УДК 519.6

І. В. Бейко, д-р техн. наук, професор,
О. В. Щирба, аспірант

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

МЕТОДИ ВНУТРІШНЬОЇ ТОЧКИ В ОПТИМІЗАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ ПРОЦЕСІВ

У статті побудовано числові методи оптимізації керованих процесів, які описуються системами алгебраїчних, диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Ключові слова: *оптимізаційні крайові задачі, методи оптимізації, ньютонівські методи внутрішньої точки у функціональному просторі.*

Вступ. Новітні математично-комп'ютерні технології наукових досліджень збагатилися потужними методами і алгоритмами системного аналізу та оптимізації складних взаємопов'язаних реальних процесів і систем в умовах неповних знань і неповних даних. Досягнуто подальших удосконалень математично-комп'ютерних алгоритмів оптимізації різнорідних систем і процесів в умовах неповних даних із використанням методів системного аналізу [1—4], градієнтних методів [2—4], методів недиференційовної оптимізації [5—7], методів стохастичних градієнтів [7], прискорених ньютонівських методів внутрішньої точки [8—10] та методів розв'язуючих і асимптотично-розв'язуючих операторів, орієнтованих зокрема і для оптимізації великомасштабних ієрархічно-керованих граф-операторних моделей та стратегій керування в умовах неповних даних і неповних знань [11—17]. У цій статті досліджуються можливості використання швидкозбіжних методів внутрішньої точки для розв'язування узагальнених оптимізаційних крайових задач у нескінченновимірних функціональних просторах, де важливе для методів внутрішньої точки поняття логарифмічної бар'єрної функції втрачає зміст [18], проте поняття центральної траєкторії та числовий метод внутрішньої точки вдалося реалізувати у функціональному просторі нескінченої розмірності завдяки використанню адаптивної багаторівневої апроксимації елементів нескінченновимірних функціональних просторів скінченновимірними багатосітковими наближеннями з адаптивним вибором кроків вздовж центральної траєкторії [19—23]. Сформульовані узагальнені нескінченновимірні оптимізаційні крайові задачі описуються керованими граф-операторними системами із підсистемами алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь та нерівностей. До таких оптимізаційних задач зводяться прикладні задачі оптимального керування різнорідними взаємодіючими техніко-технологічними процесами із зосередженими та розподіленими параметрами. Труднощі практичного розв'язання узагальнених оптимізаційних задач можуть бути пов'язані як із відсутністю розв'язку у заданій множині допустимих керувань так і з неповнотою даних та надмірною складністю моделей взаємодіючих підсистем.

Узагальнені розв'язки оптимізаційних крайових задач

Відомо, що у випадку неопуклої множини

$$\overline{f}\left(x,\Omega,t\right)\triangleq\left\{v\mid v=f\left(x,u,t\right),\ u\in\Omega\right\}$$

оптимального керування $u:[t_0,T]\to\Omega\subset R^r$, яке мінімізує функціонал $J(x)=\int\limits_{t_0}^{T}h(x(t),t)dt$ на множині допустимих траєкторій $x:[t_0,T]\to R^n$ керованої системи

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t),\ \ t\in[t_0,T]\,,\ \ x(t_0)\in X^0\subset R^n$$

може не існувати навіть у випадку обмеженої замкнутої множини Ω та обмежених ліпшицевих похідних від функцій $h:R^n\times R\to R$, $f:R^n\times R^r\times R\to R^n$. Для таких задач у роботі [11] побудовано узагальнений оптимальний розв'язок як мінімізатор $\overline{x}^0$ функціоналу $\overline{J}(\overline{x})\triangleq\int\limits_{t_0}^{T}h(\overline{x}(t),t)dt$ на замкнутій множині

$$\overline{X}\triangleq\left\{\overline{x}\mid\dot{\overline{x}}(t)\in \boldsymbol{co}\overline{f}\left(\overline{x}(t),\Omega,t\right),\ t\in[t_0,T],\ \overline{x}(t_0)\in X^0\right\},$$

де через $\boldsymbol{co}\overline{f}\left(\overline{x},\Omega,t\right)$ позначено замкнуту опуклу оболонку множини $\overline{f}\left(\overline{x},\Omega,t\right)$. Важливою особливістю такого узагальненого розв'язку $\overline{x}^0$ є існування для кожного $\alpha>0$ такого керування $u^\alpha:[t_0,T]\to R^r$ і початкового значення $x^\alpha(t_0)\in X^0$, для яких розв'язок x^α задачі Коші

$$\dot{x}^\alpha(t)=f\left(x^\alpha(t),u^\alpha\left(t\right),t\right),\ \ t\in[t_0,T]$$

задовольняє нерівність $\max\limits_{t\in[0,T]}\left\|x^\alpha(t)-\overline{x}^0(t)\right\|\le\alpha$. З огляду на, це послідовність $\left\{u^{\alpha_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=0$, називаємо узагальненим оптимальним керуванням.

Аналогічно будується узагальнений оптимальний розв'язок для наступної більш загальної задачі оптимального керування процесом із зосередженими параметрами.

Задача 1. Знайти керування $u:[t_0,T]\to\Omega\subset R^r$, моменти часу t_0, T та початкові і кінцеві значення $x(t_0),\ x(T)$, які на траєкторіях $x:[t_0,T]\to R^n$ керованої системи

$$\dot{x}(t)=f\left(x(t),u\left(t\right),t\right),\ t\in[t_0,T] \tag{1}$$

мінімізують функціонал $F_0(x,t_0,T)$ при обмеженнях

$$F_i(x,t_0,T)\le 0\ ,\ i=\overline{1,m}\ , \tag{2}$$

$$F_i(x,t_0,T)\triangleq\int_{t_0}^{T}h_i\left(x(t),t\right)dt+g_i\left(t_0,T,x(t_0),x(T)\right)\le 0\ ,$$

визначених заданими функціями $f:R^n\times\Omega\times R\to R^n$,

$$h_i:R^n\times R\to R\ ,\ g_i:R\times R\times R^n\times R^n\to R,\ i=\overline{0,m}\ .$$

Узагальнений розв'язок задачі 1 будується як функція $\overline{x}$ із множини $\overline{X}\triangleq\left\{\overline{x}\mid\dot{\overline{x}}(t)\in \boldsymbol{co}\overline{f}\left(\overline{x}(t),\Omega,t\right),\ t\in[t_0,T]\right\}$, яка мінімізує значення $\overline{F}_0(\overline{x},t_0,T)$ при обмеженнях $\overline{F}_i(\overline{x},t_0,T)\le 0\ ,\ i=\overline{1,m}$.

Узагальнена оптимізаційна задача для керованого процесу із зосередженими параметрами сформульована у роботі [14] як наступна задача 2.

Задача 2. Знайти на заданій допустимій множині Ω оптимальні значення $(u,x(t_0))\in\Omega$, які мінімізують функціонал

$$\begin{aligned}J(x,u)\triangleq B^0(x(t_0),x(T),u,&\int_{t_0}^{T}B^1(\dot{x}(t),x(t),u(t),t,\\ &\int_{t_0}^{T}B^2(\dot{x}(s),x(s),u(s),s,\dot{x}(t),x(t),u(t),t)ds)dt)\end{aligned} \tag{3}$$

на розв'язку x крайової задачі

$$\begin{aligned}f(t,x,u)\triangleq f^0(x(t_0),u,\dot{x}(t),x(t),u(t),t,&\\ \int_{D(t,u,x)}f^1\left(x(s),u(s),s,x(t),u(t),t\right)ds)=0,&\ t\in[t_0,T],\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}F(x,u)\triangleq F^0(x(t_0),x(T),u,&\int_{t_0}^{T}F^1(\dot{x}(t),x(t),u(t),t,\\ &\int_{t_0}^{T}F^2(\dot{x}(s),x(s),u(s),s,\dot{x}(t),x(t),u(t),t)ds)dt)=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Відповідна узагальнена крайова задача для процесу із розподіленими параметрами формулюється у роботі [16] як наступна задача 3.

Задача 3. Знайти розв'язок $x : D \to R^n$, $u : D \to R^r$, $D \subset R \times R^{n_s}$ системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\overline{f}_{ij}^k(t,s,x,u) \triangleq f_{ij}^k(t,s,x(t,s),u(t,s),F^{f_{ij}^k}(x,u,t,s)) = 0,$$
$$(t,s) \in D_j^i(x,u),\ k = \overline{1,k_{ij}}, \tag{6}$$

та нерівностей

$$\overline{g}_{ij}^l(t,s,x,u) \triangleq g_{ij}^l(t,s,x(t,s),u(t,s),F^{g_{ij}^l}(x,u,t,s)) \le 0,$$
$$(t,s) \in D_j^i(x,u),\ l = \overline{1,l_{ij}}, \tag{7}$$

який мінімізує заданий функціонал

$$J(x,u) \triangleq \iint_D \varphi_0(t,s,x(t,s),u(t,s),F^0(x,u,t,s))dsdt\ ,$$

де f_{ij}^k і g_{ij}^k — задані функції, $D_j^i(x,u) \subset D$ — задані j-параметричні підмножини, $j = \overline{1,m+1}$, $D_0^i(x,u) \triangleq \{t_q^i(x,u), s_q^i(x,u)\}_{q=1}^{q_i} \subset D$ — задані дискретні підмножини, $i = \overline{1,i_j}$, а $F^{f_{ij}^k}$, $F^{g_{ij}^k}$ і F^0 — задані композиції операторів

$$F_1(x,t,s,\alpha,\beta) \triangleq \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial t^\alpha \partial s^\beta} x(t,s)\ ,$$

операторів

$$F_2(F_1,x,t,s,\Omega) \triangleq (F_1(x,t+t^1(x,t),s+s^1(x,t),\alpha^1,\beta^1),$$
$$F_1(x,t+t^2(x,t),s+s^2(x,t),\alpha^2,\beta^2),\ \ldots,$$
$$F_1(x,t+t^{n_\Omega}(x,t),s+s^{n_\Omega}(x,t),\alpha^{n_\Omega},\beta^{n_\Omega}))\ ,$$

визначених за заданими дискретними множинами

$$\Omega(t,s) \triangleq \left\{t^i(t,s), s^i(t,s), \alpha^i, \beta^i\right\}_{i=1}^{n_\Omega}\ ,$$

та операторів

$$F_3(x,u,t,s,\varphi,\tilde{\Omega}) \triangleq \iint_{\tilde{\Omega}(t,s,x,u)} \varphi(t,s,u(t,s),F_1(x,t+\tau,s+\sigma,\alpha,\beta))d\tau d\sigma,$$

визначених за заданими множинами $\tilde{\Omega}(t,s,x,u) \subset R \times R^{n_s}$ та заданими ядрами φ.

Задачі 1—3 є частинними випадками більш загальної задачі оптимізації ієрархічно-керованої граф-операторної системами, до якої оптимізаційні задачі 1—3 можуть входити складовими підсистемами.

Серед методів розв'язування задач оптимального керування виділяються непрямі методи, які базуються на використанні необхідних чи достатніх умов оптимальності, та прямі методи, які ґрунтуються на використанні дискретних апроксимацій шуканих функцій з метою приведенням узагальненої оптимізаційної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування.

Необхідні умови оптимальності для узагальненої задачі 1 сформульовані в наступній теоремі узагальненого принципу максимуму.

Теорема 1. Якщо (x^0, u^0, t_0^0, T^0) є оптимальним розв'язком задачі 1, функції $f: R^n \times \Omega \times R \to R^n$, $h_i: R^n \times \Omega \times R \to R$, $i = \overline{0,m}$ та їх похідні по x є неперервними, а функції $g_i: R \times R \times R^n \times R^n \to R$, $i = \overline{0,m}$ є неперервно диференційованими по всіх аргументах і існує нетривіальний розв'язок $\psi^0(t)$, $\lambda_0^0 \ge 0$, λ_i^0, $i = \overline{0,m}$ системи

$$\frac{d\psi^0(t)}{dt} = -\psi^0(t) f_x'(x^0(t), u^0(t), t) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i h_{ix}'(x^0(t), u^0(t), t), \qquad (8)$$

$$\psi^0(t_0^0) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^0 g_{x(t_0)}'(t_0, T, x^0(t_0), x^0(T)), \qquad (9)$$

$$\psi^0(T^0) = -\sum_{i=0}^{m} \lambda_i^0 g_{x(T)}'(t_0, T, x^0(t_0), x^0(T)), \qquad (10)$$

то для кожного моменту часу $t \in [t_0, T]$ значення оптимального керування $u^0(t)$ задачі 1 є розв'язком оптимізаційної задачі

$$u^0(t) = \arg\max_{u \in \Omega} \left\{ \left(\psi^0, f(x^0, u, t)\right) - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^0 h_i(x^0, u, t) \right\}. \qquad (11)$$

Обчислення керування u^0 як розв'язку оптимізаційної задачі (11) при обмеженнях (1), (2), (8), (9) і (10) здійснюється за ітераційним алгоритмом [4]:

(1) вибрати довільні початкові числа $\bar{\lambda}_i^0 \ge 0$, $\bar{t}_0$, $\bar{T}$, $\bar{\lambda}_i$, $i = \overline{0,m}$ та довільні вектори $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in R^n$ і обчислити розв'язок $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in [t_0, T]$ узагальненої задачі Коші для системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), u(t), t\right),$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t) f_x'\left(x(t), \bar{u}(t), t\right) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i h_{ix}'\left(x(t), \bar{u}(t), t\right),$$

$$\overline{u}(t) = \arg\max_{u\in\Omega}\left[\left(\psi, f(x,u,t)\right) - \sum_{i=0}^{m}\lambda_i h_i(x,u,t)\right]$$

за початковими даними $x(\overline{t_0}) = \overline{x}$, $\psi(\overline{t}^0) = \sum_{i=0}^{m}\overline{\lambda}_i^0 g'_{\overline{x}}\left(\overline{t_0}, \overline{T}, \overline{x}, \overline{\overline{x}}\right)$.

(2) (основний цикл) з використанням ітераційних методів мінімізації функціоналу нев'язки

$$\overline{F}\left(\overline{t_0}, \overline{T}, \overline{x}, \overline{\overline{x}}, \overline{\lambda}^0, \overline{\lambda}\right) \triangleq \left\|\psi(\overline{T}) - \sum_{i=0}^{m}\overline{\lambda}_i^0 g'_{\overline{x}}(\overline{t_0}, \overline{T}, \overline{x}, \overline{\overline{x}})\right\|^2 + \left\|x(\overline{T}) - \overline{\overline{x}}\right\|^2$$

обчислити значення $\left(\overline{t_0}, \overline{T}, \overline{x}, \overline{\overline{x}}, \overline{\lambda}^0, \overline{\lambda}\right)$, які із вибраною точністю $\varepsilon > 0$ задовольняють нерівності

$$\| x(\overline{T}) - \overline{\overline{x}} \|^2 \le \varepsilon,\ \left\|\psi(\overline{T}) - \sum_{i=0}^{m}\overline{\lambda}_i^0 g'_{\overline{x}}\left(\overline{t_0}, \overline{T}, \overline{x}, \overline{\overline{x}}\right)\right\|^2 \le \varepsilon,$$

$$\overline{t_0} < \overline{T},\ \overline{\lambda}^0 \equiv \left(\overline{\lambda}_0^0, \overline{\lambda}_1^0, \ldots, \overline{\lambda}_m^0\right) \ge 0,\ \overline{\lambda} \equiv \left(\overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_m\right).$$

Практичний вибір конкретних алгоритмів реалізації непрямих методів для обчислення мінімізатора $\left(\overline{t_0}, \overline{T}, \overline{x}, \overline{\overline{x}}, \overline{\lambda}^0, \overline{\lambda}\right)$ визначається властивостями заданих функцій f, h, g та заданої допустимої множини Ω [4].

Труднощі практичної реалізації непрямих методів для розв'язування узагальненої задачі 2 пов'язані із складністю необхідних умов оптимальності для загального випадку. Ефективні для багатьох конкретних випадків непрямі методи розв'язування узагальненої задачі 2 побудовані за допомогою методів розв'язуючих операторів $\tilde{B}\left(u, x(t_0)\right)$ та асимптотично-розв'язуючих операторів $\overline{B}(u, x(t_0))$ для функціоналу (3) при обмеженнях (4), (5), для яких справедливі твердження 1, 2.

Твердження 1. Оптимальний розв'язок $(u^*, x^*(t_0))$ задачі 2 є мінімізатором розв'язуючого оператора $\tilde{B}(u, x(t_0))$ на допустимій множині Ω,

$$(u^*, x^*(t_0)) = \arg\min_{(u,x(t_0))\in\Omega}\tilde{B}(u, x(t_0)). \tag{12}$$

Твердження 2. Якщо $(\overline{u}, \overline{x}(t_0))$ є оптимальним розв'язком задачі 2, то $(\overline{u}, \overline{x}(t_0))$ є мінімізатором асимптотично-розв'язуючого оператора $\overline{B}(u, x(t_0))$ на допустимій множині Ω,

$$(\overline{u}, \overline{x}(t_0)) = \arg\min_{(u,x(t_0))\in\Omega}\overline{B}(u, x(t_0)). \tag{13}$$

Розв'язуючий оператор побудований для широких класів лінійний систем [13]. Для нелінійних систем (4), (5) у роботі [14] побудовано асимптотично-розв'язуючий оператор

$$\overline{B}(u,x(t_0)) \triangleq J(w,u)+\eta F(w,u)+M_1(u,\psi,\eta)x(t_0)+\int_{t_0}^{T}\psi^*(t)f(t,w,u)dt, \quad (14)$$

де η і $\psi(t),\ \ t\in[t_0,T]$ є розв'язком спряженої до (4), (5) гамільтонової системи

$$\int_{D^*(t,u,x)} A^*(f^0,t)\dot{\psi}(t)dt+\int_{D^*(t,u,x)} A_1^*(f^1,t,s)A_2^*(f^0,s)\psi(s)ds+\Big(A_1^*(f^0,t)+$$

$$+A_D^*(f^1,t)A_7^*(f^0,t)+\int_{D^*(t,u,x)} A_1^*(f^1,t,s)A_7^*(f^0,t)ds-A_3^*(f^0,t)\Big)\psi(t)+$$

$$+\Big(A_2^*(F^1,t)\,A_1^*(F^0)+\int_{t_0}^{T}A_6^*(B^2,t,s)A_5^*(F^1,t)A_3^*(F^0)ds-A_1^*(F^1,t)A_3^*(F^0)-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\Big\{d\Big(A_5^*(F^2,t,s)A_5^*(F^1,t)\Big)/dt\Big\}ds-\int_{t_0}^{T}A_1^*(F^2,t,s)A_5^*(F^1,s)A_3^*(F^0)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{T}A_2^*(F^2,t,s)A_5^*(F^1,s)A_3^*(F^0)ds+A_3(B^0)A_2(B^1,t)+$$

$$+A_3(B^0)A_5(B^0,t)\int_{t_0}^{T}A_6(B^2,t,s)ds-A_3(B^1,t)A_1(B^1,t)-A_3(B^0)\int_{t_0}^{T}A_5(B^2,t,s)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{T}A_3(B^0)A_5(B^1,s)A_1(B^2,s,t)ds+\int_{t_0}^{T}A_3(B^0)A_5(B^1,s)A_2(B^2,s,t)ds=0,$$

із узагальненими крайовими умовами

$$A_3^*(f^0,T)\dot{\psi}(T)+\int_{t_0}^{T}A_2^*(f^0,t)\psi(T)dt+\Big(A_2^*(F^0)+A_1^*(F^1,T)A_3^*(F^0)\Big)+$$

$$+\int_{t_0}^{T}A_5^*(F^2,T,s)A_5^*(F^1,T)ds+\int_{t_0}^{T}A_1^*(F^2,s,T)A_5^*(F^1,s)A_3^*(F^0)ds\cdot\eta+$$

$$+\int_{t_0}^{T}\Big(A_5^*(F^1,T)A_5^*(F^2,T,s)+A_3(B^0)A_5(B^1,s)A_1(B^2,T,s)\Big)ds=0,$$

$$M_1(u,\psi,\eta)\triangleq A_1(B^0)-A_5(B^0)A_1(B^1,t_0)-\int_{t_0}^{T}\Big(A_5(B^1,t_0)A_5(B^1,t_0,s)-$$

$$-A_3(B^0)A_5(B^1,s)A_1(B^2,t_0,s)\Big)ds+\Big[A_1*(F^0)-A_1*(F^1,t_0)A_3*(F^0)-$$

$$-\int_{t_0}^{T}\Big(A_5*(F^2,t_0,s)+A_1*(F^2,t_0,s)A_5*(F^1,s)A_3*(F^0)\Big)ds\Big]\eta+$$

$$+\int_{t_0}^{T}A_1*(f^2,t)\psi(t)dt-A_3*(f^0,t_0)\psi(t_0),$$

а через $A_k(f,\cdot)$ позначено похідну Фреше від функції f по її змінній на k-му місці, через $A_D(f)$ — похідну Фреше по змінній z від функції $\int_{D(t,u,z)} f(t)dt$ і через $D*(t,u,z)$ — спряжену до $D(t,u,z)$ область,

$$\int_{t_0}^{T}\int_{D(t,u,z)} f^1(s,t)dsdt=\int_{D*(t,u,z)}\int_{t_0}^{T} f^1(t,s)dtds.$$

Асимптотично-розв'язуючий оператор $\overline{B}(u,x(t_0))$ побудований за умов існування ліпшицевих похідних $A_k(f,\cdot)$, $A_D(f)$, ліпшицевої залежності розв'язку x нелінійної системи (4), (5) від шуканих $(u,x(t_0))$ та ліпшицевої в деякому околі $\|\delta x\|<\varepsilon$, $\|\delta u\|<\varepsilon$ залежності:

$$\operatorname{mes}\Big\{\Big(D(t,u,x)\cup D(t,u+\delta u,x+\delta x)\Big)/$$
$$/\Big(D(t,u,x)\cap D(t,u+\delta u,x+\delta x)\Big)\Big\}\le L\max\Big\{\|\delta u\|,\|\delta x\|\Big\}.$$

Очевидно, що при наявності асимптотично-розв'язуючого оператора $\overline{B}(u,x(t_0))$ відшукання екстремального розв'язку узагальненої оптимізаційної задачі 2 зводиться до розв'язування суттєво простішої оптимізаційної задачі (13). З огляду на можливості апроксимації задачі 3 задачею 2, задачу 3 також можемо розв'язувати прямим методом із побудовою відповідного асимптотично-розв'язуючого оператора та подальшого розв'язання відповідної спрощеної задачі (12). Для цього в циліндричній області $D=\widehat{D}\times[t_0,T]$ задачі 3 вибирається адекватна дискретна множина вузлових точок $\left\{s^k\right\}_{k=1}^{n_k}$, у кожному k-му вузлі похідні від x та u по просторовій змінній s у час t заміняємо їх дискретними апроксимаціями через значення $x_j(t)\triangleq x(t,s^j)$ у сусідніх j-их вузлах і систему із частинними похідними (6), (7) заміняємо системою диференціальних рівнянь виду (4), (5) для процесу із зосередженими параметрами $x(t)\triangleq(x_1(t),x_2(t),...,x_{n_k}(t))$ у всіх вузлах $k=\overline{1..n_k}$.

Проте практична реалізація такого прямого методу розв'язування задачі 3 може суттєво ускладнюватися через структурну складність асимптотично-розв'язуючого оператора $\overline{B}(u, x(t_0))$. У великомасштабних прикладних задачах такі узагальнені процеси із зосередженими та розподіленими параметрами є підсистемами керованої граф-операторної системи, де вся наявна, можливо різнорідна, інформація про причинно-наслідкові залежності у взаємодії k-го вузла граф-операторної системи із іншими вузлами (підсистемами) описується набором s-их підсистем загального виду

$$A_{ks}(x_{ks}, z_{ks}, u_{ks}) = 0,\ z_{ks} = \varphi_{ks}(x,u) \in Z_{ks},\ s = \overline{1, N_{ks}},\ k = \overline{1, N_k}$$

із частинними функціями $A_{ks} : X_{ks} \times Z_{ks} \times U_{ks} \to W_{A_{ks}}$, де $x_{ks} \in X_{ks}$ — стан ks-ої підсистеми, $u_{ks} \in U_{ks}$ — керування ks-ою підсистемою, а $z_{ks} \in Z_{ks}$ — зв'язок ks-ї підсистеми із іншими підсистемами.

Складена із усіх підсистем граф-операторна модель

$$A(x,u) \triangleq \left(A_1(x,u), \ldots, A_{N_k}(x,u) \right) = 0,\ \ x \triangleq (x_1, \ldots, x_{N_k}), \qquad (15)$$

$$x_k \triangleq (x_{k1}, \ldots, x_{kN_{ks}}),\ u \triangleq (u_1, \ldots, u_{N_k}),\ u_k \triangleq (u_{k1}, \ldots, u_{kN_{ks}}),$$

$$A_s(x,u) \triangleq \left(A_{1s}(x_{s1}, \varphi_{1s}(x,u), u_{1s}), \ldots, A_{N_k s}(x_{N_k s}, \varphi_{N_k s}(x,u), u_{N_k s}) \right),$$

разом із «підсистемою спостереження» $v = C(x,u)$ називається $B\delta$-адекватною на множині $V \times U$, якщо система $A(x,u) = 0$, $C(x,u) = v$ визначає значення $w \triangleq B(x,u)$ з точністю δ, тобто для всіх $u \in U$, $v \in V$ виконується нерівність $\| w - B(\overline{x}, u) \| \le \delta$, де $\overline{x}$ — будь-яка із реально можливих траєкторій модельованої системи в умовах керування u та спостереження $v = C(\overline{x}, u)$.

Очевидно, що для $B\delta$-адекватної на множині $V \times U$ граф-операторної моделі $A(x,u) = 0$ із підсистемою спостереження $C(x,u) = v$ існує функція F, яка за умов $C(x,u) = v$ задовольняє нерівність $\max\limits_{u \in U} \max\limits_{v \in V} \| F(v,u) - B(x,u) \| \le \delta$. Існування такої функції F забезпечується існуванням розв'язуючого оператора $\Re^\delta : \left(P \times W_A \times W_C \right) \to W_B$, який для частинних функцій $A : (X \times U) \to W_A$, $B : (X \times U) \to W_B$ та $C : (X \times U) \to W_C$ за мірою $\mu : 2^{W_B} \to \mathrm{R}^+$ задовольняє на допустимій множині $M \subset X \times U$ нерівність

$$\max_{x \in P_M(u)} d(\Re^\delta, u, M) \le \delta,\ \ P_M(u) \triangleq \left\{ x \in X \mid (x,u) \in M \right\},$$

$$d(\Re^\delta, u, M) \triangleq \mu\Big(\{ w \mid w = B(x,u) - \Re^\delta \left(u, A(x,u), C(x,u) \right),\ (x,u) \in M \} \Big).$$

У випадку існування на множині M розв'язуючого оператора $\Re^{\delta}$, граф-операторна модель є $B\delta$-адекватною на множні M, $F(v,u)= = \Re\left(u,0,v\right)$ і оптимальне керування $u^{*}(v)\in\Omega(v)\subset U$, яке на допустимій множині $\Omega(v)$ мінімізує функціонал $B(x,u)$ за даними спостережень $C(x,u)=v$, обчислюється як мінімізатор $u^{*}(v)=\arg\min\limits_{u\in\Omega(v)} F(v,u)$.

Умови існування розв'язуючого оператора отримані у роботі [15]. Для лінійного по x функціонала

$$B(x,u)\triangleq\sum_{i=1}^{N}(c_i,x_i)+f_{N+1}(u)$$

та лінійної по x граф-операторної системи, де k-та підсистема, $k=\overline{1,N}$, описується в гільбертових просторах X_k, U_k лінійним по x операторним рівнянням

$$A_{k,k}x_k+A_{k,k-1}x_{k-1}+\ldots+A_{k,1}x_1+f_k(u)=0,\ k=1,2,\ldots,N,$$

розв'язуючий оператор $\tilde{B}(u)$ будується за розв'язком $y(A,c)\triangleq \triangleq(y_N,y_{N-1},\ldots,y_1)$ системи

$$c_k+\sum_{j=k}^{N}A^{*}_{j,k}y_k=0,\ k=N,N-1,\ldots,1,$$

у вигляді $\tilde{B}(u)=\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i,f_i(u))+f_{n+1}(u)$ і оптимальне керування u^{*}, яке максимізує функціонал $B(x,u)$, обчислюється як мінімізатор функціоналу $\tilde{B}(u)$ на допустимій множині Ω. Тому для частинного випадку $\Omega\triangleq\Omega_1\times\Omega_2\times\ldots\times\Omega_{\mathrm{N}}$, $f_i(u)\equiv f_i(u_i)$, $f_{\mathrm{N}+1}(u)\equiv\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}}f_i(u_i)$, $u_i\in D_i$ оптимальним керуванням i-ю підсистемою, $i=\overline{1,N}$, є мінімізатор (12)

$$u_i^{*}\triangleq\arg\max_{u_i\in D_i}\left[(y(A,c),f_i(u_i)+\overline{f}_i(u)\right].$$

Проте, у випадку нелінійних рівнянь та нерівностей (1), (2) і/або нелінійного функціоналу $B(x,u)$ побудова розв'язуючого оператора $\tilde{B}$ може виявитися надто трудомісткою і в таких випадках для розв'язування узагальненої оптимізаційної задачі використовуємо прямі методи. Таким прямим методом для випадку опуклої оптимізаційної задачі є наступний метод узагальнених градієнтів. За допомогою множин $\Omega(\alpha_r)$ тих функцій (x,u), які при $\overline{h}_{ij}^{k}\triangleq-\overline{f}_{ij}^{k}$ для всіх $j=\overline{0,m+1}$, $i=\overline{1,i_j}$ задовольняють нерівностям

$$\overline{f}_{ij}^{k}(t,s,x,u)\le\alpha_r,\ \overline{h}_{ij}^{k}(t,s,x,u)\le\alpha_r,\ (t,s)\in D_j^i(x,u),\ k=\overline{1,k_{ij}},$$

$$\overline{g}_{ij}^{l}(t,s,x,u)\le\alpha_r,\ (t,s)\in D_j^i(x,u),\ l=\overline{1,l_{ij}},$$

визначаємо узагальнений розв'язок оптимізаційної задачі як підпослідовність послідовності $\{(x_r,u_r)\}_{r=1}^{\infty}\in\Omega(\alpha_r)$, для якої виконуються нерівності $B(x_r,u_r)\le\inf\limits_{(x,u)\in\Omega(\alpha_r)}B(x,u)+\alpha_r$ на деякій монотонно спадній послідовності $\alpha_r\to\overline{\alpha}$, де $\overline{\alpha}$ є мінімальним числом, для якого при всіх $\alpha>\overline{\alpha}$ множина $\Omega(\alpha)$ є тілесною.

Побудова узагальненого розв'язку чисельними методами здійснюється за допомогою обчислення такої послідовності функцій $(x_r(t,s),u_r(t,s))$ у вкладених множинах $X^{n_x(r)}\subset X^{n_x(r)+1}$, $U^{n_u(r)}\subset\subset U^{n_u(r)+1}$ параметричних функцій

$$(x_r(t,s),u_r(t,s))\triangleq(x_{n_x(r)}(p_r,t,s),u_{n_u(r)}(q_r,t,s))\in X^{n_x(r)}\times U^{n_u(r)}$$

визначених параметрами $p_r\in R^{n_x(r)}$ і $q_r\in R^{n_u(r)}$, що для будь-якого значення $\alpha>\overline{\alpha}$ знайдеться число r таке, що виконаються нерівності

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)}\overline{f}_{ij}^{k}(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot))\le\alpha,\ k=\overline{1,k_{ij}},$$

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)}\overline{h}_{ij}^{k}(t,s,x_{n_x(r)}(p_k,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_k,\cdot,\cdot))\le\alpha,\ k=\overline{1,k_{ij}},$$

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)}\overline{g}_{ij}^{l}(t,s,x_{n_x(r)}(p_k,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_k,\cdot,\cdot))\le\alpha,\ \ l=\overline{1,l_{ij}},$$

$$B(x_{n_x(r)}(p_k,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_k,\cdot,\cdot))\le\inf_{(x,u)\in\Omega(\alpha)}B(x,u)+\alpha.$$

Для випадку опуклої оптимізаційної задачі побудовано алгоритм обчислення узагальненого розв'язку за ітераційними формулами [16]

$$p_{r+1}=p_r-h_rv_r/\|v_r\|,\ q_{r+1}=q_r-h_rw_r/\|w_r\|,$$

$$(v_r,w_r)=\begin{cases}\overline{\nabla}_{(p,q)}\overline{f}_{ij}^{k}(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot)), & \text{якщо}\\ \qquad \overline{f}_{ij}^{k}(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot))=z, & \\ \overline{\nabla}_{(p,q)}\overline{h}_{ij}^{k}(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot)), & \text{якщо}\\ \qquad \overline{h}_{ij}^{k}(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot))=z, & \\ \overline{\nabla}_{(p,q)}\overline{g}_{ij}^{k}(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot)), & \text{якщо}\\ \qquad \overline{g}_{ij}^{k}(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot))=z, & \\ \overline{\nabla}_{(p,q)}B(x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot)), & \text{якщо}\ \ z\le 0,\end{cases}$$

$$z = \max\{ \max_{j=0,m+1} \max_{i=1,i_j} \max_{k=1,k_{ij}} \max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \bar{f}_{ij}^k(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot)),$$

$$\max_{j=0,m+1} \max_{i=1,i_j} \max_{k=1,k_{ij}} \max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \bar{h}_{ij}^k(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot)),$$

$$\max_{j=0,m+1} \max_{i=1,i_j} \max_{k=1,k_{ij}} \max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \bar{g}_{ij}^k(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot))\},$$

Доведено, що в умовах існування таких послідовностей вкладених множин X^r, U^r, $r = \overline{1,\infty}$ параметричних функцій $x_r(p,\cdot,\cdot)$ та $u_r(q,\cdot,\cdot)$ із параметрами $p \in R^r$ *і* $q \in R^r$, що для кожного $\alpha > 0$ існує число r таке, що множина параметрів p *і* q, які задовольняють нерівностям

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \bar{f}_{ij}^k(t,s,x_r(p,\cdot,\cdot),u_r(q,\cdot,\cdot)) \le \alpha \, , k = \overline{1,k_{ij}} \, ,$$

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \bar{h}_{ij}^k(t,s,x_r(p,\cdot,\cdot),u_r(q,\cdot,\cdot)) \le \alpha \, , k = \overline{1,k_{ij}} \, ,$$

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \bar{g}_{ij}^k(t,s,x_r(p,\cdot,\cdot),u_r(q,\cdot,\cdot)) \le \alpha \, , l = \overline{1,l_{ij}} \, ,$$

$$B(x_r(p,\cdot,\cdot),u_r(q,\cdot,\cdot)) \le \inf_{(x,u)\in\Omega(\alpha)} B(x,u) + \alpha \, ,$$

містить відкриту тілесну підмножину, то узагальнений оптимальний розв’язок задачі 3 міститься в послідовності $\{x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot),$ $u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot)\}_{r=2}^{\infty}$, обчисленій за умов $\lim_{r\to\infty} h_r = 0$, $\lim_{r\to\infty} n_x(r) = \infty$, $\lim_{r\to\infty} n_u(r) = \infty$, $\sum_{r=1}^{\infty} h_r = \infty$, $h_r > 0$.

Прискорення збіжності ітераційного алгоритму досягається з використанням ньютонівських методів продовження центральної траєкторії.

Ньютонівські методи продовження центральної траєкторії. Позначимо через *x* сукупність усіх змінних керованої граф-операторної системи. Будемо вважати *x* елементом банахового простору *X*. Сукупність усіх рівнянь граф-операторної системи зобразимо функціональним рівнянням $c(x) = 0$, де $c : X \to Z_c$ — задане відображення банахового простору X у банахів простір Z_c, а сукупність усіх нерівностей граф-операторної системи представимо функціональною нерівністю $g(x) \ge 0$, $g : X \to Z_g$, вважаючи, що упорядкування за нерівностями в банаховому просторі Z_g задано випуклим замкненим конусом *K*. За заданим функціоналом $J(x)$, $J : X \to R$, задачу відшукання оптимального розв’язку x^* граф-операторної системи сформулюємо як оптимізаційну задачу

$$x^* = \arg\min_x J(x) \mid c(x) = 0, g(x) \geq 0. \qquad \text{(A16)}$$

Вимога залишатися у допустимій множині $M_1 := \{x : g(x) \geq 0\}$ може бути забезпечена мінімізацією штрафної функції $\tilde{J}(x) := J(x) - \mu \sum_i B(g_i(x))$ при обмеженнях $c(x) = 0$. Дійсно, за певних припущень мінімізатор $x(\mu) = \arg\min_{x \in M_2} \tilde{J}(x)$ для штрафної функції $\tilde{J}(x)$ на допустимій множині $M_2 := \{x : c(x) = 0\}$ при $B(\xi) = \log \xi$ збігається при $\mu \to 0$ до оптимального розв'язку

$$x^* = \arg\min_x J(x) \mid c(x) = 0, g(x) \geq 0.$$

Отже, при виборі множників Лагранжа $\eta_i := \dfrac{\mu}{g_i(x)}$ необхідні умови оптимальності мали би вигляд

$$J'(x) - c'(x)^T \lambda - g'(x)^T \eta = 0, \;\; c(x) = 0, \;\; \eta \cdot g(x) = \mu.$$

Наступні узагальнені теореми 2, 3 про необхідні і достатні умови оптимальності розв'язку загальної задачі (A16) сформульовані у роботі [22] із використанням функції Лагранжа $L(x, \lambda, \eta) = J(x) - \langle \lambda, c(x) \rangle - \langle \eta, g(x) \rangle$ і умови $\langle \eta, g(x) \rangle = 0.$ Для випадку поточкових обмежень $g(x(t)) \geq 0, \;\; t \in [t_0, T]$ в узагальненій задачі оптимального керування умова $\langle \eta, g(x) \rangle = 0$ визначає жорстке поточкове взаємодоповнення $\eta(t) g(x(t)) = 0$, $\eta(t) \geq 0$, $g(x(t)) \geq 0$ для всіх $t \in [t_0, T]$.

Теорема 2 (необхідні умови). Якщо x є регулярним розв'язком задачі (A16), тобто $0 \in \operatorname{int}(g(x) + g'(x)\; X - K)$, то існують множники Лагранжа $\lambda \in Z_c^*$ і $\eta \in Z_g^*$, $\eta \geq 0$, для яких x є розв'язком системи

$$\partial_x L(x, \lambda, \eta) = 0, \qquad \text{(A17)}$$

$$c(x) = 0, \qquad \text{(A18)}$$

$$\langle \eta, g(x) \rangle = 0. \qquad \text{(A19)}$$

Теорема 3 (достатні умови). Якщо J, c та g визначені і двічі неперевно диференційовні по Фреше на деякому просторі $X_p \supset X$, і існують такі $\delta > 0$ і $\beta > 0$, що для всіх $h \in \ker c'(x)$ з $g'(x)h \in K + \operatorname{span}\{g(x)\}$ виконуються нерівності

$$\langle \partial_x^2 L(x, \lambda, \eta) h, h \rangle \geq \delta \|h\|_p^2, \;\; \langle \eta, g'(x) h \rangle \leq \beta \|h\|_p,$$

то в умовах теореми 1 у просторі X_p існує окіл U точки x, у якому x є єдиним локальним розв'язком задачі (A16).

У методі внутрішньої точки замість жорсткої умови (A19) використовується ослаблена умова $\langle \eta, g(x) \rangle = \mu > 0$ подібна до використання множників Лагранжа $\eta_i := \dfrac{\mu}{g_i(x)}$. У задачі оптимального керування це еквівалентно поточковій рівності $\eta(t)g(x(t)) = \mu$ із додатнім параметром $\mu > 0$. І замість обчислення розв'язку системи (A17)—(A19), обчислюємо розв'язок $v(\mu) \triangleq (x(\mu), \lambda(\mu), \eta(\mu), w(\mu))$ простішої системи (A20)—(A23) із параметром $\mu > 0$

$$\partial_x L(x, \lambda, \eta) = 0, \tag{A20}$$

$$-c(x) = 0, \tag{A21}$$

$$w - g(x) = 0, \tag{A22}$$

$$\psi(w, \eta; \mu) = 0, \tag{A23}$$

та функцією Фішера—Бурмайстера

$$\psi(a, b; \mu) \triangleq a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu}\ , \ \mu > 0.$$

і далі знаходимо розв'язок x^* задачі (A16) за методом продовження по параметру як границю $x^* = \lim\limits_{\mu \to 0} x(\mu)$. Реалізацію алгоритму продовження по параметру здійснюємо за швидкозбіжною ньютонівською процедурою ітераційного уточнення

$$F'(v^k, \mu)\delta v^k = -F(v^k, \mu)\,,\ v^{k+1} = v^k + \lambda \delta v^k,$$

де $F(v, \mu) \triangleq (\partial_x L(x, \lambda, \eta), -c(x), w - g(x), \psi(w, \eta; \mu))^T$,

$$F'(v, \mu) = \begin{bmatrix} \partial_x^2 L(x, \lambda, \eta) & -c'(x)^* & -g'(x)^* & 0 \\ -c'(x) & 0 & 0 & 0 \\ -g'(x) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \partial_\eta (w, \eta; \mu) & \partial_w \psi(w, \eta; \mu) \end{bmatrix}.$$

У роботі [23] для загальної задачі оптимального керування досліджуються умови існування розв'язку $v(\mu)$ параметричної системи $F(v, \mu) = 0$, який називають центральною траєкторією і також досліджуються умови збіжності $x(\mu) \to x^*$ при $\mu \to 0$ з урахуванням того, що практична реалізація методу Ньютона супроводжується внутрішніми похибками r^k, які призводять до похибки $\delta_k := \dfrac{\left\| r^k \right\|}{\left\| F(v^k, \mu) \right\|}$ в обчисленій поправці δv^k. Отримана нерівність

$$\left\| F'(v^k)\delta_{k+1} \right\| \le (1+\delta_{k+1})\left(\frac{\delta_k}{1-\delta_k} + \frac{\omega}{2}\left\| F'(v^k)\delta v^k \right\| \right)\left\| F'(v^k)\delta v^k \right\|$$

теоретично обґрунтовує адекватність використання методу Ньютона для побудови числового алгоритму прискореної збіжності $x(\mu) \underset{\mu\to 0}{\to} x^*$ при наявності похибок r^k. У роботі [23] обґрунтовується використання методу внутрішньої точки для відшукання оптимального розв'язку

$$v(\mu) \triangleq (x(\mu), \lambda(\mu), \eta(\mu), w(\mu))$$

Параметричної оптимізаційної задачі: $J(x) = \int_0^1 f(x(t))dt,$

$$c^T(x) \triangleq (\overline{c}(x), c_r(y(0), y(1))),$$

$$g^T(x)(t) \triangleq g^T(x(t)) = (g_u(u(t)), g_y(y(t))),$$

де вектор-функції керування u та стану y мають розмірності n_u та n_y і належать відповідно просторам $L_p^{n_u}$ та $\left(W_p^1\right)^{n_y}$, множники Лагранжа λ і η мають розмірності $n_\lambda + n_r$ та $\overline{n}_u + \overline{n}_y$ і належать просторам $\Lambda_p = L_p^{n_\lambda} \times | R^{n_r}$ та $E_p = L_p^{\overline{n}_u} \times \left(W_p^1\right)^{\overline{n}_y}$, $c\colon R^{n_u+2n_y} \to R^{n_\lambda}$, $c_r\colon R^{2n_y} \to R^{n_r}$.

Доведено, що у випадку двічі неперервно диференційовних по своїх аргументах ліпшицевих відображень f, c, c_r, та g, відображення F є неперервно диференційованим, його похідна F' задовольняє умову Ліпшиця

$$\left\| F'(v;\mu) - F'(\overline{v};\mu) \right\|_{V_\infty \to Z_\infty} \le L\mu^{-1} \left\| v - \overline{v} \right\|_{V_\infty}$$

і має при $\mu > 0$ рівномірно обмежену обернену $[F']^{-1}$. На цій основі доводиться існування центрального шляху $v(\mu) \in D \times (0, \mu_0]$ за умов існування для деякого значення $\mu_0 > 0$ розв'язку v_0 рівняння $F(v_0, \mu_0) = 0$. Для доведення рівномірної обмеженості $F'(v(\mu);\mu)^{-1}$ при $\mu \to 0$ використовується розщеплення обмежень нерівностей на активні і неактивні і далі активні обмеження долучаються до обмежень рівностей, а неактивні обмеження відкидаються. Якщо із системи $F'(v;\mu)\Delta v = \varsigma = (z, s, r, q)^T$ вилучити поправки Δw та $\Delta\eta_p^c$, то для отриманої системи

$$\begin{bmatrix} H & -(c')^* & -(g'_p)^* \\ -c' & & \\ -g'_p & & -(\partial_w \psi_p)^{-1}\partial_\eta \psi_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \\ \Delta\eta_p \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} z + (g_p^{c\prime})^*(\partial_\eta \psi_p^c)^{-1}(q_p^c - \partial_w \psi_p^c r_p^c) \\ s \\ -(\partial_w \psi_p)^{-1} q_p + r_p) \end{bmatrix}$$

існує обернений оператор, обмежений незалежно від μ. Оскільки оператори $(\partial_w \psi_p)^{-1}$, $\partial_\eta \psi_p$, $(\partial_\eta \psi_p^c)^{-1}$, і $\partial_w \psi_p^c$ є обмеженими рівномірно на $\mu > 0$, то існує єдиний розв'язок $\Delta x \in X_2$, $\Delta\lambda \in \Lambda_2$, і $\Delta\eta \in W_p$, який задовольняє нерівностям

$$\|\Delta x\|_{X_2} \le const \left\| z + (g_p^{c\prime})^*(\partial_\eta \psi_p^c)^{-1}(q_p^c - \partial_w \psi_p^c r_p^c) \right\| \le$$

$$\le const \left(\|z\|_{W_2^*} + \left\|(g_p^{c\prime})^*\right\|_{W_2^*} \left\|(\partial_\eta \psi_p^c)^{-1}\right\|_{W_2^*} \left(\left\|q_p^c\right\|_{W_2^*} + \left\|\partial_w \psi_p^c\right\| \right) \right) \le$$

$$\le const \left(\|z\|_{W_2^*} + const \left(\left\|(g_p^{c\prime})^*\right\|_{W_2^*} + \left\|r_p^c\right\|_{W_2^*} \right) \right) \le const \|\varsigma\|_{Z_2},$$

$$\|\Delta\lambda\|_{\Lambda_2} + \|\Delta\eta_p\|_{W_2} \le const \|\varsigma\|_{Z_2},$$

із не залежними від μ константами. Отже, $[F'(v(\mu), \mu)]^{-1}$ є обмеженим незалежно від μ і з урахуванням

$$\partial_\mu \psi(w, \eta; \mu) = \frac{1}{\sqrt{w^2 + \eta^2 + 2\mu}} \le \mu^{-\frac{1}{2}}$$

і

$$\partial_\mu F\left(v(\mu)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\partial_\mu \psi \end{bmatrix}^T$$

отримано нерівність

$$\left\|v'(\mu)\right\|_{V_2} = \left\| F'\left(v(\mu); \mu\right)^{-1} \partial_\mu F(v(\mu)) \right\|_{V_2} \le$$

$$\le \left\| F'\left(v(\mu); \mu\right)^{-1} \right\|_{Z_2 \to V_2} \left\| \partial_\mu F(v(\mu)) \right\|_{Z_2} \le const\, \mu^{-\frac{1}{2}}$$

із якої випливає, що центральний шлях є рівномірно неперервним і може бути неперервно розширеним до шуканого граничного значення $v(0)$ за методом продовження центрального шляху $v(\mu)$ по параметру $\mu \to 0$.

Збіжність ньютонівського методу продовження по параметру із внутрішніми похибками

$$F'(v^k)\delta v^k = -F(v^k) + r^k, \quad v^{k+1} = v^k + \delta v^k$$

забезпечується отриманими в [23] нерівностями

$$\frac{1+\delta_k}{2}\omega\left\|F'(v^k)\delta v^k\right\|_{v^k}+\left(1+\gamma_v\left\|F'(v^k)\delta v^k\right\|_{v^k}\right)\delta_k\le\Theta<1,$$

$$\left\|F(v^{k+1})\right\|_{v^{k+1}}\le\Theta\left\|F(v^k)\right\|_{v^k},$$

$$\left\|F'(v^k)\overline{\delta v^{k+1}}\right\|_{v^k}\le(1+\overline{\delta_{k+1}})\left(\frac{\delta_k}{1-\delta_k}+\frac{\omega}{2}\left\|F'(v^k)\delta v^k\right\|_{v^k}\right)\left\|F'(v^k)\delta v^k\right\|_{v^k}.$$

Якщо значення $B(x,u,q)$ заданого критерію оптимальності B залежить від деякого векторного чи функціонального параметра q, значення якого є невідомою детермінованою величиною із заданої допустимої множини Q, то оптимізаційну задачу відшукання оптимального значення u називають задачею оптимізації в умовах неповних даних, а якщо невідоме значення q є відомою випадковою величиною із деякого заданого ймовірнісного простору (q,F,P), то задачу відшукання оптимального керування u називають задачею оптимізації в умовах ризику. Розв'язування задач оптимізації в умовах неповних даних та в умовах ризику суттєво ускладнюється при наявності підсистем граф-операторної моделі із неповними даними та випадковими величинами, де причинно-наслідкові залежності у взаємодії k-го вузла граф-операторної системи із іншими вузлами (підсистемами) описується набором s-их підсистем

$$A_{ks}(x_{ks},z_{ks},u_{ks},q_{ks})=0,\ z_{ks}=\varphi_{ks}(x,u,q)\in Z_{ks},\ s=\overline{1,N_{ks}},\ k=\overline{1,N_k}$$

із частинними функціями $A_{ks}:X_{ks}\times Z_{ks}\times U_{ks}\times Q_{ks}\to W_{A_{ks}}$, які залежать також і від невідомих чи випадкових величин $q_{ks}\in Q_{ks}$.

Складену із таких підсистем граф-операторну модель

$$A(x,u,q)\triangleq\left(A_1(x,u,q),\ldots,A_{N_k}(x,u,q)\right)=0,\quad x\triangleq(x_1,\ldots,x_{N_k}),$$

$$x_k\triangleq(x_{k1},\ldots,x_{kN_{ks}}),\ u\triangleq(u_1,\ldots,u_{N_k}),\ u_k\triangleq(u_{k1},\ldots,u_{kN_{ks}}),$$

$$q\triangleq(q_1,\ldots,q_{N_k}),\ q_k\triangleq(q_{k1},\ldots,q_{kN_{ks}}),$$

$$A_s(x,u,q)\triangleq(A_{1s}(x_{s1},\varphi_{1s}(x,u,q),u_{1s},q_{1s}),\ldots$$

$$\ldots,A_{N_ks}(x_{N_ks},\varphi_{N_ks}(x,u,q),u_{N_ks},q_{N_ks}))$$

разом із «підсистемою спостереження» $v=C(x,u,q)$ називаємо, відповідно, або керованою системою із неповними даними, або стохастичною керованою системою. У випадку існування розв'язку $x=x(u,q)$ граф-операторної системи із неповними даними оптимальним гарантованим керуванням називаємо керування.

Висновки. Із використанням градієнтних та ньютонівських методів внутрішньої точки, побудовано числові алгоритми для розв'язування узагальнених оптимізаційних задач, які описуються керованими граф-операторними системами із підсистемами алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь та нерівностей.

Список використаних джерел:

1. Згуровский М. З. Системный анализ (проблемы, методология, приложения) / М. З. Згуровский, Н. Д. Панкратова. — К. : Наук. думка, 2005. — 743 с.
2. Сергиенко И. В. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 2007. — 639 с.
3. Сергиенко И. В. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 2009. — 703 с.
4. Бейко І. В. Задачі, методи і алгоритми оптимізації : навчальний посібник / І. В. Бейко, П. М. Зінько, О. Г. Наконечний. — Рівне : НУВГП, 2011. — 624 с.
5. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н.З. Шор. — К. : Наук. думка, 1979. — 200 с.
6. Демьянов В. Ф. Недифференцируемая оптимизация / В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев. — М. : Наука, 1981. — 384 с.
7. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования / Ю. М. Ермольев. — М. : Наука, 1976. — 240 с.
8. Голиков А. И. Метод решения задач линейного программирования большой размерности / А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко // Докл. РАН. — 2004. — Т. 397, № 6. — С. 727–732.
9. Голиков А. И. Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности / А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко, Н. Моллаверди // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1564–1573.
10. Mangasarian O. L. A Newton Method for Linear Programming / O. L. Mangasarian // J. of Optimizat. Theory and Appl. — 2004. — V. 121. — P. 1–18.
11. Бейко І. В. Випукла апроксимація керованого процесу і метод побудови узагальнених оптимальних режимів / І. В. Бейко // Український математичний журнал. — 1973. — Т. XXV, вип. 3. — С. 343–346.
12. Бейко І. В. Уніфікована методологія розв‘язуючих операторів як новітня інформаційна технологія для відшукання нових знань і прийняття оптимальних рішень (англійською мовою) / І. В. Бейко // Proc. "The Information Technology Contribution to the Building of a Safe Regional Environment", AFCEA, Europe Seminar, Kiev. — 28-30.05.98. — С. 44–50.
13. Бейко І. В. Розвиток методів розв’язуючих та асимптотично-розв’язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей / І. В. Бейко // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. — 2002. — Вип. 3. — С. 10–15.
14. Бейко И. В. Экстремальные модели для численного исследования оптимальных процессов в задачах теплопроводности при наличии погрешностей в исходной информации / И. В. Бейко //Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. — К. : Наук. думка, 1977. — С. 220–233.
15. Бейко І. В. Функції оцінювання інформації в теорії оптимальних агрегованих моделей і оптимальних систем / І. В. Бейко // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 43–54.
16. Бейко І. В. Узагальнені крайові задачі і узагальнені розв’язки оптимізаційних задач у функціональних просторах / І. В. Бейко // Математичне та

комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 32–42.
17. Бейко И. В. Численные методы решения задач оптимального управления / И. В. Бейко, М. Ф. Бейко. — К. : Знание, 1968. — 44 с.
18. Jarre F. Comparing two interior-point approaches for semi-infinite programs / F. Jarre // Technical report, Universitat Trier, April. — 1999. — P. 177–182.
19. Volkwein S. Affine invariant convergence analysis for inexact augmented Lagrangian-SQP methods / S. Volkwein M. Weiser // ZIB-Report 00-56, Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik. — 2000. — 29 p.
20. Potra F. A path-following method for linear complementarity problems based on the affine invariant Kantorovich theorem / F. Potra // ZIB-Report 00-30, Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik. — 2000. — 39 p.
21. Deuflhard P. Newton Methods for Nonlinear Problems / P. Deuflhard // Ajfine Invariance and Adaptive Algorithms. Springer, to be published — 2001.
22. Maurer H. First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control / H. Maurer // Math. Programming Study, 14 — 1981. — P. 163–177.
23. Deuflhard P. A stepsize control for continuation methods and its special application to multiple shooting techniques / P. Deuflhard // Numerische Mathematik, 33 — 1979. — P. 115–146.
24. Schulz V. Solving discretized optimization problems by partially reduced SQP methods / V. Schulz // Computing and Visualization in Science, 1. — 1998. — P. 83–96.

In the paper numerical methods are developed for optimization of control processes described by systems of algebraic, differential and integral-differential systems with partial derivatives.

Key words: *optimization boundary problems, optimization methods, Newton interial point methods in functional spaces.*

Отримано: 22.05.2012