alpha);2}(r,\beta)r^{2\alpha_2 - 1}$, а друге — на функцію $V_{(\alpha);2}(r,\lambda)r^{2\alpha_2 - 1}$ і віднімемо від другого перше:

$$(\beta^2 - \lambda^2)V_{(\alpha);2}(r,\beta)V_{(\alpha);2}(r,\lambda)r^{2\alpha_2 - 1} =$$

$$= \frac{d}{dr}\left[r^{2\alpha_2 + 1}\left(V_{(\alpha);2}(r,\beta)\frac{dV_{(\alpha);2}(r,\lambda)}{dr} - V_{(\alpha);2}(r,\lambda)\frac{dV_{(\alpha);2}(r,\beta)}{dr}\right)\right]. \tag{23}$$

Помножимо рівність (22) на $\sigma_1 dr$ й проінтегруємо по r від $r=\varepsilon>0$ до $r=R_1$. Помножимо рівність (23) на $\sigma_2 dr$ й проінтегруємо по r від $r=R_1$ до $r=R_2$. Додавши одержані рівності, маємо:

$$\int_{\varepsilon}^{R_1} V_{(\alpha);1}(r,\beta)V_{(\alpha);1}(r,\lambda)r^{2\alpha_1-1}\sigma_1 dr+\int_{R_1}^{R_2} V_{(\alpha);2}(r,\beta)V_{(\alpha);2}(r,\lambda)r^{2\alpha_2-1}\sigma_2 dr=$$
$$=-\varepsilon^{2\alpha_1+1}\Big(V_{(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)V'_{(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)-V'_{(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)V_{(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)\Big)+$$
$$+R_1^{2\alpha_1+1}\sigma_1\Big(V_{(\alpha);1}(R_1,\beta)V'_{(\alpha);1}(R_1,\lambda)-V'_{(\alpha);1}(R_1,\beta)V_{(\alpha);1}(R_1,\lambda)\Big)- \quad (24)$$
$$-\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\Big(V_{(\alpha);2}(R_1,\beta)V'_{(\alpha);2}(R_1,\lambda)-V'_{(\alpha);2}(R_1,\beta)V_{(\alpha);2}(R_1,\lambda)\Big)+$$
$$+\sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1}\Big(V_{(\alpha);2}(R_2,\beta)V'_{(\alpha);2}(R_2,\lambda)-V'_{(\alpha);2}(R_2,\beta)V_{(\alpha);2}(R_2,\lambda)\Big)$$

Якщо $\alpha_{22}^2\neq 0$, то

$$V_{(\alpha);2}(R_2,\beta)V'_{(\alpha);2}(R_2,\lambda)-V'_{(\alpha);2}(R_2,\beta)V_{(\alpha);2}(R_2,\lambda)=$$
$$=(\alpha_{22}^2)^{-1}V_{(\alpha);2}(R_2,\beta)\times\Big(\alpha_{22}^2V'_{(\alpha);2}(R_2,\lambda)+\beta_{22}^2V_{(\alpha);2}(R_2,\lambda)\Big)-$$
$$-(\alpha_{22}^2)^{-1}V_{(\alpha);2}(R_2,\lambda)\Big(\alpha_{22}^2V'_{(\alpha);2}(R_2,\beta)+\beta_{22}^2V_{(\alpha);2}(R_2,\beta\Big)= \quad (25)$$
$$=(\alpha_{22}^2)^{-1}\Big(V_{(\alpha);2}(R_2,\beta)\cdot 0-V_{(\alpha);2}(R_2,\lambda)\cdot 0\Big)=0$$

Внаслідок базової тотожності (6)

$$\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\Big[V_{(\alpha);1}(R_1,\beta)V'_{(\alpha);1}(R_1,\lambda)-V'_{(\alpha);1}(R_1,\beta)V_{(\alpha);1}(R_1,\lambda)\Big]-$$
$$-\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}\Big[V_{(\alpha);2}(R_1,\beta)V'_{(\alpha);2}(R_1,\lambda)-V'_{(\alpha);2}(R_1,\beta)V_{(\alpha);2}(R_1,\lambda)\Big]= \quad (26)$$
$$=(\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1})\Big[V_{(\alpha);2}(R_1,\beta)V'_{(\alpha);2}(R_1,\lambda)-V'_{(\alpha);2}(R_1,\beta)V_{(\alpha);2}(R_1,\lambda)\Big]=0$$

тому що в силу вибору σ_1, σ_2

$$\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}=R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}R_1^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha_1+1}(1-1)=0.$$

Внаслідок (25) та (26) рівність (24) набуває вигляду:

$$(\beta^2-\lambda^2)\int_{\varepsilon}^{R_2}V_{(\alpha)}(r,\beta)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr= \quad (27)$$
$$=-\varepsilon^{2\alpha_1+1}\Big[V_{(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)V'_{(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)-V'_{(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)V_{(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)\Big].$$

Згідно рівності (17)

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta)=\Big[\omega_{(\alpha);2}(\beta)\cos(b_1\ln r)-\omega_{(\alpha);1}(\beta)\sin(b_1\ln r)\Big]r^{-\alpha_1}$$

$$\frac{dV_{(\alpha);1}}{dr} = -\alpha_1 r^{-1} V_{(\alpha);1} - b_1(\beta) r^{-\alpha_1 - 1} \times$$
$$\times \Big(\omega_{(\alpha);2}(\beta) \sin(b_1(\beta)\ln r) + \omega_{(\alpha);1}(\beta)\cos(b_1(\beta)\ln r) \Big).$$

Такі ж рівності маємо, якщо замість β написати λ.

Внаслідок цього встановлюємо, що

$$V_{(\alpha);1}(\varepsilon,\beta)V'_{(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda) - V_{(\alpha);1}(\varepsilon,\lambda)V'_{(\alpha);1}(\varepsilon,\beta) = -2^{-1}\{[b_1(\beta)-b_1(\lambda)]\times$$
$$\times G_{(\alpha);1}(\lambda,\beta)\times\sin\left[(b_1(\beta)+b_1(\lambda))\ln\varepsilon\right] + \left[b_1(\beta)+b_1(\lambda)\right]G_{(\alpha);2}(\lambda,\beta)\times$$
$$\times\sin\left[(b_1(\beta)-b_1(\lambda))\ln\varepsilon\right] + \left[b_1(\beta)+b_1(\lambda)\right]G_{(\alpha);3}(\lambda,\beta)\times$$
$$\times\cos\left[(b_1(\beta)-b_1(\lambda))\ln\varepsilon\right] + \left[b_1(\beta)-b_1(\lambda)\right]G_{(\alpha);4}(\lambda,\beta)\times\cos\left[(b_1(\beta)+b_1(\lambda))\ln\varepsilon\right].$$

У цій рівності беруть участь функції:

$$G_{(\alpha);1}(\lambda,\beta) = \omega_{(\alpha);2}(\lambda)\omega_{(\alpha);2}(\beta) - \omega_{(\alpha);1}(\lambda)\omega_{(\alpha);1}(\beta),$$
$$G_{(\alpha);2}(\lambda,\beta) = \omega_{(\alpha);1}(\lambda)\omega_{(\alpha);1}(\beta) + \omega_{(\alpha);2}(\lambda)\omega_{(\alpha);2}(\beta);$$
$$G_{(\alpha);3}(\lambda,\beta) = \omega_{(\alpha);1}(\beta)\omega_{(\alpha);2}(\lambda) - \omega_{(\alpha);1}(\lambda)\omega_{(\alpha);2}(\beta);$$
$$G_{(\alpha);4}(\lambda,\beta) = \omega_{(\alpha);1}(\beta)\omega_{(\alpha);2}(\lambda) + \omega_{(\alpha);1}(\lambda)\omega_{(\alpha);2}(\beta).$$

Якщо прийняти позначення

$$b_1(\beta) - b_1(\lambda) = q_1(\beta,\lambda),\ b_1(\beta) + b_1(\lambda) = q_2(\beta,\lambda),$$
$$\beta^2 - \lambda^2 = (\beta^2 + k_1^2) - (\lambda^2 + k_1^2) = [b_1(\beta)]^2 - [b_1(\lambda)]^2 = q_1(\beta,\lambda)\cdot q_2(\beta,\lambda),$$

то будемо мати:

$$\int_{\varepsilon}^{R_2} V_{(\alpha)}(r,\beta)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = -2^{-1}\Big\{G_{(\alpha);1}(\lambda,\beta)\sin\left[q_2(\beta,\lambda)\ln\varepsilon\right]\times$$
$$\times[q_2(\beta,\lambda)]^{-1} + G_{(\alpha);2}(\lambda,\beta)\frac{\sin\left[q_1(\lambda,\beta)\ln\varepsilon\right]}{q_1(\lambda,\beta)} + \frac{G_{(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{q_1(\lambda,\beta)}\times \tag{28}$$
$$\times\cos\left[q_1(\lambda,\beta)\ln\varepsilon\right] + \frac{G_{(\alpha);4}(\lambda,\beta)}{q_2(\lambda,\beta)}\cos[q_2\ln\varepsilon]\Big\}.$$

Розглянемо невласний подвійний інтеграл

$$J_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{R_2}\int_0^{\infty}\psi(\lambda)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr. \tag{29}$$

За означенням збіжності невласного інтегралу

$$J_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{R_2}\int_0^{\infty}\psi(\lambda)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)d\lambda V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)\left(\int_{\varepsilon}^{R_2}V_{(\alpha)}(r,\lambda)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\right)d\lambda. \tag{30}$$

Наявність рівності (28) приводить до граничної рівності

$$J_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{(\alpha);1}(\lambda,\beta)}{q_2(\beta,\lambda)}\sin\left[q_2(\beta,\lambda)\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]d\lambda - \right.$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{q_1(\lambda,\beta)}\cos\left[q_1(\lambda,\beta)\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]d\lambda -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{(\alpha);4}(\lambda,\beta)}{q_2(\lambda,\beta)}\cos\left[q_2(\lambda,\beta)\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]d\lambda +$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{(\alpha);2}(\lambda,\beta)}{q_1(\lambda,\beta)}\sin\left[q_1(\lambda,\beta)\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]d\lambda\right\} \equiv \qquad (31)$$

$$\equiv \lim_{A\to 0}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)G_{(\alpha);1}(\lambda,\beta)\frac{\sin(q_2 A)}{q_2(\beta,\lambda)}d\lambda - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{G_{(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{q_1(\lambda,\beta)}\cos(q_1 A)d\lambda - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)G_{(\alpha);4}(\lambda,\beta)\frac{\cos(q_2 A)}{q_2(\lambda,\beta)}d\lambda\right\} +$$

$$+\lim_{A\to\infty}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)G_{(\alpha);2}(\lambda,\beta)\frac{1}{\pi}\frac{\sin(q_1 A)}{q_1(\lambda,\beta)}d\lambda,\ A = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Згідно леми Рімана [5]

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{(\alpha);1}(\lambda,\beta)}{q_2(\beta,\lambda)}\sin[q_2 A]d\lambda = 0\,,$$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{q_1(\beta,\lambda)}\cos\left[q_1(\beta,\lambda)A\right]d\lambda = 0\,,$$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)\frac{G_{(\alpha);4}(\lambda,\beta)}{q_2(\beta,\lambda)}\cos\left[q_2(\beta,\lambda)A\right]d\lambda = 0\,,$$

якщо функція $\psi(\lambda)$ забезпечує абсолютну й рівномірну збіжність невласних інтегралів.

Розглянемо інтеграл

$$J_4 \equiv \lim_{A\to\infty}\int_0^\infty \psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)G_{(\alpha);2}(\lambda,\beta)\frac{1}{\pi}\frac{\sin[(b_1(\lambda)-b_1(\beta))A]}{b_1(\lambda)-b_1(\beta)}d\lambda\,.$$

Зробимо заміну змінних

$$b_1(\lambda)-b_1(\beta)=\xi,\ \lambda^* = \left[\left(\xi+b_1(\beta)\right)^2 - k_1^2\right]^{1/2},\ d\lambda = \frac{\left(\xi+b_1(\beta)\right)d\xi}{\left[(\xi+b_1)^2-k_1^2\right]^{1/2}}\,.$$

Одержимо:

$$J_4 \equiv \lim_{A\to\infty} \int\limits_{[k_1-(\beta^2+k_1^2)^{1/2}]<0}^{\infty} \psi(\lambda^*)\Omega_{(\alpha)}(\lambda^*)G_{(\alpha);2}(\lambda^*,\beta)\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin\xi A}{\xi}\right)\frac{\left[\xi+b_1^2\right]}{\lambda^*}d\xi .$$

Згідно леми Діріхле [5]

$$J_4 \equiv \lim_{A\to\infty} \int\limits_{k_1-(\beta^2+k_1^2)^{1/2}}^{\infty} \psi(\lambda^*)\Omega_{(\alpha)}(\lambda^*)G_{(\alpha);2}(\lambda^*,\beta)\frac{\xi+b_1}{\lambda^*}\frac{1}{\pi}\frac{\sin\xi A}{\xi}d\xi =$$

$$=\left[\psi(\lambda^*)\Omega_{(\alpha)}(\lambda^*)G_{(\alpha);2}(\lambda^*,\beta)\frac{\xi+b_1(\beta)}{\lambda^*}\right]\Bigg|\xi=0 = \frac{b_1(\beta)}{\beta}\psi(\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\times$$

$$\times G_{(\alpha);2}(\beta,\beta) = \frac{b_1(\beta)}{\beta}\frac{\beta}{b_1(\beta)}\frac{\psi(\beta)}{\left[\omega_{(\alpha);1}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{(\alpha);2}(\beta)\right]^2}\times$$

$$\times\left(\left[\omega_{(\alpha);1}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{(\alpha);2}(\beta)\right]^2\right)=\psi(\beta),\ \lambda^*\Big|_{\xi=0}=\beta>0 ,$$

якщо $\beta=\lambda\in(0,\infty)$, і дорівнює нулю, якщо $\beta=\lambda\,\overline{\in}\,(0,\infty)$.

Таким чином, невласний інтеграл

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{R_2}\int\limits_0^{\infty}\psi(\lambda)\Omega_{(\alpha)}(\lambda)V_{(\alpha)}(r,\lambda)d\lambda V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\psi(\beta) , \qquad (32)$$

якщо $\lambda=\beta\in(0,\infty)$, і дорівнює нулю, якщо $\beta=\lambda\,\overline{\in}\,(0,\infty)$.

Припустимо тепер, що функція

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi(\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)d\beta . \qquad (33)$$

Помножимо рівність (33) на функцію $V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$ й проінтегруємо по *r* від $r=0$ до $r=R_2$. Отримаємо:

$$\int\limits_0^{\infty}g(r)V_{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr=\psi(\lambda) . \qquad (34)$$

Підставивши в (33) згідно формули (34) функцію

$$\psi(\beta)=\int\limits_0^{\infty}g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho ,$$

приходимо до інтегрального зображення (21). Теорему доведено.

Зауваження. Якщо $g(r)$ кусково-неперервна, то в (21) зліва треба писати $\frac{1}{2}\left[g(r+0)+g(r-0)\right]$.

Введемо до розгляду величини та функції:

$$d_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11}, \quad \tilde{g}_1(\beta) = \int_0^{R_1} g_1(r) V_{(\alpha);1}(r,\beta) \sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} dr, \quad i = 1,2,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{(\alpha);2}(r,\beta) \sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} dr,$$

$$Z^1_{(\alpha);i2}(\beta) = \left(\alpha^1_{i2} \frac{d}{dr} + \beta^1_{i2} \right) V_{(\alpha);2}(r,\beta) \Big|_{r=R_1}.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо функція

$$f(r) = \left\{ B^*_{\alpha_1}[g_1(r)]; B^*_{\alpha_2}[g_2(r)] \right\}$$

неперервна на множині I_1, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r \to 0} \left[r^{2\alpha_1+1} \left(\frac{dg_1}{dr} V_{(\alpha);1}(r,\beta) - g_1(r) \frac{dV_{(\alpha);1}}{dr} \right) \right] = 0,$$

$$\left[\left(\alpha^2_{22} \frac{d}{dr} + \beta^2_{22} \right) g_2(r) \right] \Big|_{r = R_2} = g_R \tag{35}$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha^1_{j1} \frac{d}{dr} + \beta^1_{j1} \right) g_1(r) - \left(\alpha^1_{j2} \frac{d}{dr} + \beta^1_{j2} \right) g_2(r) \right] \Big|_{r = R_1} = \omega_{j1}, \ j = 1,2, \tag{36}$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора $B^*_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha)}[B^*_{(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \sum_{i=1}^{2} k_i^2 \tilde{g}_i(\beta) +$$
$$+ \sigma_2 R_2^{2\alpha_2+1} (\alpha^2_{22})^{-1} V_{(\alpha);2}(R_2,\beta) g_R + d_1 \left[Z^1_{(\alpha);12}(\beta) \omega_{21} - Z^1_{(\alpha);22}(\beta) \omega_{11} \right]. \tag{37}$$

Доведення. Згідно формули (19)

$$H_{(\alpha)}[B^*_{(\alpha)}[g(r)]] = \int_0^{R_2} B^*_{(\alpha)}[g(r)] \cdot V_{(\alpha)}(r,\beta) \sigma(r) dr =$$
$$= \int_0^{R_1} B^*_{\alpha_1}[g_1(r)] V_{(\alpha);1}(r,\beta) r^{2\alpha_1 - 1} \sigma_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} B^*_{\alpha_2}[g_2(r)] V_{(\alpha);2}(r,\beta) \sigma_2 r^{2\alpha_2 - 1} dr. \tag{38}$$

Проінтегруємо в (38) під знаком інтегралів два рази частинами:

$$H_{(\alpha)}[B^*_{(\alpha)}[g(r)]] = \sigma_1 \left[r^{2\alpha_1+1} \left(\frac{dg_1}{dr} V_{(\alpha);1}(r,\beta) - g_1(r) \frac{dV_{(\alpha);1}}{dr} \right) \right]_{r=0}^{r=R_1} +$$

$$+\sigma_2\left[r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}(r,\beta)-g_2(r)\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr}\right)\right]_{r=R_1}^{r=R_2}+ \qquad (39)$$

$$+\int_0^{R_1} g_1(r)B_{\alpha_1}^*[V_{(\alpha);1}(r,\beta)]\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)B_{\alpha_2}^*[V_{(\alpha);2}(r,\beta)]\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr\,.$$

В силу крайової умови в точці $r=0$ позаінтегральний член в точці $r=0$ перетворюється в нуль.

Якщо $\alpha_{22}^2\neq 0$, то

$$\left.\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}(r,\beta)-g_2(r)\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr}\right)\right|_{r=R_2}=$$

$$=(\alpha_{22}^2)^{-1}V_{(\alpha);2}(R_2,\beta)\left.\left(\alpha_{22}^2\frac{dg_2}{dr}+\beta_{22}^2 g_2(r)\right)\right|_{r=R_2}- \qquad (40)$$

$$-(\alpha_{22}^2)^{-1}g_2(R_2)\left.\left(\alpha_{22}^2\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr}+\beta_{22}^2V_{(\alpha);2}\right)\right|_{r=R_2}=(\alpha_{22}^2)^{-1}V_{(\alpha);2}(R_2,\beta)g_R.$$

Якщо скористатися базовою тотожністю для випадку, коли умови спряження неоднорідні, то одержимо, що

$$\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\left.\left(\frac{dg_1}{dr}V_{(\alpha);1}-g_1\frac{dV_{(\alpha);1}}{dr}\right)\right|_{r=R_1}-$$

$$-\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}\left.\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}-g_2\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr}\right)\right|_{r=R_1}=\left(\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}\right)\times$$

$$\times\left.\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}-g_2\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr}\right)\right|_{r=R_1}+\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\cdot c_{11}^{-1}\times \qquad (41)$$

$$\times(Z_{(\alpha);12}^1(\beta)\omega_{21}-Z_{(\alpha);22}^1(\beta)\omega_{11})=0\cdot\left.\left(\frac{dg_2}{dr}V_{(\alpha);2}-g_2\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr}\right)\right|_{r=R_1}$$

$$+\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1}\left(Z_{(\alpha);12}^1\omega_{21}-Z_{(\alpha);22}^1\omega_{11}\right)=d_1\left(Z_{(\alpha);12}^1(\beta)\omega_{21}-Z_{(\alpha);22}^1(\beta)\omega_{11}\right).$$

Із тотожних рівностей

$$(B_{\alpha_1}^*+b_1^2)V_{(\alpha);1}\equiv 0,\ (B_{\alpha_2}^*+b_2^2)V_{(\alpha);2}\equiv 0$$

знаходимо, що

$$\begin{aligned}B_{\alpha_1}^*[V_{(\alpha);1}(r,\beta)]&=-(\beta^2+k_1^2)V_{(\alpha);1}(r,\beta),\\ B_{\alpha_2}^*[V_{(\alpha);2}(r,\beta)]&=-(\beta^2+k_2^2)V_{(\alpha);2}(r,\beta).\end{aligned} \qquad (42)$$

Якщо (40)—(42) підставити в (39) і роз'єднати інтеграли, то приходимо до основної тотожності (37).

Формули (19), (20) та (37) складають математичний апарат для розв'язування відповідних стаціонарних й нестаціонарних задач математичної фізики.

Список використаних джерел:

1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Л., 1976. — С. 93–106.
2. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Наука, 1969. — Т. 3. — 656 с.

The method of delta-like sequence (Dirichlet kernel) inculcates the hybrid integral transformation generated on the segment of polar axis with one point of interface by the differential operator of Euler the second order.

Key words: *differential operator of Euler, integral transformation, Dirichlet kernel, gravimetric function, spectral function, spectral density, integral image, basic identity.*

Отримано: 16.03.2012

УДК 517.927

В. Б. Поселюжна, канд. фіз.-мат. наук,
Л. М. Семчишин, канд. фіз.-мат. наук

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу Тернопільського національного економічного університету, м. Чортків

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕСТАЦІОНАРНИМ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИМ МЕТОДОМ

У статті досліджується питання збіжності нестаціонарного колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма. Встановлено умови збіжності методу.

Ключові слова: *інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод, збіжність методу.*

Вступ. При математичному моделюванні фізичних, хімічних, біологічних, економічних процесів виникають різноманітні задачі для диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та

