УДК 517.443

О. Ю. Тарновецька, викладач

Чернівецький факультет національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА–ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом порівняння розв'язків, побудованих на полярній осі з одною точкою спряження для сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Лежандра методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функції Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, умова однозначної розв'язності, логічна схема.*

Постановка проблеми. Тонкостінні елементи композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростіших випадках величини, які характеризують напружений стан композита, виражаються у вигляді поліпараметричного невласного інтегралу, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена ця робота.

Основна частина. Розглянемо задачу про структуру обмеженого на множині $I_1^+ = \{r\colon r \in (0, R_1) \cup (R_1, \infty)\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Лежандра для модифікованих функцій

$$\begin{gathered}\left(B_\alpha^* - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r),\ r \in (0, R_1),\\ \left(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r),\ r \in (R_1, \infty)\end{gathered} \tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right)u_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right)u_2(r)\right]\Big|_{r=R_1} = \omega_{j1},\ j = 1,2. \tag{2}$$

Ми припускаємо, що існують такі числа γ_1 та γ_2, що справедливі граничні співвідношення:

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma_1}u_1(r)]=0\,,\ \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma_2}u_2(r)]=0. \tag{3}$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $q_j>0$, $\alpha_{jk}^1\geq 0$, $\beta_{jk}^1\geq 0$, $c_{11}c_{21}>0$, $c_{j1}=\alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1-\alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1$, $j,k=1,2.$

У рівностях (1) бере участь диференціальний оператор Ейлера 2-го порядку [1] $B_\alpha^*=r^2\dfrac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)r\dfrac{d}{dr}+\alpha^2$ та узагальнений диференціальний оператор Лежандра [2]

$$\Lambda_{(\mu)}=\frac{d^2}{dr^2}+cth\,r\frac{d}{dr}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-ch\,r}+\frac{\mu_2^2}{1+ch\,r}\right),2\alpha+1>0\,,\ \mu_1\geq\mu_2\geq 0.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^*-q_1^2)\upsilon=0$ утворюють функції $\upsilon_1=r^{-\alpha-q_1}$ та $\upsilon_2=$ $=r^{-\alpha+q_1}$; фундаментальну систему розв'язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2)u=0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра 1-го роду $P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ та 2-го роду $L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ [2], $(\mu)=(\mu_1,\mu_2),\nu_2=-\dfrac{1}{2}+q_2$.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (1)—(3) методом функцій Коші [1; 3]:

$$\begin{aligned}u_1(r)&=A_1r^{-\alpha+q_1}+\int_0^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,\\ u_2(r)&=B_2L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)+\int_{R_1}^{\infty}E_2(r,\rho)g_2(\rho)sh\rho d\rho.\end{aligned}\tag{4}$$

У рівностях (4) $E_j(r,\rho)$ — функції Коші:

$$E_1=\frac{1}{2q_1Z_{\alpha;11}^{12}(q_1,R_1)}\begin{cases}r^{-\alpha+q_1}\Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1,\rho),0<r<\rho<R_1,\\ \rho^{-\alpha+q_1}\Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1,r),0<\rho<r<R_1,\end{cases}\tag{5}$$

$$E_2=-\frac{B_\mu(q_2)}{Z_{\nu_2;12}^{(\mu),12}(chR_1)}\begin{cases}L_{\nu_2}^{(\mu)}(ch\rho)F_{\nu_2,12}^{(\mu);1}(chR_1,chr),\ 0<r<\rho<R_1,\\ L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)F_{\nu_2,12}^{(\mu);1}(chR_1,ch\rho),\ 0<\rho<r<R_1.\end{cases}\tag{6}$$

У рівностях (5), (6) беруть участь функції:

$$Z^{11}_{\alpha,j1}(q_1, R_1) = [-(\alpha+q_1)\alpha^1_{j1}R_1^{-1} + \beta^1_{j1}]R_1^{-(\alpha+q_1)},$$

$$Z^{12}_{\alpha,j1} = [-(\alpha-q_1)\alpha^1_{j1}R_1^{-1} + \beta^1_{j1}]R_1^{-\alpha+q_1},$$

$$\Psi^{1*}_{\alpha;j1}(q_1, r) = Z^{12}_{\alpha,j1}(q_1, R_1)r^{-(\alpha+q_1)} - Z^{11}_{\alpha,j1}(q_1, R_1)r^{-\alpha+q_1},$$

$$Z^{(\mu),11}_{\nu_2;j2}(chR_1) = \alpha^1_{j2}shR_1P^{(\mu)/}_{\nu_2}(chR_1) + \beta^1_{j2}P^{(\mu)}_{\nu_2}(chR_1),$$

$$Z^{(\mu),12}_{\nu_2;j2}(chR_1) = \alpha^1_{j2}shR_1L^{(\mu)/}_{\nu_2}(chR_1) + \beta^1_{j2}L^{(\mu)}_{\nu_2}(chR_1),$$

$$F^{(\mu),1}_{\nu_2;j2}(chR_1, chr) = Z^{(\mu),11}_{\nu_2;j2}(chR_1)L^{(\mu)}_{\nu_2}(chr) - Z^{(\mu),12}_{\nu_2;j2}(chR_1)P^{(\mu)}_{\nu_2}(chr),$$

$$B_\mu(q_2) = \frac{\pi}{2}\frac{2^{\mu_1}}{2^{\mu_2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\nu^+)\Gamma(\frac{1}{2}+q_1-\nu^-)}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\nu^+)\Gamma(\frac{1}{2}+q_1+\nu^-)};\ \nu^\pm = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2).$$

Умови спряження (2) для визначення величин A_1 та B_2 дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} &Z^{12}_{\alpha;11}(q_1, R_1)A_1 - Z^{(\mu),12}_{\nu_2,12}(chR_1)B_2 = \omega_{11}, \\ &Z^{12}_{\alpha;21}(q_1, R_1)A_1 - Z^{(\mu),12}_{\nu_2,22}(chR_1)B_2 = \omega_{21} + G_{12}. \end{aligned} \tag{7}$$

Тут бере участь функція

$$G_{12} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_0^{R_1}\frac{\rho^{-\alpha+q_1}}{Z^{12}_{\alpha,11}(q_1,R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho + \frac{c_{21}}{shR_1}\int_{R_1}^{\infty}\frac{L^{(\mu)}_{\nu_2}(ch\rho)}{Z^{(\mu);12}_{\nu_2;11}(chR_1)}g_2(\rho)sh\rho d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв’язності крайової задачі: для будь-якого ненульового вектора $\vec{q} = \{q_1; q_2\} \neq \vec{0}$ визначник алгебраїчної системи (7) відмінний від нуля:

$$\begin{aligned} &\Delta_{\alpha,(\mu)}(q) \equiv Z^{(\mu),12}_{\nu_1;12}(chR_1)Z^{12}_{\alpha,12}(q_1,R_1) - \\ &-Z^{(\mu);12}_{\nu_1;22}(chR_1)Z^{12}_{\alpha,11}(q_1,R_1) \neq 0, \nu_1 = -\frac{1}{2} + q_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Введемо до розгляду головні розв‘язки крайової задачі (1)—(3):

1) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{\alpha,(\mu);11}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_1\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}\begin{cases} r^{-\alpha+q_1}[Z^{(\mu);12}_{\nu_{2;12}}(chR_1)\psi^{1*}_{\alpha,21}(q_1,\rho) - \\ \rho^{-\alpha+q_1}[Z^{(\mu);12}_{\nu_{2;12}}(chR_1)\psi^{1*}_{\alpha,21}(q_1,r) - \end{cases}$$

$$-Z^{(\mu);12}_{-\nu_{2;22}}(chR_1)\psi^{1*}_{\alpha,11}(q_1,\rho)], R_1 < r < \rho < \infty,$$

$$-Z^{(\mu);12}_{\nu_{2;22}}(chR_1)\psi^{1*}_{\alpha,11}(q_1,r)],\ R_1 < \rho < r < \infty,$$

$$H_{\alpha,(\mu);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{shR_1}\frac{r^{-\alpha+q_1}}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}L^{(\mu)}_{\nu_2}(ch\rho), H_{\alpha,(\mu);21}(r,\rho,q)=$$
$$=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{\rho^{-\alpha+q_1}}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}L^{(\mu)}_{\nu_2}(chr), \tag{9}$$

$$H_{\alpha,(\mu);22}(r,\rho,q)=\frac{B_{(\mu)(q_2)}}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}\times\begin{cases} L^{\mu}_{\nu_2}(ch\rho)\Big[Z^{12}_{\alpha,11}(q_1,R_1)F^{(\mu),1}_{\nu_2;22}(chR_1,chr)- \\ L^{\mu}_{\nu_2}(chr)\Big[Z^{12}_{\alpha,11}(q_1,R_1)F^{(\mu),1}_{\nu_2;22}(chR_1,ch\rho)- \end{cases}$$
$$-Z^{12}_{\alpha,21}(q_1,R_1)F^{(\mu),1}_{\nu_2;12}(chR_1,chr)], R_1<r<\rho<\infty,$$
$$-Z^{12}_{\alpha,21}(q_1,R_1)F^{(\mu),1}_{\nu_2;12}(chR_1,ch\rho)], R_1<\rho<r<\infty.$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^1_{\alpha,(\mu);11}(r,q)=\frac{Z^{(\mu);12}_{\nu_2;22}(chR_1)}{-\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}r^{-\alpha+q_1}, R^1_{\alpha,(\mu);21}(r,q)=\frac{Z^{(\mu);12}_{\nu_2;12}(chR_1)}{\Delta_{\alpha,(\mu)}(q)}r^{-\alpha+q_1},$$
$$R^2_{\alpha,(\mu);11}(r,q)=\frac{Z^{12}_{\alpha,21}(q_2,R_1)}{-\Delta\alpha,_{(\mu)}(q)}L^{(\mu)}_{\nu_2}(chr),$$
$$R^2_{\alpha,(\mu);21}(r,q)=\frac{Z^{12}_{\alpha,11}(q_2,R_1)}{\Delta\alpha,_{(\mu)}(q)}L^{(\mu)}_{\nu_2}(chr). \tag{10}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (7), підстановки одержаних значень A_1, B_2 у формули (4) та низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)—(3):

$$u_j(r)=R^j_{\alpha,(\mu);11}(r,q)\omega_{11}+R^j_{\alpha,(\mu);21}(r,q)\omega_{21}+$$
$$+\int_0^{R_1}H_{\alpha,(\mu);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho+ \tag{11}$$
$$+\int_{R_1}^{\infty}H_{\alpha,(\mu);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)sh\rho d\rho, j=1,2.$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)—(3) методом гібридного інтегрального перетворення, породженого на множині I_1^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\alpha,(\mu)}=\theta(r)\theta(R_1-r)B^*_\alpha+\theta(r-R_1)\Lambda_{(\mu)}, \tag{12}$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3].

ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$ самоспряжений і має дві особливі точки $r=0$ та $r=\infty$ [4]. У цьому випадку його спектр дійсний та неперервний, а спектральна функція комплекснозначна [4]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$, а спектральна вектор-функція

$$V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) + \theta(r - R_1)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta) \in G\,.$$

При цьому $V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta) = V_{\alpha,(\mu),j1}(r,\beta) + iV_{\alpha,(\mu),j2}(r,\beta)$ де i — уявна одиниця. Якщо покласти $b_j(\beta) = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, k_j \ge 0, j = 1,2$ то, очевидно, що функції $V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)$ повинні задовольняти диференціальні рівняння Ейлера та Лежандра

$$\begin{gathered}\left(B^*{}_{\alpha} + b_1^2\right)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) = 0, r \in (0,R_1),\\ \left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta) = 0, r \in (R_1,\infty)\end{gathered} \tag{13}$$

і однорідні умови спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right)V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta) - \left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right)V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)\right]\right|_{r=R_1} = 0, \tag{14}$$

$$j = 1,2.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha}^* + b_1^2\right)V = 0$ утворюють функції $V_1 = r^{-\alpha}\cos(b_1 \ln r)$ та $V_2 = r^{-\alpha}\sin(b_1 \ln r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)U = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра $A_{\nu_2^*}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\nu_2^*}^{(\mu)}(chr)$, $\nu_2^* = -\frac{1}{2} + ib_2$ [4]. Це дозволяє будувати функції $V_{\alpha,(\mu),jk}(r,\beta)$ як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) [4]:

$$V_{\alpha,(\mu),1}(r,\beta) = \frac{q_2}{(b_1 S_{(\mu)} f_{\alpha,(\mu),22})^{\frac{1}{2}}}[\omega_{\alpha,(\mu),1}(\beta)V_2(r,\beta) - \omega_{\alpha,(\mu),2}(\beta)V_1(r,\beta) +$$

$$+ i(\gamma_{(\mu)} q_{\alpha,(\mu)}^{-1}\omega_{\alpha,(\mu)})^{\frac{1}{2}}(e_{\alpha,(\mu),12}(\beta)V_2(r,\beta) - e_{\alpha,(\mu),22}(\beta)V_1(r,\beta)],$$

$$V_{\alpha,(\mu),2}(r,\beta) = (b_1 S_{(\mu)} f_{\alpha,(\mu),22})^{\frac{1}{2}}[f_{\alpha,(\mu),22}(\beta)A_{\nu_2^*}^{(\mu)}(chr) - \tag{15}$$

$$-\gamma_{(\mu)} f_{\alpha,(\mu),23}(\beta) B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chr)]+$$

$$+i[b_1\gamma_{(\mu)} S_{(\mu)} q_{\alpha,(\mu)} f^{-1}_{\alpha,(\mu),22}\omega_{\alpha,(\mu)}]^{\frac{1}{2}} B^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+ib_2}(chr),\ q_2 = b_1 c_{21}(shR_1)^{-1}.$$

У рівностях (15) беруть участь величини та функції:

$$Y^{11}_{\alpha;m1}(b_1, R_1) = [(\beta^1_{m1} - \alpha^1_{m1}\alpha R_1^{-1})\cos(b_1 \ln R_1) - b_1 R_1^{-1}\alpha^1_{m1}\sin(b_1 \ln R_1)]R_1^{-\alpha},$$

$$Y^{12}_{\alpha;m1}(b_1, R_1) = [(\beta^1_{m1} - \alpha^1_{m1}\alpha R_1^{-1})\sin(b_1 \ln R_1) - b_1 R_1^{-1}\alpha^1_{m1}\cos(b_1 \ln R_1)]R_1^{-\alpha},$$

$$Y^{(\mu),11}_{\nu_2^*,m2}(chR_1) = \alpha^1_{m2} shR_1 A^{(\mu)/}_{\nu_2^*}(chR_1) + \beta^1_{m2} A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chR_1),$$

$$Y^{(\mu),12}_{\nu_2^*,m2}(chR_1) = \alpha^1_{m2} shR_1 B^{(\mu)/}_{\nu_2^*}(chR_1) + \beta^1_{m2} B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(chR_1),\ \nu_2^* = -\frac{1}{2} + ib_2;$$

$$e_{\alpha,(\mu),jk}(\beta) = Y^{1j}_{\alpha,11}(b_1, R_1) Y^{(\mu),1k}_{\nu_2^*;22}(chR_1) - Y^{1j}_{\alpha,21}(b_1, R_1) Y^{(\mu),1k}_{\nu_2^*;12}(chR_1);\ j,k = 1,2,$$

$$\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta) = e_{\alpha,(\mu);11}(\beta) + \gamma_{(\mu)} e_{\alpha,(\mu);22}(\beta), \omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta) =$$

$$= e_{\alpha,(\mu);21}(\beta) - \gamma_{(\mu)} e_{\alpha,(\mu);12}(\beta);$$

$$\gamma_{(\mu)}(\beta) = \cos\mu_1\pi sh 2\pi b_2(\cos\mu_2\pi + \cos\mu_1\pi ch 2\pi b_2)^{-1},$$

$$\omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) = [\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta)]^2, q_{\alpha,(\mu)} = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \frac{c_{21}}{S_{(\mu)}(b_2) shR_1}$$

$$S_{(\mu)}(b_2) = \frac{2^{\mu_1-\mu_2}\pi^3\gamma_{(\mu)}(\beta)(sh2\pi b_2)^{-1}}{\left|\Gamma(\frac{1}{2}+ib_2+\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2))\right|^2 \left|\Gamma(\frac{1}{2}+ib_2+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2))\right|^2};$$

$$f_{\alpha,(\mu),22}(\beta) = \omega_{\alpha,(\mu),1} e_{\alpha,(\mu),22} - \omega_{\alpha,(\mu),} e_{\alpha,(\mu),12};\quad f_{\alpha,(\mu),23}(\beta) =$$

$$= \omega_{\alpha,(\mu),1} e_{\alpha,(\mu),12} - \omega_{\alpha,(\mu),2} e_{\alpha,(\mu),22} \equiv$$

$$\equiv \gamma^{-1}_{(\mu)}(\omega_{\alpha,(\mu),1} e_{\alpha,(\mu),21} - \omega_{\alpha,(\mu),2} e_{\alpha,(\mu),11}).$$

Визначимо вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha-1} + \theta(r - R_1)\sigma_2 shr,$$

$$\sigma_1 = c_{11} shR_1 : c_{21} R_1^{2\alpha+1}, \sigma_2 = 1$$

та спектральну густину

$$\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta) = \beta[b_1(\beta)]^{-1}([\omega_{\alpha,(\mu);1}(\beta)]^2 + [\omega_{\alpha,(\mu);2}(\beta)]^2)^{-1}.$$

Згідно з роботою [4] запровадимо пряме $H_{\alpha,(\mu)}$ та обернене $H^{-1}_{\alpha,(\mu)}$ ГІП, породжене на множині I_1^+ ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$:

$$H_{\alpha,(\mu)}[g(r)]=\int_0^\infty g(r)\overline{V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)}\sigma(r)dr\equiv\overline{\tilde{g}(\beta)},\qquad(16)$$

$$H^{-1}_{\alpha,(\mu)}[\overline{\tilde{g}(\beta)}]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\overline{\tilde{g}(\beta)}V_{\alpha,(\mu)}(r,\beta)]\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta\equiv g(r),\qquad(17)$$

$$H_{\alpha,(\mu)}[M_{\alpha,(\mu)}[g(r)]]=-\beta^2\overline{\tilde{g}(\beta)}-(k_1^2\overline{\tilde{g}_1}+k_2^2\overline{\tilde{g}_2})+$$
$$+c_{21}^{-1}shR_1[\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu);12}(\beta)}\omega_{21}-\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu);22}(\beta)}\omega_{11}],\qquad(18)$$

$$\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu);m2}(\beta)}=(\alpha^1_{m2}\frac{d}{dr}+\beta^1_{m2})\overline{V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)}\Big|_{r=R_1},m=1,2.$$

Тут прийняті позначення:

$$\overline{\tilde{g}_1(\beta)}=\int_0^{R_1} g_1(r)\overline{V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)}\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr,\overline{\tilde{g}_2(\beta)}=\int_{R_1}^\infty g_2(r)\overline{V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)}\sigma_2 shrdr.$$

Запишемо систему (1) в матричній формі

$$\begin{bmatrix}(B^*_\alpha-q_1^2)u_1(r)\\(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2)u_2(r)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}g_1(r)\\g_2(r)\end{bmatrix}.\qquad(19)$$

Інтегральний оператор $H_{\alpha,(\mu)}$ згідно правила (16) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{\alpha,(\mu)}[...]=[\int_0^{R_1}...\overline{V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)}\sigma_1(r)r^{2\alpha-1}dr\int_{R_1}^\infty...\overline{V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)}\sigma_2(r)shrdr].\qquad(20)$$

Припустимо, що $\max\left\{q_1^2,q_2^2\right\}=q_1^2$. Покладемо всюди

$$k_1^2=0,k_2^2=q_1^2-q_2^2\ge 0\ (b_1=\beta,b_2=(\beta^2+q_1^2-q_2^2)^{1/2}).$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (20) до системи (19) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (18) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$(\beta^2+q_1^2)\overline{\tilde{u}(\beta)}=\overline{\tilde{g}(\beta)}+c_{21}^{-1}shR_1[\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu);12}(\beta)}\omega_{21}-\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu);22}(\beta)}\omega_{11}].$$

Звідси одержуємо функцію

$$\overline{\tilde{u}(\beta)}=\frac{\overline{\tilde{g}(\beta)}}{\beta^2+q_1^2}+\frac{shR_1}{c_{21}}\left[\frac{\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu);12}(\beta)}}{\beta^2+q_1^2}\omega_{21}-\frac{\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu);22}(\beta)}}{\beta^2+q_1^2}\omega_{11}\right].\qquad(21)$$

Інтегральний оператор $H^{-1}_{\alpha,(\mu)}$ згідно правила (17) як обернений до (20) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H^{-1}{}_{\alpha,(\mu)}[...]=\begin{bmatrix}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}[...V_{\alpha,(\mu);1}(r,\beta)]\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}[...V_{\alpha,(\mu);2}(r,\beta)]\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{22}$$

Застосувавши за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (22) до матриці-елемента $[\overline{\tilde{u}(\beta)}]$, де функція $\overline{\tilde{u}(\beta)}$ визначена формулою(21), маємо розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$\begin{gathered}u_j(r)=\int\limits_0^{R_1}(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty[\mathrm{Re}V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha,(\mu),1}(\rho,\beta)}]\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}d\beta)g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho+ \\ +\int\limits_{R_1}^\infty(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}[V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)\overline{V_{\alpha,(\mu),2}(\rho,\beta)}]\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}d\beta)g_2(\rho)\sigma_2 sh\rho d\rho+ \\ +\frac{shR_1}{c_{21}}[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}[\frac{\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu);12}(\beta)}}{\beta^2+q_1^2}V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)]\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)d\beta\omega_{21}- \\ -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}[\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu),22}(\beta)}V_{\alpha,(\mu),j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2}d\beta\omega_{11}],\ j=1,2.\end{gathered} \tag{23}$$

Порівнюючи розв'язки (11) та (23) внаслідок теореми єдиності, одержуємо формули обчислення невласних інтегралів:

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}[V_{\alpha,(\mu),j}(\beta)\overline{V_{\alpha,(\mu),_k}(\rho,\beta)}\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2})d\beta= \\ =\frac{1}{\sigma_k}H_{\alpha,(\mu);j,k}(r,\rho,q),\ j,k=1,2;\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}[\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu),12}(\beta)}V_{\alpha,(\mu);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2})d\beta= \\ =\frac{c_{21}}{shR_1}R^j_{\alpha,(\mu);21}(r,q),\ j=1,2;\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}[\overline{Z^1{}_{\alpha,(\mu),22}(\beta)}V_{\alpha,(\mu);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\alpha,(\mu)}(\beta)}{\beta^2+q_1^2})d\beta= \\ =-\frac{c_{21}}{shR_1}R^j_{\alpha,(\mu);11}(r,q),\ j=1,2.\end{gathered} \tag{26}$$

Функції впливу $H_{\alpha,(\mu),jk}(r,\rho,q)$ визначені рівностями (19), а функції Гріна умов спряження $R^{j}_{\alpha,(\mu);21}(r,q)$ визначені формулами (10).

Зауважимо, що при $\max\left\{q_1^2, q_2^2\right\} = q_2^2$ треба покласти $k_2^2 = 0$, $k_1^2 = q_2^2 - q_1^2 \geq 0$, тобто $b_1 = (\beta^2 + q_2^2 - q_1^2)^{\frac{1}{2}}, b_2 = \beta.$ У рівностях (23)—(26) замість $(\beta^2 + q_1^2)$ буде вираз $(\beta^2 + q_2^2)$.

Оскільки праві частини в рівностях (24)—(26) не залежать від нерівності $q_1^2 - q_2^2 \geq 0$ або нерівності $q_2^2 - q_1^2 \geq 0$, то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_0^2 > 0$, звужуючи при цьому сім'ю невласних інтегралів.

Висновком викладеного вище є таке твердження.

Теорема. Якщо вектор функція $f(r) = \left\{B^{*}{}_{\alpha}[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]\right\}$ неперервна на множині I_1^{+}, функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження (2) та виконується умова (8) однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3), то справджуються формули (24)—(26) обчислення невласних поліпараметричних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{\alpha,(\mu)}$, визначеного рівністю(12).

Список використаних джерел:

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
2. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
3. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера—Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
4. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.

The method of comparing solutions, built on the polar axis with a single point of interface for separate system of differential equations of Euler and Legendre functions by Cauchy and by the corresponding hybrid integral transformation, calculated polyparametric family improper integrals.

Key words: *improper integrals, functions, Cauchy principal solutions, hybrid integral transformation, the basic identity, unambiguous solvability condition, logic circuit.*

Отримано: 29.03.2012