УДК 517.19

Є. Ф. Царков*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
В. Ю. Береза,** канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Дорошенко,** канд. фіз.-мат. наук

* Ризький технічний університет, м. Рига, Латвія,
** Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ СТОХАСТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ

Стаття присвячена обговоренню розвитку теорії стійкості за Ляпуновим для динамічних систем з марковськими збуреннями. Розглядаються граничні теореми Скорохода для динамічних систем з марковськими збуреннями та аналізується стійкість за допомогою стохастичної усередненої процедури.

Ключові слова: *марковські збурення, динамічні системи, дифузійна апроксимація.*

Проблема асимптотичного аналізу динамічних систем з малими випадковими збуреннями досліджується в багатьох математичних та технічних роботах. Зокрема, А. В. Скороход був першим математиком, хто довів, що ймовірнісні граничні теореми можуть використовуватися для диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною. Підхід, запропонований у роботі [6], робить можливим використання асимптотичного аналізу дійсних стохастичних динамічних систем не тільки за допомогою усередненої процедури Крилова—Боголюбова, але і також за допомогою дифузійної апроксимації. Цей підхід застосовується для аналізу диференціальних рівнянь на скінченому часовому інтервалі. Процедури дифузійної апроксимації застосовуються в багатьох технічних роботах для аналізу стійкості за Ляпуновим, тобто для аналізу диференціальних рівнянь при $t \to \infty$. Для доведення цього факту використаємо не тільки граничні теореми у просторі Скорохода [6] спеціального типу, але і мартингальну техніку та другий метод Ляпунова, що розвинутий для стохастичних диференціальних рівнянь Іто в роботі [5], [8]—[10].

Динамічна система, з якою ми будемо працювати, має вигляд

$$\frac{dx^\varepsilon}{dt} = A\left(z^\varepsilon, y\left(t/\varepsilon^2\right)\right)x^\varepsilon + F\left(x^\varepsilon, z^\varepsilon, y\left(t/\varepsilon^2\right)\right), \tag{1}$$

$$\frac{dz^\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f_1\left(z^\varepsilon, y\left(t/\varepsilon^2\right)\right) + f_2\left(z^\varepsilon, y\left(t/\varepsilon^2\right)\right), \tag{2}$$

де $x^\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $z^\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, ε — малий додатний параметр, $y(t)$ — марковський процес. Диференціальні рівняння такого типу іноді виникають в асимптотичній теорії марковських динамічних систем після поділу на швидкі та повільні змінні [1].

Якщо $F(x,z,y)$, $f_1(z,y)$, $f_2(z,y)$ неперервно диференційовні по x та z, частинні похідні $D_x F(x,y)$, $D_z f_1(x,y)$, $D_z f_2(x,y)$ однорідні по $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ та обмежені по $y \in \mathbb{Y}$ матриці, тоді існує єдиний розв'язок для (1)—(2) з початковими умовами $x^{\varepsilon}(s) = x$, $z^{\varepsilon}(s) = z$. Цей розв'язок $\left\{x^{\varepsilon}(t), z^{\varepsilon}(s), t \ge s\right\}$ є сім'єю стохастичних процесів, що залежать від марковського процесу $\left\{y(t/\varepsilon^2), t \ge s\right\}$. Отже, ймовірнісні характеристики обох процесів для всіх $t \ge s$ визначаються з початкових умов та умови $y(s/\varepsilon^2) = y$ для марковського процесу.

Позначимо розв'язки для (1)—(2)

$$x^{\varepsilon}(t,s,x,z,y),\ z^{\varepsilon}(t,s,z,y).$$

В даній роботі будемо вивчати проблему стійкості диференціального рівняння (1), (2) при умові $F(0,z,y) \equiv 0$. Припустимо, що $y(t)$ — однорідний стохастично неперервний фелеровський марковський процес з перехідною ймовірністю $P(t,y,du)$, слабким інфінітезимальним оператором Q та єдиною інваріантною мірою μ, що задовольняє умову рівномірної ергодичності [2]. З цього припущення для $v \in C(\mathbb{Y})$, що задовольняє ортогональну умову

$$\int_{\mathbb{Y}} v(y)\mu(dy) = 0, \tag{3}$$

можемо визначити неперервну функцію з рівності $\Pi v(y) := \int_0^{\infty} v(u) \times$ $\times P(t,y,du)$ для кожного $y \in \mathbb{Y}$. Вище визначений оператор назвемо [3] потенціалом для марковського процесу. Продовжимо цей оператор на весь простір $C(\mathbb{Y})$, використовуючи рівність

$$\Pi v(y) := \int_0^{\infty} [v(u) - \overline{v}] P(t,y,du),$$

де $\overline{v} = \int_{\mathbb{Y}} v(y)\mu(dy).$

Відмітимо, що рівняння $Qf = -v$ має розв'язок тоді і тільки тоді, якщо [3] v задовольняє умову ортогональності (3) та цей розв'язок запишемо у вигляді $f = \Pi v$. Будемо вважати, що $A(z,y)$

неперервна і обмежена разом зі своїми двома похідними по z та функції $f_1(z,y)$, $f_2(z,y)$ неперервні за своїми аргументами та обмежені разом зі своїми двома похідними по z. Пара $\left\{z^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t)\right\}$ є однорідним фелеровським марковським процесом на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Y}$ зі слабким інфінітезимальним оператором $L(\varepsilon)$ [4], що визначається з рівності

$$(L(\varepsilon)v)(z,y) = \frac{1}{\varepsilon}(f_1(z,y),\nabla_z)v(z,y) + \frac{1}{\varepsilon^2}Qv(z,y),$$

де ∇_z градієнтний оператор в $\mathbb{R}^m$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$ та оператор Q діє на другий аргумент.

Відомо [6], що при виконані умови $\int\limits_{\mathbb{Y}} f_1(z,y)\mu(dy) \equiv 0$ та також деяких інших умов розв'язки (1)—(2) слабко збігаються при $\varepsilon \to 0$ до відповідних розв'язків рівнянь дифузійної апроксимації

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}(z)\bar{x} + \bar{F}(\bar{x},z), \tag{4}$$

$$dz = b(z)dt + \sigma(z)dw(t) \tag{5}$$

на довільному обмеженому інтервалі $t \in [0,T]$, де $w(t)$ — стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^m$,

$$\bar{A}(z) = \int\limits_{\mathbb{Y}} A(z,y)\mu(dy), \bar{F}(x,z) = \int\limits_{\mathbb{Y}} F(x,z,y)\mu(dy),$$

$$b(z) = \int\limits_{\mathbb{Y}} f_2(z,y)\mu(dy) + \int\limits_{\mathbb{Y}} [\Pi D_z f_1(z,y)] f_1(z,y)\mu(dy),$$

μ — єдина інваріантна міра марковського процесу $y(t)$, Π — його потенціал, та симетрична невід'ємно визначена матриця $\sigma(z)$, що визначається за формулою

$$\left|\sigma(z)h\right|^2 = 2\int\limits_{\mathbb{Y}} \left(f_1(z,y),h)(\Pi f_1(z,y),h \right) \mu(dy)$$

для довільного вектора $h \in \mathbb{R}^m$.

Буде доведено, що ця дифузійна апроксимація може бути визначена більш вдало для аналізу локальної стохастичної асимптотичної стійкості рівняння (1). При цих припущеннях можна аналізувати лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \bar{A}(z(t))x, \tag{6}$$

де $z(t)$ — розв'язок дифузійної апроксимації (5). Легко побачити, що пара $\{x(t),z(t)\}$ є однорідним фелеровським марковським процесом в просторі $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ зі слабким інфінітезимальним оператором $\overline{L}$, який визначений на достатньо гладких функціях $v(x,z)$ за формулою

$$\overline{L}v(x,z) = \left(\overline{A}(z)x, \nabla_x\right)v(x,z) + \left(b(z), \nabla_z\right)v(x,z) + \frac{1}{2}\left(\sigma^2(z)\nabla_z, \nabla_z\right)v(x,z),$$

де ∇_x та ∇_z — градієнтні оператори у відповідних просторах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $(.,.)$ — скалярний добуток дорівнює величині, що відповідає градієнтам. Уникаючи повного обчислення та форм позначень, будемо розглядати процес $z(t)$ як скаляр, тобто $m = 1$. Відмітимо, що ми припустили оцінку двох неперервних однорідних обмежених похідних аргументу z функції $f_j(z,y)$, $j = 1,2$. У відповідності до $b(z)$ та дифузії $\sigma(z)$ марковського процесу $z(t)$ маємо, що найменші дві неперервні однорідні похідні обмежені по z. Це твердження випливає з означення потенціалу та з можливості диференціювання по z під знаком інтеграла. Згідно визначення матриця $\overline{A}(z)$ також має дві неперервні однорідні обмежені похідні по z. Отже [5], марковський дифузійний процес $\{x(t), z(t)\}$ дозволяє диференціювання по початковим даним $z(0) = z$, а це дозволяє довести наступне твердження.

Теорема. Нехай виконані вказані вище умови. Якщо тривіальний розв'язок рівняння (6), що задовольняє (5), асимтотично стохастично стійкий, то тривіальний розв'язок рівняння (1) з коефіцієнтами, які задовольняють (2), експоненціально p-стійкий для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ і достатньо малому $\varepsilon_0 > 0$.

Доведення. Використовуючи результати [1], легко довести, що при виконанні умов цієї теореми лінійна апроксимація

$$\frac{d\widehat{x}^{\varepsilon}}{dt} = A\left(\widehat{z}^{\varepsilon}, y(t/\varepsilon^2)\widehat{x}_{\varepsilon}\right)$$

для (1) асимптотично стохастично стійка. При виконанні умов цієї теореми рівняння (6) експоненціально p-стійке для досить малого додатного p та можна використати функцію Ляпунова $v(x,z)$, що визначається з формули $v(x,z) = \int_0^T \mathbb{E}\,|\,\overline{x}(t,0,x,z)\,|^p\, dt$ з відповідним числом T, вибраним таким же шляхом як і в [1]. Нехай функції $v_1(x,z,y)$, $v_2(x,z,y)$ є розв'язками рівнянь

$$(Qv_1)(v,z,y) = -\left(f_1(z,y), \nabla_z v\right), \tag{7}$$

$$(Qv_2)(x,z,y) = -\left(\left(\left[A(z,y) - \overline{A}(z,y)\right]x, \nabla_x\right)v(x,z) + \right.$$

$$+\left(f_1(z,y),\nabla_z\right)v_1(x,z,y)\ -\int_{\mathbb{Y}}\Big(\left(f_1\left(z,y\right),\nabla_z\right)v_1(x,z,y)\mu(dy)+ \qquad (8)$$

$$+(f_2(z,y)-\overline{f}_2(z),\nabla_z)v(x,y)\Big),$$

де $\overline{f}_2(z)=\int_{\mathbb{Y}} f_2(z,y)\mu(dy).$

Права частина цих рівнянь дорівнює нулю після інтегрування за мірою $\mu(dy)$. Це означає, що розв'язки обох рівнянь існують. Згідно означення потенціалу можемо записати $v_1(x,z,y)=\left(\Pi f_1(z,y),\nabla_z v(x,z)\right)$. Оцінки цієї функції та її похідних по x та z можуть бути отримані після відповідної оцінювання скалярного добутку $\left(f_1(x,y),\nabla_z v(x,z)\right)$, помноженого на $\|\Pi\|$. Це випливає з можливості диференціювання розв'язків з початковими умовами і обчислення оператора Π. Отже, існує така стала R_1, що мають місце нерівності

$$\left|v_1(x,z,y)\right|\le R_1\,|\,x\,|^p,\ \left|\nabla_x v_1(x,z,y)\right|\le R_1\,|\,x\,|^{p-1},$$

$$\left|\nabla_z v_1(x,z,y)\right|\le R_1\,|\,x\,|^p,$$

$$\left\|D_x\nabla_x v_1(x,z,y)\right\|\le R_1\,|\,x\,|^{p-2},\ \left\|D_z\nabla_x v_1(x,z,y)\right\|\le R_1\,|\,x\,|^{p-1},$$

$$\left\|D_z\nabla_z v_1(x,z,y)\right\|\le \left\|D_z\nabla_z v_1(x,z,y)\right\|\le R_1\,|\,x\,|^p,$$

$$\left\|D_z D_x\nabla_z v_1(x,z,y)\right\|\le R_1\,|\,x\,|^{p-1},\ \left\|D_x^2\nabla_z v_1(x,z,y)\right\|\le R_1\,|\,x\,|^{p-2}\ .$$

Функція $v_2(x,z,y)$ може бути оцінена з правої частини.

Отже, використовуючи вище наведені нерівності, запишемо

$$\left\|\nabla_z v_2(x,z,y)\right\|\le R_2\,|\,x\,|^p,\ \left\|\nabla_x v_2(x,z,y)\right\|\le R_2\,|\,x\,|^{p-1}$$

для довільних $z\in\mathbb{R}^m$, $x\in\mathbb{R}^n$ та деякого $R_2>0$. Відмітимо, що $A(\varepsilon)$ слабкий інфінітезимальний оператор марковського процесу, що визначається з рівнянь (1)—(2) та процесу $y(t/\varepsilon^2)$ і обчислення його значення для функції

$$v^\varepsilon(x,z,y)=v(x,z)+\varepsilon v_1(x,z,y)+\varepsilon^2 v_2(x,z,y).$$

За означенням

$$\mathcal{A}(\varepsilon)v^\varepsilon(x,z,y)=\left(A(z,y)x,\nabla_x\right)v^\varepsilon(x,z,y)+L(\varepsilon)v^\varepsilon(x,z,y),$$

де $L(\varepsilon)$ визначається за формулою

$$L(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\left(f_1(z,y),\nabla_z\right)+\left(f_2(z,y),\nabla_z\right)+\frac{1}{\varepsilon^2}Q.$$

Отже

$$\mathcal{A}(\varepsilon)v^{\varepsilon}(x,z,y) = \frac{1}{\varepsilon}\Big\{Q_y v_1(x,z,y) + \big(f_1(x,y),\nabla_z\big)v(z,y)\Big\} +$$
$$+\Big\{\big(A(z,y)x,\nabla_x\big)v(x,z) + \big(f_1(z,y),\nabla_z\big)v_1(x,z,y) +$$
$$+\big(f_2(z,y),\nabla_z\big)v(x,z) + Q_y v_2(x,z,y)\Big\} + \varepsilon\Big\{\big(f_1(z,y),\nabla_z\big)v_2(x,z,y) +$$
$$+A(z,y)x,\nabla_x v_1(x,z,y) + \big(f_2(z,y),\nabla_z\big)v_1(x,z,y)\Big\} +$$
$$+\varepsilon^2\Big\{\big(A(z,y)x,\nabla_x\big)v_2(x,z,y) + f_2(z,y),\nabla_z)v_2(x,z,y))\Big\}.$$

Доданок в перших дужках правої частини цієї формули дорівнює нулю. Доданок в других дужках згідно конструкції дорівнює $(\bar{L}v)(x,z)$. Отже, після нашого припущення про асимптотичну стохастичну стійкість усередненої системи, він не перевищує $-c_3|x|^p$ з деякою сталою $c_3 > 0$. Наступні два доданки можуть бути оцінені з $r|x|^p$ для деякого $r > 0.$ Отже

$$\mathcal{A}(\varepsilon)v^{\varepsilon}(x,z,y) \le (-c_3 + \varepsilon r + \varepsilon^2 r)|x|^p . \tag{9}$$

Крім цього $\left|v_1(x,z,y)\right| \le \rho|x|^p, \left|v_2(x,z,y)\right| \le \rho|x|^p$ для деякого $\rho > 0.$ Ми отримали нерівності

$$\left(c_1 - \varepsilon\rho - \varepsilon^2\rho\right)|x|^p \le v^{\varepsilon}(x,z,y) \le \left(c_2 - \varepsilon\rho - \varepsilon^2\rho\right)|x|^p \tag{10}$$

для деяких $c_2 \ge c_1 > 0$. Експоненціальна p-стійкість тривіального розв'язку рівняння (6), так як і для рівняння (1), випливає з формул (9)—(10), які досягаються для довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0),$ якщо ε_0 достатньо мале.

Список використаних джерел:

1. Carkovs J. E. On Stochastic Stability of Markov Dinamical Systems / J. E. Carkovs, I. Vernigora, V. Yasinski // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2006. — Вип. 75. — С. 155–164.
2. Doob J. L. Stochastic Processes / J. L. Doob. — New York : John Willey& Sons, 1953.
3. Dynkin E. Markov Processes / E. Dynkin. — New York : Academic Press, 1995.
4. Hille E. Functional Analysis and Semigroups / E. Hille, R. Philips. — AMS Colloquium Publications. — 1957. — Vol. 34, Providence.
5. Khas'minski R. Stochastic Stability of Differential Equations / R. Khas'minski. — Norwell : Kluver Academic Pubs., 1980.
6. Skorokhod A. V. Asymptotic Methods of the Theory of Stochastic Differential Equations / A. V. Skorokhod. — AMS, Providence, RI, 1989.
7. Tsarkov Ye. F. Averaging and stability of cocycles under dynamical systems with rapid Markov switching.In Exploring Stochastic Laws / Ye. F. Tsarkov ; eds. A. V. Skorokhod, Yu.V. Borovskih. — VSP, 1995. — P. 469–479.

8. Ясинський В. К. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський, І. В. Юрченко. — Чернівці : Золоті литаври, 2011. — 738 с.
9. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси : в 3-х томах / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В.К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2009. — Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерний практикум. — 798 с.
10. Yasinski V. K. Existence of the l-th moment of a solution to a Stochastic Functional-Differential Equations with the Entire Prehistory / V. K. Yasinski, S. V. Antonyuk // Cybernetics and Systems Analysis. — 2008. — Vol. 44, № 4. — P. 582–590.

The article is devoted to discussion of the theory of stability by Lyapunov for dynamic systems with Markov perturbations. We consider the Skorokhod limit theorems for dynamical systems with Markov perturbations and stability analysis using stochastic averaged procedure.

Key words: *the Markov perturbations, dynamical systems, diffusion approximation.*

Отримано: 13.03.2012

УДК 519.21

Я. М. Чабанюк, д-р фіз.-мат. наук,
П. П. Горун, аспірант

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ЗБІЖНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Встановлено достатні умови збіжності динамічної системи в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації при умові експоненційної стійкості усередненого дифузійного процесу. Отримано оцінки залишкових членів розв'язку проблеми сингулярного збурення через властивості функції Ляпунова для усереднених систем.

Ключові слова: *стохастична оптимізація, марковський процес, дифузійна апроксимація.*

Вступ. Асимптотичний аналіз стохастичних систем розвивається загалом у двох напрямках: аналіз стохастичних систем в схемі серій (усереднення та дифузійна апроксимація) та дослідження систем на зростаючих інтервалах часу (проблема стійкості).

Проблема першого типу приводить до теорії усереднення, створеної Боголюбовим Н. Н. [1] та розвиненої Митропольським Ю. А. та Самойленком А. М. [2], Гіхманом І. І. [3; 4], Скороходом А. В. [5] та багатьма іншими.

