8. Ясинський В. К. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський, І. В. Юрченко. — Чернівці : Золоті литаври, 2011. — 738 с.
9. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси : в 3-х томах / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В.К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2009. — Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерний практикум. — 798 с.
10. Yasinski V. K. Existence of the l-th moment of a solution to a Stochastic Functional-Differential Equations with the Entire Prehistory / V. K. Yasinski, S. V. Antonyuk // Cybernetics and Systems Analysis. — 2008. — Vol. 44, № 4. — P. 582–590.

The article is devoted to discussion of the theory of stability by Lyapunov for dynamic systems with Markov perturbations. We consider the Skorokhod limit theorems for dynamical systems with Markov perturbations and stability analysis using stochastic averaged procedure.

Key words: *the Markov perturbations, dynamical systems, diffusion approximation.*

Отримано: 13.03.2012

УДК 519.21

Я. М. Чабанюк, д-р фіз.-мат. наук,
П. П. Горун, аспірант

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ЗБІЖНІСТЬ ДИСКРЕТНОЇ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Встановлено достатні умови збіжності динамічної системи в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації при умові експоненційної стійкості усередненого дифузійного процесу. Отримано оцінки залишкових членів розв'язку проблеми сингулярного збурення через властивості функції Ляпунова для усереднених систем.

Ключові слова: *стохастична оптимізація, марковський процес, дифузійна апроксимація.*

Вступ. Асимптотичний аналіз стохастичних систем розвивається загалом у двох напрямках: аналіз стохастичних систем в схемі серій (усереднення та дифузійна апроксимація) та дослідження систем на зростаючих інтервалах часу (проблема стійкості).

Проблема першого типу приводить до теорії усереднення, створеної Боголюбовим Н. Н. [1] та розвиненої Митропольським Ю. А. та Самойленком А. М. [2], Гіхманом І. І. [3; 4], Скороходом А. В. [5] та багатьма іншими.

Проблема другого типу приводить до теорії стійкості, відкритої Ляпуновим А. М. [6] для детермінованих систем, а також розвиненої Кушнером Г. Дж. [7], Красовським Н. Н. та Кацом Дж. Я. [8], Хасьмінським Р. З. [9; 10], Скороходом А. В. [11], Царковим Є. Ф. [12; 13], Королюком В. С. [14—16] та іншими для стохастичних систем.

Насправді, можна розглядати узагальнену проблему стійкості, досліджуючи стохастичні системи на зростаючих інтервалах часу за умов усереднення чи дифузійної апроксимації (див., наприклад [17—18, 21—22]).

Проблема стійкості вихідної стохастичної системи розглядається за умови стійкості усередненої системи.

Задача такого типу була вперше поставлена Боголюбовим Н. Н. для детерміністичних еволюційних систем. Успішні результати були отримані Самойленком А. М. [2]. Задача стійкості стохастичних систем за умов дифузійної апроксимації досліджувалася Бланкеншіпом Дж. Л. та Папаніколау Г. К. [19], а також Царковим Є. Ф. [12; 13] для систем із запізненнями. Узагальнена проблема стійкості динамічних систем зі швидкими марковськими перемиканнями була розвинута у працях Королюка В. С. [14—17]. Це дало можливість отримати достатні умови збіжності неперервної процедури стохастичної оптимізації [20] з марковськими перемиканнями [21—22]. Природно, що для достатньо малих значень параметра серій ε, стійкість усередненої системи забезпечує стійкість вихідної системи. Основний підхід полягає у використанні збуреної функції Ляпунова при знаходженні розв'язку проблеми сингулярного збурення для зведено-оборотного оператора.

Важливим також є те, що будь-який розв'язок проблеми сингулярного збурення можна використати при дослідженні узагальненої задачі збіжності в схемі усереднення, подвійного усереднення та дифузійної апроксимації.

1. Постановка задачі. Розглянемо деяку функцію регресії $C(u;x)$, $u \in R^d$, $x \in X$, яка задовольняє умові існування глобального розв'язку супроводжуючих систем [14; 15]

$$\frac{du_x(t)}{dt} = a(t) C^{\varepsilon}\left(u_x(t), x\right), \ x \in X, \tag{1}$$

в припущенні *єдиної* точки екстремуму u^* а її збурення має представлення:

$$C^{\varepsilon}(u,x) = \nabla_b C(u,x) + \varepsilon^{-1} C_0(u,x), \tag{2}$$

де

$$C_0(u,\cdot) = \left(C_{0i}(u,\cdot), \ i = \overline{1,d}\right).$$

Псевдоґрадієнт ∇_b визначається співвідношенням

$$\nabla_b C(u,\cdot) = \left(\frac{C(u_i^+,\cdot) - C(u_i^-,\cdot)}{2b(t)},\ i = \overline{1,d} \right), \tag{3}$$

$$u_i^{\pm} = u_i \pm b(t) e_i,\ e_i = \{0,...,1,0,...,0\},$$

де $b(t)$ — деяка нормуюча послідовність (див. далі).

Також припускається виконання умови балансу для збурюючої функції регресії:

$$\int_X \rho(dx) C_{0i}(u,x) \equiv 0,\ i = \overline{1,d} \tag{4}$$

де $\rho(B)$ — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ) $x_n, n \ge 0, B \subset \mathrm{X}$.

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації (ПСО) з марковськими перемиканнями в схемі серій задається співвідношенням $\left(\sum_{k=0}^{-1} a_k C^{\varepsilon}(u_k^{\varepsilon}, x_k^{\varepsilon}) = 0 \right)$ [22]:

$$u^{\varepsilon}(t) = u + \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{v(t/\varepsilon^2)-1} a_k C^{\varepsilon}(u_k^{\varepsilon}, x_k^{\varepsilon}),\ u^{\varepsilon}(0) = u, \tag{5}$$

де $u \in R^d$, а $v(t) = \max\{n : \tau_n \le t\}$ — рахуючий процес моментів відновлення $\tau_n, n \ge 0$ ВЛМ $x_n = x(\tau_n), n \ge 0$ у рівномірно ергодичний марковський процес $x(t)$ у вимірному просторі $(X, \mathbf{X})$ з генератором Q та потенціалом R_0 [16, Підрозділ 1.6].

В ПСО (5) нормуюча послідовність a_n^{ε} визначається значеннями керуючої функції $a(t), t \ge 0$:

$$a_n = a(\tau_n), n \ge 0.$$

В процедуру (5) вкладена дискретна процедура u_n^{ε}.

$$u_{n+1}^{\varepsilon} = u_n^{\varepsilon} + \varepsilon^2 a_n C^{\varepsilon}(u_n^{\varepsilon}, x_n^{\varepsilon});$$

$$u_n^{\varepsilon} = u(\tau_n^{\varepsilon}), x_n^{\varepsilon} = x(\tau_n^{\varepsilon}), \tau_n^{\varepsilon} = \tau_n / \varepsilon^2\ \ n \ge 0. \tag{6}$$

Усереднена ПСО в умовах балансу (4) визначається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du(t) = a(t) \nabla C(u(t)) dt + a^2(t) d\zeta(t), \tag{7}$$

де

$$d\zeta(t) = b\big(u(t)\big)dt + \sigma\big(u(t)\big)d\omega(t), \qquad (8)$$

є дифузійним процесом з коефіцієнтом зсуву $b\big(u(t)\big)$ та коваріаційною матрицею $\sigma\big(u(t)\big)$, $\omega(t)$ — вінерівський процес [23, т. 2, гл. III §8 г], а усереднена функція регресії задається виразом:

$$C(u) = q\int_X \rho(dx)C(u,x), \qquad (9)$$

∇ – градієнт по змінній u: $\nabla f(u,\cdot) = grad_u f(u,\cdot)$.

Коефіцієнти збурюючого дифузійного процесу $\zeta(t)$: зсув $b(u)$ та коваріаційна матриця $B(u)$ ($\sigma(u)\sigma^*(u) = B(u)$) задаються наступним чином:

$$b(u) = q\int_X \rho(dx)b(u,x), \qquad (10)$$

$$B(u) = q\int_X \rho(dx)B(u,x), \qquad (11)$$

де

$$b(u,x)V(u) = q(x)C_0(u,x)\big(R_0 q(x)\nabla C_0(u,x) - \nabla C_0(u,x)\big)\nabla V(u), \quad (12)$$

$$B(u,x)V(u) = q(x)C_0(u,x)\big(2R_0 q(x)C_0(u,x) - C_0(u,x)\big)\nabla^2 V(u), \quad (13)$$

Збіжність ПСО (5) розглядається в умовах експоненційної стійкості розв'язку $u(t)$ усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = \nabla C\big(u(t)\big). \qquad (14)$$

2. Умови збіжності ПСО. Для функцій $C(u,x)$, $C_0(u,x)$ введемо мажоранти:

$$\overline{C}(u) = \max_{x\in X}\big(|C(u,x)| + |C_0(u,x)|\big),$$

а також рекурентні співвідношення:

$$w_0(u) = \overline{C}(u)\nabla V(u);$$

$$w_i(u) = \overline{C}(u)\nabla w_{i-1}(u).$$

Перейдемо до формулювання умов збіжності ПСО (5) до точки рівноваги усередненої еволюційної системи (14).

Теорема. Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d)$ усередненої системи (14) така, що

С1: забезпечує експоненційну стійкість усередненої системи (14)

$$\nabla C(u)\nabla V(u) \le -k_0 V(u);$$

$$\left\| \nabla V(u) \right\| \le k_1 (1 + V(u))\ ;$$

C2: та мають місце оцінки

$$w_i(u) \le k_{i+2}(1 + V(u));\ i = \overline{0,\ 2}\ ;$$

C3: функції $a(t)$, $b(t)$ монотонно спадні, додатні та задовольняють умови:

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty,\ \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty,\ \sum_{t=0}^{\infty} a(t)b(t) < \infty\ ;$$

C4: а також $\nabla_b C(u)$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця:

$$\max_{u \in R^d} \left\| \nabla_b C(u) - \nabla C(u) \right\| \le k_5 b(t)\ ;$$

$$k_i > 0,\ i = \overline{0,\ 5}\ .$$

Тоді для довільного початкового значення $u^{\varepsilon}(0)$ при кожному додатному $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 — достатньо мале) ПСО (5) збігається з ймовірністю 1 до єдиної точки екстремуму усередненої еволюційної системи (14):

$$P\left\{ \lim_{t \to \infty} u^{\varepsilon}(t) = u^* \right\} = 1\ .$$

Перш, ніж перейти до доведення теореми, розглянемо двокомпонентний МП

$$u^{\varepsilon}(t),\ x_t^{\varepsilon} = x(t / \varepsilon^2)\ . \tag{15}$$

Лема 1. Генератор двокомпонентного марковського процесу (15) на банаховому просторі $B(X, \mathrm{X})$, $X \in R^d$ дійснозначних функцій $\varphi(u, \cdot) \in C^3(R^d)$ має асимптотичне представлення

$$\begin{gathered} L_t^{\varepsilon} \varphi(u,x) = \varepsilon^{-2} Q \varphi(u,x) + \varepsilon^{-1} a(t) Q_1(x) \varphi(u,x) + a(t) Q_{21}(x) \varphi(u,x) + \\ + a^2(t) Q_{22}(x) \varphi(u,x) + \varepsilon a^2(t) G_t^{\varepsilon}(x) \varphi(\alpha u, x),\ \alpha \in [0,\ 1] \end{gathered} \tag{16}$$

де

$$Q_1(x) \varphi(u,x) = C_0(u,x) Q_0 \nabla \varphi(u,x)\ , \tag{17}$$

$$Q_{21}(x) \varphi(u,x) = \nabla_b C(u,x) Q_0 \nabla \varphi(u,x)\ , \tag{18}$$

$$Q_{22}(x) \varphi(u,x) = \frac{1}{2} C_0^2(u,x) Q_0 \nabla^2 \varphi(u,x)\ , \tag{19}$$

$$G_t^{\varepsilon}(x) \varphi(u,x) = \left[G_1(x) + a(t) G_2(x) + \varepsilon G_3(x) \right] \varphi(u,x)\ , \tag{20}$$

$$G_1(x) \varphi(u,x) = \nabla_b C(u,x) C_0(u,x) Q_0 \nabla^2 \varphi(u,x)\ , \tag{21}$$

$$G_2(x) \varphi(u,x) = \frac{1}{6} C_0^3(u,x) Q_0 \nabla^3 \varphi(u,x)\ , \tag{22}$$

$$G_3(x) \varphi(u,x) = \frac{1}{2} \left(\nabla_b C(u,x) \right)^2 Q_0 \nabla^2 \varphi(u,x)\ , \tag{23}$$

$$Q_0\varphi(\cdot,x) = q(x)\mathbf{P}\varphi(\cdot,x)\,, \tag{24}$$

$$\mathrm{P}\varphi(\cdot,x) = \int_X P(x,dy)\varphi(\cdot,y)\,, \tag{25}$$

а залишковий член $G_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x)$ обмежений.

Доведення. Проведемо доведення леми у три етапи.

Етап I (Вигляд генератора). Генератор L_t^ε двокомпонентного МП (15) визначається співвідношенням [20, Глава 3. §5]

$$L_t^\varepsilon\varphi(u,x) = \\ = \lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}\left(\mathrm{E}\left[\varphi\left(u^\varepsilon\left(t+\Delta\right),x^\varepsilon\left(t+\Delta\right)\right)\middle|u^\varepsilon(t)=u,x^\varepsilon(t)=x\right]-\varphi(u,x)\right) \tag{26}$$

Обчислимо умовне математичне очікування:

$$\mathrm{E}\left[\varphi\left(u^\varepsilon\left(t+\Delta\right),x^\varepsilon\left(t+\Delta\right)\right)\middle|\,u^\varepsilon(t)=u,x^\varepsilon(t)=x\right]= \\ =\mathrm{E}_{u,x}\varphi\left(u^\varepsilon(t+\Delta),x^\varepsilon(t+\Delta)\right)\left[I\left(\theta_x\le\varepsilon^{-2}\Delta\right)+I\left(\theta_x>\varepsilon^{-2}\Delta\right)\right]. \tag{27}$$

Беручи до уваги те, що $I\left(\theta_x\le\varepsilon^{-2}\Delta\right)=\varepsilon^{-2}\Delta q(x)+O(\Delta^2)$, а $I\left(\theta_x>\varepsilon^{-2}\Delta\right)=1-\varepsilon^{-2}\Delta q(x)+O(\Delta^2)$, для (27) маємо

$$\mathrm{E}_{u,x}\varphi\left(u^\varepsilon(t+\Delta),x^\varepsilon(t+\Delta)\right)=\mathrm{E}_{u,x}\varphi\left(u^\varepsilon(t+\Delta),x^\varepsilon(t+\Delta)\right)\varepsilon^{-2}\Delta q(x)+ \\ +\varphi(u,x)\left(1-\varepsilon^{-2}\Delta q(x)\right)+O(\Delta^2). \tag{28}$$

Враховуючи, що $u^\varepsilon\left(t+\Delta\right)=u+\varepsilon^2 a(t)C^\varepsilon\left(u,x\right)$ та розклад (28), генератор (26) можна розписати так:

$$L_t^\varepsilon\varphi\left(u,x\right)=\varepsilon^{-2}q(x)\mathrm{E}_{u,x}\varphi\left(u+\varepsilon^2a(t)C^\varepsilon(u,x),y\right)-\varepsilon^{-2}q(x)\varphi(u,x)= \\ =\varepsilon^{-2}q(x)\int_X P(x,dy)\left[\varphi\left(u+\varepsilon^2a(t)C^\varepsilon(u,x),y\right)-\varphi(u,x)\right]= \\ =\varepsilon^{-2}Q\varphi(u,x)+\varepsilon^{-2}q(x)\int_X P(x,dy)\left[\varphi\left(u+\varepsilon^2a(t)C^\varepsilon(u,x),y\right)-\varphi(u,y)\right].$$

Остаточно:

$$L_t^\varepsilon\varphi(u,x)=\varepsilon^{-2}Q\varphi(u,x)+\varepsilon^{-2}C_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x)\,, \tag{29}$$

$$C_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x)=q(x)\int_X P(x,dy)\left[\varphi\left(u+\varepsilon^2a(t)C^\varepsilon(u,x),y\right)-\varphi(u,y)\right]. \tag{30}$$

Етап II (Вигляд генератора на дійснозначних функціях $\varphi(u,\cdot)\in C^3\left(R^d\right)$). Використовуючи гладкість функцій $\varphi(u,x)$ та вигляд збуреної функції регресії (2), підінтеґральну функцію з (30) розкладемо в ряд Тейлора:

$$\varphi\left(u+\varepsilon^{2}a(t)C^{\varepsilon}(u,x),y\right)=\varphi\left(u+\varepsilon^{2}a(t)\nabla_{b}C(u,x)+\varepsilon a(t)C_{0}(u,x),y\right)=$$
$$=\varphi\left(u+\varepsilon a(t)C_{0}(u,x),y\right)+\varepsilon^{2}a(t)\nabla_{b}C(u,x)\nabla\varphi\left(u+\varepsilon a(t)C_{0}(u,x),y\right)+ \quad (31)$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{4}a^{2}(t)\left(\nabla_{b}C(u,x)\right)^{2}\nabla^{2}\varphi(\alpha u,y).$$

Для першого доданку в (31) маємо

$$\varphi\left(u+\varepsilon a(t)C_{0}(u,x),y\right)=\varphi(u,y)+\varepsilon a(t)C_{0}(u,x)\nabla\varphi(u,y)+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{2}a^{2}(t)C_{0}^{2}(u,x)\nabla^{2}\varphi(u,y)+\frac{1}{6}\varepsilon^{3}a^{3}(t)C_{0}^{3}(u,x)\nabla^{3}\varphi(\alpha u,y).$$

Тепер розклад (31) матиме вигляд:

$$\varphi\left(u+\varepsilon^{2}a(t)C^{\varepsilon}(u,x),y\right)=\varphi(u,y)+\varepsilon a(t)C_{0}(u,x)\nabla\varphi(u,y)+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{2}a^{2}(t)C_{0}^{2}(u,x)\nabla^{2}\varphi(u,y)+\frac{1}{6}\varepsilon^{3}a^{3}(t)C_{0}^{3}(u,x)\nabla^{3}\varphi(\alpha u,y)+$$
$$+\varepsilon^{2}a(t)\nabla_{b}C(u,x)\left(\nabla\varphi(u,y)+\varepsilon a(t)C_{0}(u,x)\nabla^{2}\varphi(\alpha u,y)\right)+ \quad (32)$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{4}a^{2}(t)\left(\nabla_{b}C(u,x)\right)^{2}\nabla^{2}\varphi(\alpha u,y).$$

Підставимо (32) в (30):

$$C_{t}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x)=\varepsilon a(t)C_{0}(u,x)\left[q(x)\mathrm{P}\nabla\varphi(u,x)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{2}a^{2}(t)C_{0}^{2}(u,x)\left[q(x)\mathrm{P}\nabla^{2}\varphi(u,x)\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\varepsilon^{3}a^{3}(t)C_{0}^{3}(u,x)\left[q(x)\mathrm{P}\nabla^{3}\varphi(\alpha u,x)\right]+ \quad (33)$$
$$+\varepsilon^{2}a(t)\nabla_{b}C(u,x)\left[q(x)\mathrm{P}\nabla\varphi(u,x)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{4}a^{2}(t)\left(\nabla_{b}C(u,x)\right)^{2}\left[q(x)\mathrm{P}\nabla^{2}\varphi(\alpha u,x)\right].$$

Використовуючи розклад (33), генератор (29) запишемо у вигляді:

$$L_{t}^{\varepsilon}\varphi\left(u,x\right)=\varepsilon^{-2}Q\phi(u,x)+\varepsilon^{-1}a(t)C_{0}(u,x)Q_{0}(x)\nabla\phi(u,x)+$$
$$+\frac{1}{2}a^{2}(t)C_{0}^{2}(u,x)Q_{0}(x)\nabla^{2}\varphi(u,x)+\frac{1}{6}\varepsilon a^{3}(t)C_{0}^{3}(u,x)Q_{0}(x)\nabla^{3}\varphi(\alpha u,x)+$$
$$+a(t)\nabla_{b}C(u,x)Q_{0}(x)\nabla\varphi(u,x)+\varepsilon a^{2}(t)\nabla_{b}C(u,x)C_{0}(u,x)Q_{0}(x)\nabla^{2}\varphi(\alpha u,x)+$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{2}a^{2}(t)\left(\nabla_{b}C(u,x)\right)^{2}Q_{0}(x)\nabla^{2}\varphi(\alpha u,x),$$

або в позначеннях (17)—(25) маємо (16).

Зауваження. У випадку, коли $\varphi = \varphi(u)$, представлення (17)—(19) матимуть вигляд:

$$Q_1(x)\varphi(u) = q(x)C_0(u,x)\nabla\varphi(u)\,, \tag{34}$$

$$Q_{21}(x)\varphi(u) = q(x)\nabla_b C(u,x)\nabla\varphi(u)\,, \tag{35}$$

$$Q_{22}(x)\varphi(u) = \frac{1}{2}q(x)C_0^2(u,x)\nabla^2\varphi(u)\,. \tag{36}$$

Етап III (Обмеженість залишкового члена). Обмеженість залишкового члена $G_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x)$ в (16) випливає з представлень (20)—(23), умови С2 теореми 1 і гладкості функцій $\varphi(u,x)$:

$$\left\|G_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x)\right\| \le k\left(1+\varphi(u,x)\right), k>0\,, \tag{37}$$

тобто

$$\varepsilon a^2(t)\left\|G_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x)\right\| \to 0, \varepsilon \to 0\,.$$

Розв'яжемо проблему сингулярного збурення (ПСЗ) для оператора L_t^ε на збуреній функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u,x) = V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x) + \varepsilon^2 a(t)V_2(u,x)\,, \tag{38}$$

де $V(u)$ — функція Ляпунова для усередненої системи (14).

Лема 2. Генератор L_t^ε на збуреній функції Ляпунова $V^\varepsilon(u,x)$ такій, що $V(u) \in C^4(R^d)$, має асимптотичне представлення

$$L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)\nabla_b C(u)\nabla V(u) + a^2(t)L_0 V\left(u\right) + \varepsilon a^2\left(t\right)H_t^\varepsilon\left(x\right)V\left(u\right), \tag{39}$$

де

$$L_0 V\left(u\right) = b\left(u\right)V\left(u\right) + \frac{1}{2}B\left(u\right)V\left(u\right), \tag{40}$$

а залишковий член $H_t^\varepsilon\left(x\right)V\left(u\right)$ обмежений.

Доведення. Проведемо доведення леми у два етапи.

Етап I. Розв'яжемо ПСЗ тільки для зрізаного до L_t^ε оператора, а саме:

$$L_{t0}^\varepsilon = \varepsilon^{-2}Q + \varepsilon^{-1}a\left(t\right)Q_1\left(x\right) + a\left(t\right)Q_{21}\left(x\right) + a^2\left(t\right)Q_{22}\left(x\right), \tag{41}$$

оскільки залишковий член в (16) не впливає на розв'язок ПСЗ (див. [14, Глава 3.1] або [16]).

Розклад оператора L_{t0}^ε на функціях $V^\varepsilon\left(u,x\right)$ має вигляд

$$L_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon\left(u,x\right) = \varepsilon^{-2}QV\left(u\right) + \varepsilon^{-1}\left[a\left(t\right)QV_1\left(u,x\right) + a\left(t\right)Q_1\left(x\right)V\left(u\right)\right] +$$

$$+\left[a(t)Q_{21}(x)V(u)+a^{2}(t)Q_{22}(x)V(u)+\right. \quad (42)$$

$$\left.a^{2}(t)Q_{1}(x)V_{1}(u,x)+a(t)QV_{2}(u,x)\right]+\varepsilon a^{2}(t)\theta_{t0}^{\varepsilon}(x)V(u),$$

$$\theta_{to}^{\varepsilon}(x)V(u)=Q_{1}(x)V_{2}(u,x)+$$
$$+\left[Q_{21}(x)+a(t)Q_{22}(x)\right]V_{1}(u,x)+\varepsilon\left[Q_{21}(x)+a(t)Q_{22}(x)\right]V_{2}(u,x) \quad (43)$$

Умови розв'язності (див. наприклад, [14, Підрозділ 3.1 або 15]) розкладу (42) мають наступний вигляд:

$$QV(u)=0\,, \quad (44)$$

$$QV_{1}(u,x)+Q_{1}(x)V(u)\,, \quad (45)$$

$$L_{t}V(u)=a(t)Q_{21}(x)V(u)+a^{2}(t)Q_{22}(x)V(u)+$$
$$+a^{2}(t)Q_{1}(x)V_{1}(u,x)+a(t)QV_{2}(u,x). \quad (46)$$

Оскільки $V(u)$ належить простору N_{Q} нулів оператора Q, то умова (44) виконується. Враховуючи умову балансу (4) та представлення (34), подіємо потенціалом R_{0} на обидві частини рівняння (45):

$$R_{0}QV_{1}(u,x)=-R_{0}Q_{1}(x)V(u)\,.$$

Через те, що $R_{0}Q=\Pi-I$, а також $\Pi V_{1}(u,x)=0$, отримуємо розв'язок рівняння (45) для $V_{1}(u,x)$:

$$V_{1}(u,x)=R_{0}q(x)C_{0}(u,x)\nabla V(u)\,. \quad (47)$$

Перепишемо (46):

$$a(t)QV_{2}(u,x)+L_{t}(x)V(u)=L_{t}V(u)\,, \quad (48)$$

де

$$L_{t}(x)V(u)=a^{2}(t)Q_{1}(x)V_{1}(u,x)+$$
$$+a(t)Q_{21}(x)V(u)+a^{2}(t)Q_{22}(x)V(u). \quad (49)$$

Подіємо на обидві частини рівняння (48) потенціалом R_{0}:

$$V_{2}(u,x)=\frac{1}{a(t)}R_{0}\tilde{L}_{t}(x)V(u)\,, \quad (50)$$

$$\tilde{L}_{t}(x)=L_{t}(x)-L_{t}\,. \quad (51)$$

Для обчислення першого доданку $a^{2}(t)Q_{1}(x)V_{1}(u,x)$ в (49) використаємо (17) та (47):

$$a^{2}(t)Q_{1}(x)V_{1}(u,x)=a^{2}(t)C_{0}(u,x)\nabla\left(\left[q(x)\mathrm{P}R_{0}\right]q(x)C_{0}(u,x)\nabla V(u)\right).$$

Оскільки $q(x)\mathrm{P}R_{0}=q(x)R_{0}+\Pi-I$, останню рівність можна переписати:

$$a^2(t)Q_1(x)V_1(u,x)=$$
$$=a^2(t)C_0(u,x)\nabla\Big(\big[q(x)R_0+\Pi-I\big]q(x)C_0(u,x)\nabla V(u)\Big).$$

Згідно з умовою балансу (4) остаточно маємо:

$$a^2(t)Q_1(x)V_1(u,x)=$$
$$=a^2(t)\Big[C_0(u,x)q(x)R_0q(x)\nabla\big(C_0(u,x)\nabla V(u)\big)- \tag{52}$$
$$-q(x)C_0(u,x)\nabla\big(C_0(u,x)\nabla V(u)\big)\Big].$$

Обчислимо тепер другий доданок в (49), враховуючи (35):

$$a(t)Q_{21}(x)V(u)=a(t)q(x)\nabla_b C(u,x)\nabla V(u). \tag{53}$$

Аналогічно, враховуючи (36), обчислимо третій доданок:

$$a^2(t)Q_{22}(x)V(u)=\frac{1}{2}a^2(t)q(x)C_0^2(u,x)\nabla^2 V(u). \tag{54}$$

Підставимо тепер (52)—(54) в (49):

$$L_t(x)V(u)=a(t)q(x)\nabla_b C(u,x)\nabla V(u)+a^2(t)L_0(x)V(u), \tag{55}$$

де

$$L_0(x)V(u)=$$
$$=\left[C_0(u,x)q(x)R_0q(x)C_0(u,x)-\frac{1}{2}q(x)C_0^2(u,x)\right]\nabla^2 V(u) \tag{56}$$

Усереднення оператора $L_t(x)$ по стаціонарному розподілу $\pi(dx)$ (див. теорему про усереднення в [14] або [18]) дає наступний вигляд генератора ($L_t=\Pi L_t(x)\Pi$):

$$L_tV(u)=a(t)\Pi q(x)\nabla_b C(u,x)\Pi\nabla V(u)+a^2(t)\Pi L_0(x)\Pi V(u). \tag{57}$$

Обчислимо перший доданок в правій частині (57), беручи до уваги (9):

$$\Pi q(x)\nabla_b C(u,x)\Pi\nabla V(u)=$$
$$=q\int_X \rho(dx)\nabla_b C(u,x)\nabla V(u)=\nabla_b C(u)\nabla V(u).$$

А тепер знайдемо другий доданок та представимо його у формі:

$$\Pi L_0(x)\Pi V(u)=\Pi C_0(u,x)q(x)R_0q(x)\nabla C_0(u,x)\nabla V(u)-$$
$$-\Pi q(x)C_0(u,x)\nabla C_0(u,x)\nabla V(u)+$$
$$+\Pi C_0(u,x)q(x)R_0q(x)C_0(u,x)\nabla^2 V(u)-$$
$$-\frac{1}{2}\Pi q(x)C_0^2(u,x)\nabla^2 V(u)=b(u)V(u)+\frac{1}{2}B(u)V(u),$$

де $b(u)$ та $B(u)$ мають представлення (10), (11) в позначеннях (12), (13).

З останніх двох рівнянь для (57) матимемо:

$$L_t V(u) = a(t) \nabla_b C(u) \nabla V(u) + a^2(t) L_0 V(u), \tag{58}$$

де $L_0 V(u)$ має представлення (40).

Тепер можна використати (58) для знаходження розв'язку $V_2(u,x)$ в рівнянні (50). Перед цим знайдемо центрований генератор $\tilde{L}_t(x)$, використовуючи (55), (56) та (58):

$$\tilde{L}_t(x) V(u) = a(t) q(x) \nabla_b C(u,x) \nabla V(u) + a^2(t) L_0(x) V(u) -$$
$$-a(t) \nabla_b C(u) \nabla V(u) - a^2(t) L_0 V(u) =$$
$$= a(t) \nabla_b \tilde{C}(u,x) V(u) + a^2(t) \tilde{L}_0(x) V(u),$$

де

$$\nabla_b \tilde{C}(u,x) V(u) = q(x) \left(\nabla_b C(u,x) - \nabla_b C(u) \right) \nabla V(u),$$
$$\tilde{L}_0(x) V(u) = \left(L_0(x) - L_0 \right) V(u).$$

Остаточно $V_2(u,x)$ з (50) визначається співвідношенням:

$$V_2(u,x) = R_0 \left[\nabla_b \tilde{C}(u,x) + a(t) \tilde{L}_0(x) \right] V(u). \tag{59}$$

Зауваження. Як видно з представлень (47) та (59), збурення функції Ляпунова $V(u)$ виражаються через її першу та другу похідні.

Тепер, маючи $V_1(u,x)$ та $V_2(u,x)$, проведемо аналіз залишкового члена (43).

Перший доданок з (43) знаходиться за допомогою (17) та (59):

$$Q_1(x) V_2(u,x) = \theta_1(x) V(u), \tag{60}$$

$$\theta_1(x) V(u) = C_0(u,x) Q_0(x) R_0 \left[\nabla_b \tilde{C}(u,x) + a(t) \tilde{L}_0(x) \right] \nabla V(u).$$

Далі, другий доданок з (43) знаходиться за допомогою (18), (19) та (47):

$$\left[Q_{21}(x) + a(t) Q_{22}(x) \right] V_1(u,x) = \left[\theta_2(x) + a(t) \theta_3(x) \right] V(u), \tag{61}$$

$$\theta_2(x) V(u) = \nabla_b C(u,x) Q_0(x) R_0 q(x) C_0(u,x) \nabla^2 V(u),$$

$$\theta_3(x) V(u) = \frac{1}{2} C_0^2(u,x) Q_0(x) R_0 q(x) C_0(u,x) \nabla^3 V(u).$$

Аналогічно визначається третій доданок:

$$\varepsilon \left[Q_{21}(x) + a(t) Q_{22}(x) \right] V_2(u,x) = \varepsilon \left[\theta_4(x) + a(t) \theta_5(x) \right] V(u), \tag{62}$$

$$\theta_4(x) V(u) = \nabla_b C(u,x) Q_0(x) R_0 \left(\nabla_b \tilde{C}(u,x) + a(t) \tilde{L}_0(x) \right) \nabla V(u),$$

$$\theta_5(x)V(u)=\frac{1}{2}C_0^2(u,x)Q_0(x)R_0\left(\nabla_b\tilde{C}(u,x)+a(t)\tilde{L}_0(x)\right)\nabla V(u). \quad (63)$$

Приймаючи до уваги (60)—(62), залишковий член в (43) запишемо так:

$$\theta_{t0}^{\varepsilon}(x)V(u)=H_t^{\varepsilon}(x)V(u), \quad (64)$$

де

$$H_t^{\varepsilon}(x)V(u)=$$
$$=\left[\theta_1(x)+\left(\theta_2(x)+a(t)\theta_3(x)\right)+\varepsilon\left(\theta_4(x)+a(t)\theta_5(x)\right)\right]V(u). \quad (65)$$

Остаточно з (41), (46), (58) та (64) маємо асимптотичне представлення зрізаного оператора:

$$L_{t0}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x)=a(t)\nabla_b C(u)\nabla V(u)+a^2(t)L_0V(u)+\varepsilon a^2(t)H_t^{\varepsilon}(x)V(u). \quad (66)$$

Етап II.

З гладкості функцій $C(u,x)$, $V(u)$, умови С2 теореми 1, обмеженості операторів R_0 і Q_0, а також представлень залишкових членів (20) та (65) отримуємо обмеження останнього доданку в (66). Тому для залишкового члена $H_t^{\varepsilon}(x)V(u)$ маємо оцінку:

$$\left\|H_t^{\varepsilon}(x)V(u)\right\|\le k\left(1+V(u)\right),\ k>0,\ x\in X, \quad (67)$$

тобто

$$\varepsilon a^2(t)\left\|H_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x)\right\|\to 0,\ \varepsilon\to 0,$$

що й доводить лему.

Доведення теореми 1 проведемо в декілька етапів. Спочатку встановимо ключову нерівність.

Лема 3. Генератор L_t^{ε} на збуреній функції Ляпунова (38) в умовах теореми 1 допускає оцінку

$$L_t^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x)\le g(t)\left(1+V(u)\right)-\alpha(t)V(u), \quad (68)$$

де

$$\alpha(t)>0,\ g(t)>0,$$
$$\sum_{t=0}^{\infty}\alpha(t)=\infty,\ \sum_{t=0}^{\infty}g(t)<\infty.$$

Доведення. Використовуючи умову С1 теореми 1 експоненційної стійкості системи (14), оцінки С2 (там же) для доданків в операторі (40) та залишкового члена $H_t^{\varepsilon}(x)V(u)$ (67), монотонність та обмеженість функцій $a(t)$, $b(t)$ (умова С3), а також умову Ліпшиця (умова С4), маємо:

$$L_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x) = a(t)\nabla_b C(u)\nabla V(u) + \varepsilon a^2(t) H_t^{\varepsilon}(x) V(u) +$$
$$+a^2(t)\Big[\big(C_0(u,x)q(x)R_0 q(x)\nabla C_0(u,x) - C_0(u,x)q(x)\nabla C_0(u,x)\big)\nabla V(u) +$$
$$+\left(C_0(u,x)q(x)R_0 q(x)C_0(u,x) - \frac{1}{2}q(x)C_0^2(u,x)\right)\nabla^2 V(u)\Big] \le$$
$$\le \left(k_0 k_1 a(t)b(t) + \varepsilon k_2 a^2(t) + k_3\right)\left(1 + V(u)\right) - k_4 a(t) V(u) \le$$
$$\le g(t)\left(1+V(u)\right) - \alpha(t)V(u),\ k_i > 0,\ i = \overline{0,4}.$$

По-друге, дамо оцінку збуреній функції Ляпунова. Для цього використаємо явний вигляд збурень (47), (59), а також умову C2 теореми 1:
$$-c_0\left(1+V(u)\right) - c_1 V(u) \le V_1(u,x) \le c_0\left(1+V(u)\right) + c_1 V(u)\,.$$

Остаточно маємо:
$$0 < -\varepsilon a(t)\delta\left(1+V(u)\right) + V(u) < V^{\varepsilon}(u,x) < \varepsilon a(t)\delta\left(1+V(u)\right) + V(u), \quad (69)$$
для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$ [1].

По-третє, процес
$$V_n^{\varepsilon} = V^{\varepsilon}\left(u_n^{\varepsilon}, x_n^{\varepsilon}\right),\ n \ge 0\,,$$
є невід'ємним супермартингалом (схема доведення аналогічна доведенню леми 2 в роботі [24].

Оскільки виконані умови модельної граничної теореми Королюка [15, Підрозділ 3.2, с. 51] та теореми Невельсона—Хасьмінського [20, Глава 2, теорема 7.1], має місце слабка збіжність процесів
$$u^{\varepsilon}(t) \Rightarrow u(t),\ \varepsilon \to 0.$$

Використання вищезгаданої теореми Невельсона—Хасьмінського, оцінок (68) та (69), а також леми 2 (див. [24]) завершує доведення теореми.

Висновки. Встановлено достатні умови збіжності дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації в марковському середовищі через властивості функції Ляпунова для усереднених систем. Доведено, що при їх виконанні для довільного початкового значення $u^{\varepsilon}(0)$ описана процедура стохастичної оптимізації збігається з ймовірністю 1 до єдиної точки екстремуму u^* усередненої еволюційної системи.

Отримано оцінки залишкових членів розв'язку проблеми сингулярного збурення через функції Ляпунова $V(u)$ для усереднених сис-

[1] Легко перевірити, що $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{a(t)\delta}\dfrac{V(u)}{1+V(u)}$.

тем. Ці оцінки випливають з умов гладкості функцій регресії та функції Ляпунова $V(u)$.

Отримані результати використовуються для подальших досліджень асимптотичної нормальності стрибкової процедури стохастичної оптимізації, а також поведінки системи на зростаючих інтервалах часу.

Список використаних джерел:

1. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике / Н. Н. Боголюбов. — К. : Изд-во АН УССР, 1945. — 137 с.
2. Митропольский Ю. А. Математические проблемы нелинейной механики / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко. — К. : Инст. мат., 1987. — 72 с.
3. Гихман И. И. Дифференциальные уравнения со случайными функциями. — В кн.: Зимняя.школа по теории вероятностей и математической статистике / И. И. Гихман. — К. : Наук. думка, 1964. — С. 41–85.
4. Гихман И. И. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. — В кн.: Предельные теоремы и статистические выводы / И. И. Гихман. — Ташкент : ФАН, 1966. — С. 14–45.
5. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1987. — 328 с.
6. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М. : Гостехиздат, 1950. — 320 с.
7. Kushner H. J. Approximation and weak convergence methods for random processes with Applications to Stochastic Systems Theory / H. J. Kushner. — Cambridge : MIT Press, 1984. — 252 p.
8. Кац И. Я. Об устойчивости систем со случайными параметрами / И. Я. Кац, Н. Н. Красовский // Прикладн. матем. и механ. — 1960. — С. 809–823.
9. Khasminskii R. Z. A limit theorems for solutions with random right hand side / R. Z. Khasminskii // Theor. Prob. Appl. — 1966. — P. 390–406.
10. Khasminskii R. Z. Stochastic stability of differential equations / R. Z. Khasminskii. – Sijthoff and Noordhoff, 1980. — 364 p.
11. Skorohod A. V. Dynamical systems under rapid random disturbances / A. V. Skorohod // Ukr. Math. Zh. — 1991. — T. 43, №1. — P. 3–21.
12. Tsarkov E. F. Average and stability of linear equations with small diffusion coefficients / E. F. Tsarkov // Proc. VI USSR-Jap. Symp. — 1992. — P. 390–396.
13. Tsarkov E. F. On stability of solutions of linear differential equations with Markov coefficients / E. F. Tsarkov // Dokl. Acad. Nauk. Ukraine. — 1987. — №2. — P. 34–37.
14. Королюк В.С. Стохастичні моделі систем / В. С. Королюк. – К. : Либідь, 1993. — 136 с.
15. Korolyuk V. S. Stochastic Models of Systems / V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk. — London : Kluwer acad. pub., 1999. — 185 p.
16. Korolyuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Korolyuk, N. Limnios. – World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.
17. Королюк В. С. Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації / В. С. Королюк // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, № 1. — С. 36–47.

18. Korolyuk V. S. Evolution of systems in random media / V. S. Korolyuk, A. V. Swishchuk. — CRC Press, 1995. — 352 p.
19. Blankenship G. L. Stability and control of stochastic systems with wide band noise disturbances, I / G. L. Blankenship, G. C. Papanicolau // SIAM J. Appl. Math. — 1978. — T. 34. — P. 437–476.
20. Невельсон М. Б. Стохастическая апроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский ; за ред. Б. Я. Левита. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
21. Чабанюк Я. М. Неперервна процедура Кіфера-Вольфовиця в Марковському середовищі / Я. М. Чабанюк // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикл. матем. — Львів, 2000. — №411. — С. 440–445.
22. Горун П. П. Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / П. П. Горун, Я. М. Чабанюк, В. Р. Кукурба // XVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties": PDMU-2010, October 4-8, 2010. — К. : Освіта України, 2010. — С. 54.
23. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение : в 2-х т. / В. Феллер ; за ред. А. А. Бряндинской. — М. : Мир, 1967. — Т. 1. — 527 с.
24. Чабанюк Я. М. Неперервна процедура стохастичної апроксимації у напівмарковському середовищі / Я. М. Чабанюк // Укр. матем. журн., 2004. — № 5. — С. 713–720.

It was obtained sufficient conditions of convergence of dynamic systems in diffusion approximation scheme with Markow switchings under the condition of exponential stability of the averaged diffusion process. By using properties of Lyapunov functions it also was optained estimations for the remainder terms of the solution of singular perturbation problem.

Key words: *stochastic optimization, Markov process, diffusion approximation.*

Отримано: 15.03.2012