In this article criterions of the extremal element for the problem of the best at sense of the convex function uniform approximation of continuous compact-valued maps by continuous single-valued maps with the use of extreme points of subdifferentials of function are established.

Key words: *the compact-valued maps, the best in sense of the convex function uniform approximation, the extreme point, subdifferentials.*

Отримано: 13.06.2012

УДК 539.3

Н. А. Гук, д-р физ.-мат. наук

Днепропетровский национальный университет
имени Олеся Гончара, г. Днепропетровск

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СВОЙСТВ ОСНОВАНИЙ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДОМ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Рассматривается задача определения неоднородных свойств основания по результатам косвенных наблюдений. Для описания поведения грунта используется модель Винклера. Вектор неизвестных коэффициентов жесткостей пружин определяется из решения обратной задачи, сформулированной в вариационной постановке. Приводятся результаты восстановления вектора жесткостей для различных случаев местоположения неоднородностей основания.

Ключевые слова: *обратная задача, пластина, основание, модель Винклера, коэффициент жесткости пружины.*

Введение. Использование высокотехнологичного и дорогостоящего оборудования в технике выдвигает требование обеспечения высокой точности установки этого оборудования. Поэтому проектирование несущих конструкций должно выполняться с учетом свойств оборудования, которое на них опирается. В качестве несущих конструкций обычно выступают пластины, плиты, оболочки, опирающиеся на упругое основание, в роли которого может выступать грунт или специальные ложементы, состоящие из пружин, возможно различной жесткости. Решение задачи об определении жесткости основания или его структуры, необходимой для реализации требований к установке оборудования, является весьма актуальным при проектировании таких сооружений как энергетические комплексы, газонефтетранспортные системы, транспортные системы в ракетостроении и т.д.

В случае, когда необходимо определять напряженно-деформированное состояние грунта, для описания его поведения используются различные модели деформирования [1—3]: модель линейно-деформируемого грунта, упругая линейно-пластическая модель Мора-Кулона, упругопластическая модель с изотропным упрочнением и т.д. Перечисленные выше модели необходимо использовать в условиях высоконагруженных или «слабых» грунтов, при штатных условиях эксплуатации обычно применяется модель Винклера. Тогда для экспертного определения коэффициента постели используют результаты лабораторных испытаний и связывают осадку балки единичной ширины (или штампа) со значением контактного давления [1].

Применение такого подхода в случае, когда механические свойства грунта неоднородны, может существенно исказить реальные свойства грунта, и как следствие, напряженно-деформированное состояние сооружения в условиях эксплуатации.

Решению указанных проблем посвящены многочисленные исследования, при этом возможна постановка двух задач:

1) определение напряженно-деформированного состояния систем «сооружение — основание» на базе моделей деформирования грунта и сооружения [2], а также результатов наблюдения за сооружением [3];
2) определение свойств основания, необходимых для реализации требований к поведению сооружения.

Постановка задачи. Настоящая работа посвящена решению первой задачи. Рассматривается толстая пластина, находящаяся под действием произвольной нагрузки и лежащая на упругом основании, поведение которого описывается моделью Винклера. Эта модель реализуется в виде набора поперечно-деформируемых пружин с неизвестной жесткостью и неизвестными координатами точек их расположения. Неизвестные обратной задачи определяются из условий, связывающих вычисленные с помощью математической модели и наблюдаемые значения перемещений пластины.

Математическая модель прямой и обратной задачи. Математическая модель пластины, расположенной на основании и находящейся под действием нормальной к ее поверхности распределенной нагрузки $q(X)$, описывается дифференциальным уравнением статического изгиба пластины

$$D\nabla^4 w = q - \sum_{p=1}^{P} k_p w_p \,, \tag{1}$$

где $\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2$, $\nabla^2 w = \partial^2 w \big/ \partial x^2 + \partial^2 w \big/ \partial y^2$; w_p — нормальные перемещения в точке X_p с координатами $\left(x_p, y_p\right)$; p — номер точки, в которой установлена пружина, $p = \overline{1,P}$; k_p — коэффициенты жесткости пружины; $D = Eh^3 \big/ 12\left(1-\nu^2\right)$ — изгибная жесткость; h —

толщина пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Уравнение (1) дополняется граничными условиями, соответствующими условиям крепления пластины.

Предполагается, что местоположение точек крепления пружин совпадают с местоположением точек наблюдений.

Коэффициенты жесткости k_p являются неизвестными обратной задачи, информацией для их определения служат измеренные в заданных на поверхности пластины точках наблюдения p значения нормальных перемещений w_p^*:

$$w_p = w_p^*, \ p = \overline{1,P}. \tag{2}$$

Учет горизонтального натяжения (аналог модели Кармана) можно реализовать установкой в тех же точках X_p пружин с жесткостями по соответствующим направлениям. В том случае, когда условия (2) определяют перемещения, которые требуются условиями эксплуатации, может быть решена и задача второго типа.

Для определения вектора неизвестных коэффициентов жесткости пружин $K = \{k_1, ..., k_P\}$ обратная задача формулируется в вариационной постановке. Для построения функционала-невязки используется условие минимума среднеквадратичного отклонения между измеренными и вычисленными с использованием математической модели (1) значениями нормальных перемещений. Тогда решение может быть найдено как

$$K = \arg\inf_{k_p, p} J(K), \tag{3}$$

где $J(K) = (w(K) - w^*)^T (w(K) - w^*)$ — функционал-невязка;

$$w(K) = \{w_1, ..., w_P\}; \ w^* = \left\{w_1^*, ..., w_P^*\right\}.$$

Исходя из вида соотношения (3), описывающего решение обратной задачи, основные этапы его построения предполагают определение нормальных перемещений из решения прямой задачи (1), формирование функционала-невязки $J(K)$ и определение вектора неизвестных коэффициентов жесткости из решения задачи оптимизации (3).

Метод решения. Для построения решений прямой и обратной задач осуществляется переход к дискретным моделям пластины и основания с использованием метода конечных элементов. Для описания неизвестных прямой и обратной задачи на области, занятой пластиной, вводятся следующие сетки:

- сетка с узлами X_n используется для описания неизвестных функций прямой задачи, где $X = \{X_n\}$, $X_n = (x_n, y_n)$, $n = \overline{1,N}$, $n \in N$, а функция, характеризующая нормальные перемещения $w(K)$ представляется в виде вектора $w = \{w_n\}$;

- сетка с узлами X_p используется для описания координат точек установки пружин с соответствующими жесткостями, т.е. для дискретизации основания, где $X = \{X_p\}$, $X_p = (x_p, y_p)$, $p = \overline{1, P}$, $p \in \mathrm{P}$, а вектор неизвестных жесткостей пружин представляется в виде $K = \left\{k_p\right\}$.

В соответствии с предположением, сформулированным выше, в этих же узлах сетки осуществляется наблюдение за характеристиками напряженно-деформированного состояния пластины и формируется вектор $w^* = \{w_p^*\}$, $p = \overline{1, P}$.

Так как конкретные значения индексов $p \in \mathrm{P}$ образуют некоторый набор индексов $r_p \subset \mathrm{P} \subset \mathrm{N}$, который при решении обратной задачи является параметром ее модели, то условие (3) приобретает вид:

$$K = \arg \inf_{k_p, r_p} J(K), \tag{4}$$

где $J(K) = \sum_p (w_p(K) - w_p^*)^T (w_p(K) - w_p^*)$, $p \in r_p$; r_p — набор номеров узлов сетки X_p, в которых установлены пружины; $K = \{k_p\}$ — вектор неизвестных жесткостей пружин; P, N — множества индексов p и n.

Неизвестные функции прямой и обратной задачи на элементе задаются для локальной системы координат при помощи аппроксимаций через узловые значения. Для вычисления значений вектора нормальных перемещений $w = \{w_n\}$ используется процедура метода конечных элементов (МКЭ) применительно к прямой задаче (1) на сетке с узлами X_n, $n = \overline{1, N}$.

Решение обратной задачи осуществляется в два этапа [4]:

1. На первом этапе при фиксированном выборе координат точек измерения, т.е. параметрах сетки 2, формируется начальное приближение для решения задачи (4) в виде:

$$K = K_0 \delta\left(x - x_n\right) \delta\left(y - y_n\right), \tag{5}$$

где x_n, y_n — координаты узлов X_n заданной равномерной сетки с шагом Δa, Δb по координатным осям и общим числом узлов N;

$K_0 = k / k_{защмл}$ — параметр; k — значение коэффициента жесткости пружины; $k_{защмл}$ — значение этого же коэффициента, соответствующее жесткому защемлению; $\delta(\cdot)$ — функция Дирака; a, b — длина и ширина пластины. Условие (4) приобретает вид:

$$K = \underset{K_0,\, m,\, z}{\arg\inf}\, J(K) \tag{6}$$

при $0 \le K_0 \le 1$, $m = a/\Delta a$; $z = b/\Delta b$.

2. На втором этапе решение, полученное из (6), используется в качестве начального приближения в итерационной процедуре метода Ньютона для решения задачи (4); для определения вектора неизвестных обратной задачи $K = \{k_p\}$ организуется процесс минимизации функционала (4):

$$K^{(t)} = K^{(t-1)} - G\big|_{K^{(t-1)}} \cdot \Delta\left(K^{(t-1)}\right), \tag{7}$$

где $G = \left(A^T A\right)^{-1} A^T$; $A = \left\| \partial w_n / \partial K_p \right\| = \dfrac{w\left(X_n, K_p, \Delta K_p\right) - w\left(X_n, K_p\right)}{\Delta K_p}$;

$\Delta = (w - w^*)$ — вектор невязок; ΔK_p — вектор малых приращений к компонентам вектора неизвестных параметров;

$$w(X_n, K_p, \Delta K_p) = \left\{ w(X_n, K_p + \Delta K_p \cdot e_1), ..., w(X_n, K_p + \Delta K_p \cdot e_p) \right\};$$

e_j — базисные векторы: $e_1 = (1, 0, ..., 0)$; $e_2 = (0, 1, ..., 0)$; …; $e_p = (0, 0, ..., 1)$; p — номера точек установки пружин; n – номера узлов сетки конечно-элементной модели пластины; $p = \overline{1, P}$, $n = \overline{1, N}$.

Формируемая в (7) матрица G может быть плохо обусловленной, особенно, если ее размерность велика. Поэтому необходимо сформулировать условия, позволяющие из общего числа узлов N конечно-элементной модели пластины выбрать информативные точки $X_p = (x_p, y_p)$, в которых производится измерение значений $w^* = \{w_p^*\}$, $p = \overline{1, P}$. При этом необходимо обеспечить возможность получения решения задачи (4) с заданной наперед точностью.

Выбор точек наблюдения X_p осуществляется в предположении о существовании наиболее информативных данных. Условие, обеспечивающее выбор доминирующих точек измерения X_p, $p = \overline{1, P}$, может быть сформулировано в виде:

$$\left\| K - K(r_p) \right\|^2 \to \min \tag{8}$$

или

$$J_1 = \sum_p \left(K - K(r_p) \right)^T \left(K - K(r_p) \right) \to \min\,,\ p \in r_p \tag{9}$$

здесь $K(r_p)$ — вектор неизвестных обратной задачи, определенный из итерационной процедуры метода Ньютона (7) с использованием при построении функционала-невязки (4) информативного вектора наблюдений, т.е. вектора определенного на наборе индексов r_p; K — вектор неизвестных обратной задачи, который вычисляется с использованием полного вектора наблюдений. При этом узлы сетки возможных измерений X_p выбираются из числа узлов конечно-элементной сетки прямой задачи X_n, $n = \overline{1, N}$.

Для определения информативных компонент вектора наблюдений $\left\{ w_p^* \right\}$ предлагается представить вектор $\Delta = \left\{ \Delta_p \right\} = \left\{ w\left(X_p, K \right) - w_p^* \right\}$, используемый при формировании матрицы A, в виде двух независимых векторов Δ^1, Δ^2 размерности $N_1 \times 1$, $N_2 \times 1$ соответственно, $N_1 + N_2 = N$ (для определенности будем считать, что компоненты вектора Δ^1 вычислены в информативных точках наблюдения).

Для формирования векторов Δ^1, Δ^2 вводятся функции принадлежности u_n^j ($n = \overline{1, N}$, $j = 1, 2$) компонент вектора Δ векторам Δ^1 и Δ^2 в виде:

$$u_{n_1}^1(X) = \delta(X - X_{n_1})\,;\ n_1 \in I^1,\ I^1 = \{ n_{1_1}, \ldots, n_{1_{N_1}} \}\,;$$

$$u_{n_2}^2(X) = \delta(X - X_{n_2})\,;\ n_2 \in I^2,\ I^2 = \{ n_{2_{N_1+1}}, \ldots, n_{2_N} \}\,;$$

$$I^1 \cap I^2 = \varnothing\,,$$

где $\delta(X - X_{n_j})$ — функция Дирака; N_1 — заданное число ненулевых компонент вектора Δ^1.

Сформируем матрицы:

$$\left[D \right]_{N \times N} = diag\left\{ \delta(X - X_n) \right\},\ n = \overline{1, N}\,;$$

$$\left[D_1 \right]_{P \times P} = diag\left\{ u_{n_1}^1 \right\};\ \left[D_2 \right]_{P \times P} = \left[D \right] - \left[D_1 \right].$$

Для описания векторов Δ^1 и Δ^2 используется представление:

$$\Delta^1 = \int_\Omega D_1 \Delta d\Omega\,;\ \ \Delta^2 = \int_\Omega D_2 \Delta d\Omega\,.$$

С учетом введенных представлений, присоединяя к функционалу (9) с использованием множителей Лагранжа условие несмещенности оценки [5]

$$R_j Q_j - [I]_{N_j \times N_j} = [0]_{N_j \times N_j}$$

и условие инвариантности оценивания

$$R_i Q_j = [0]_{N_i \times N_j}\ ;\ i \neq j\ ;\ i, j = 1, 2\ ,$$

получим представление функционала в матричной форме

$$J_2(Q_j, \psi_j, \eta_j) = \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T \times$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ \Delta^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) d\Omega + \qquad (10)$$

$$+\psi_{1n}^T R_2^T Q_{1n} + \psi_{2n}^T R_1^T Q_{2n} + \left[I_{1n}^T - Q_{1n}^T R_1 \right] \eta_{1n} + \left[I_{2n}^T - Q_{2n}^T R_2 \right] \eta_{2n} d\Omega \to \min,$$

где $[I]$ и $[0]$ — единичная и нулевая матрицы соответствующей размерности; $Q_j = \left[Q_{j_{pn}} \cdot \delta(X),\ p = \overline{1, P},\quad n = 1, N_j \right],\ j = 1, 2$ — неизвестные матрицы, определяющие разбиение вектора Δ на составляющие Δ^1 и Δ^2; $R_j = \left[R_j \right]_{P \times N_j}$ — матрицы, сформированные из ненулевых элементов матриц $[A]_{P \times N}^T \cdot \left[D_j \right]_{N \times N}$; I_{jn} — вектор-столбец размерности $N_j \times 1$, у которого на n-ой позиции стоит «1», а на остальных позициях — «0»; $\psi_{jr} = \left[\psi_{j_{pn}}, p = \overline{1, P} \right]^T$; $\eta_{jn} = \left[\eta_{j_{pn}}, p = \overline{1, P} \right]^T$ — соответствующие векторные множители Лагранжа; $Q_{jn} = \left[Q_{j_{pn}}, p = \overline{1, P}, n = \overline{1, N_j} \right]$ — вектор столбец искомых элементов матрицы Q_j. Требуется найти вид матриц Q_1, Q_2, обеспечивающих минимизацию функционала (10).

Так как функции принадлежности u_n^j компонент вектора Δ векторам Δ^j ($j = 1, 2$) ограничены $u_n^j \in \{0, 1\}$, $n = \overline{1, N_j}$ и множество U представляется в виде:

$$U = \{u_n^j\} = \{(u_1^j, u_2^j ... u_r^j) \big|\ u_n^j \in \{0, 1\}, n = \overline{1, N_j}\},$$

то функция $L(u) = \sum\limits_{n=1}^{N_j} J_2' u_n^j$ достигает своей нижней грани на U в точке $\overline{u}^j = \{\overline{u}_1^j, \ldots, \overline{u}_{N_j}^j\}$, где

$$\bar{u}_n^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (\psi_{in}^T R_j^T Q_{in} - Q_{in}^T R_i \eta_{in}) < 0, \\ 0, & \text{если} \quad (\psi_{in}^T R_j^T Q_{in} - Q_{in}^T R_i \eta_{in}) > 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$i, j = 1, 2 \; ; \; i \neq j \; ; \; i \leftrightarrow j \; ; \; n = \overline{1, N_j} \; .$$

Таким образом, сформулированное условие (11) позволяет определить принадлежность n-ой компоненты вектора Δ ($n = \overline{1, N}$) вектору Δ^1 или вектору Δ^2.

Необходимые условия оптимальности для определения матриц Q_1, Q_2 и множителей Лагранжа ψ_{jn}, η_{jn} могут быть получены дифференцированием сформулированного функционала по аргументам $Q_{jn}, \psi_{jn}, \eta_{jn}$. Полученные в результате преобразований выражения для матриц Q_j и множителей Лагранжа ψ_{jn}, η_{jn} используются для определения значений функций принадлежности из условия (11). В результате формируется вектор невязок $\Delta^1 = \left\{ \Delta_n^1 \right\}$, номера компонент которого и определяют номера информативных узлов сетки измерений X_p из общего числа узлов сетки конечно-элементной модели пластины. Значения компонент сформированного вектора используются при формировании функционала-невязки обратной задачи (4).

Результаты идентификации жесткости основания. Предложенный подход был применен для определения жесткости основания, на котором расположена пластина, находящаяся под действием равномерно распределенной внешней нагрузки. Пластина ($a = b = 0.75$ *м*; $h = 0.15$ *м*) описывается конечно-элементной моделью, составленной из четырехузловых элементов (общее количество элементов — 900), элемент предполагается изотропным с постоянной толщиной, сетка X_n является симметричной сеткой конечных размеров с постоянным шагом по осям.

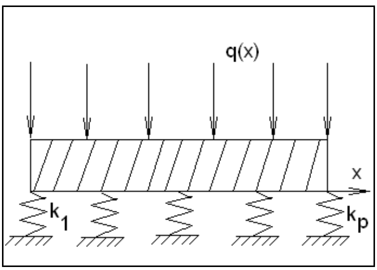

Рис. 1. *Модель пластины и основания*

Связь между пластиной и основанием моделируется установкой в каждом узле конечно-элементной сетки пластины пружины, прикладывающей жесткость в направлении перпендикулярном плоскости элемента пластины (вертикальное сечение пластины представлено на рис. 1). Пружины не связаны между собой. Значения коэффициентов жесткостей пружин, моделирующих жесткость основания, образуют вектор неизвестных обратной задачи $K = \{k_p\}$, подлежащий идентификации.

В результате решения прямой задачи было определено напряженно-деформированное состояние пластины, находящейся под действием заданной нагрузки, при известных значениях коэффициентов жесткости основания. В узлах конечно-элементной сетки X_n определены значения нормальных перемещений, которые в дальнейшем использовались в качестве значений вектора w^*.

Процесс восстановления значений коэффициентов жесткостей для разных случаев их распределения состоял из двух этапов:

1. Выбор начального приближения, т.е. определение значений параметров K_0, m, z аппроксимации (5) из решения задачи (6);
2. Уточнение компонент вектора $K = \{k_p\}$ из решения задачи (4); при формировании функционала в (4) используется набор узлов сетки измерений $r_p \subset \mathrm{P}$, полученный из условия (9).

На рис. 2, 3 приведены результаты выполнения этапов идентификации неоднородных свойств основания, моделирующих области местных ослаблений. Рассмотрены случаи, когда локальная неоднородность основания размещена ближе к центру пластины (соответствует рис. 2), и когда локальная неоднородность наблюдается вблизи угловой точки эпюры нагрузок (соответствует рис. 3). Приведенные на рисунках зависимости характеризуют распределение коэффициентов жесткостей по длине пластины (на рис. 2 для случая 1, кривые приведены при значениях $y = b/2$ и на рис. 3 для случая 2 при $y = 4b/5$). Аналогичные результаты были получены и при восстановлении распределения коэффициентов жесткостей по ширине пластины.

Для рассмотренных случаев идентификации начальное приближение, которое определено на первом этапе, обозначено на рисунках 2, 3 точечной линей, здесь же приведено действительное распределение коэффициентов жесткости основания (обозначено маркерами ♦). Видно, что выбор параметров аппроксимации (5) позволяет получить начальное приближение близкое к действительному распределению коэффициентов жесткости.

На этих же рисунках приведены результаты восстановления значений коэффициентов жесткости пружин на итерациях метода Ньютона с использованием начального приближения, выбранного на 1 этапе (маркерами ○ обозначен результат идентификации, штрихпунктирной и пунктирной линиями — приближения, полученные на 1 и 3 итерациях метода Ньютона).

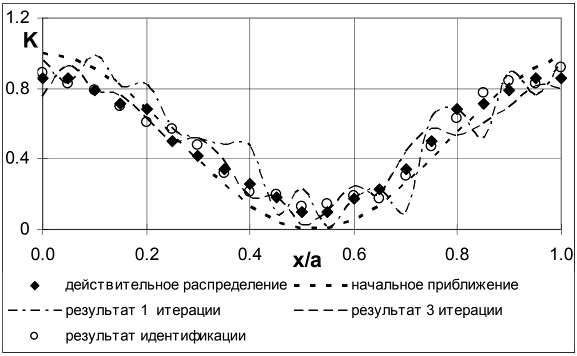

Рис. 2. *Результат идентификации коэффициента жесткости основания для случая локализации ослабления в центре пластины*

В результате выполнения итеративного процесса (7) наблюдается сходимость к действительной зависимости. Для рассмотренных случаев локальной неоднородности свойств основания погрешность восстановления не превышает 11%.

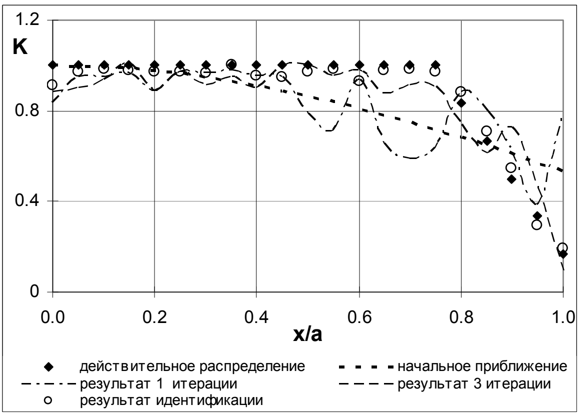

Рис. 3. *Результат идентификации коэффициента жесткости основания для случая локализации ослабления возле края пластины*

На рис. 4 для случая 1 приведен характер поведения функционала обратной задачи $J(K)$ на итерациях процедуры метода Ньютона.

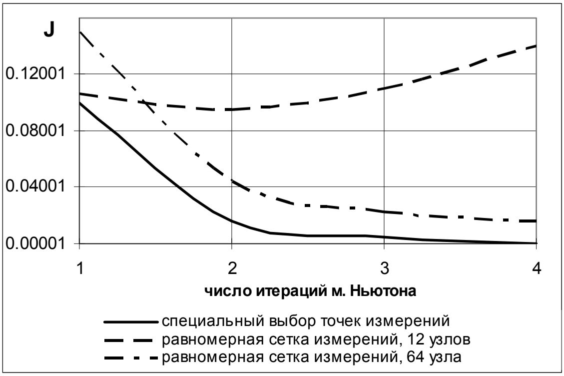

Рис. 4. *Зависимость значений функционалов, построенных с использованием разных сеток измерений, от числа итераций метода Ньютона*

Функционал построен с использованием различного числа узлов измерений, при этом узлы сетки измерений распределены равномерно по поверхности пластины (пунктирная кривая соответствует использованию при построении функционала обратной задачи 12 точек измерений; штрихпунктирная кривая — 64 точек измерений). Можно отметить, что при небольшом числе выбранных при построении функционала обратной задачи точек измерений, с увеличением номера итерации наблюдается увеличение значений функционала, что свидетельствует о расходимости итерационного процесса метода Ньютона. Увеличение числа узлов измерений приводит к изменению характера поведения функционала, значения функционала на итерациях уменьшаются.

Здесь же сплошной линией приведена зависимость значений функционала на итерациях метода Ньютона, построенного с использованием узлов сетки измерений, выбранных так, чтобы выполнялось условие (9). В результате выполнения этого условия были выбраны 32 узла наблюдения для идентификации коэффициентов жесткостей в случае 1 и 26 узлов наблюдения в случае 2. Следует отметить, что их распределение по поверхности пластины не было равномерным. Большая часть была сконцентрирована в области, где наблюдалась неоднородность свойств.

Из анализа рис. 4 видно, что специальный выбор точек измерения приводит к более быстрому уменьшению функционала — невязки $J(K)$ на итерациях, удовлетворительная точность восстановления неизвестной функции обратной задачи достигается уже на 3 итерации метода Ньютона. Кроме того, предложенный способ выбора точек измерений позволяет определить их количество необходимое для идентификации.

Выводы. В работе предложены математическая модель и метод идентификации жесткости основания, на котором расположена пластина, по результатам наблюдения за ее напряженно-деформированным состоянием. Регуляризация обратной задачи осуществляется путем использования вариационной постановки и предложенного алгоритмом выбора местоположения и числа точек измерений. Анализ результатов вычислительного эксперимента показал высокую эффективность восстановления неоднородных свойств основания, моделирующих области местных ослаблений.

Список использованной литературы:

1. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. — М. : Стройиздат, 1960. — 491 с.
2. Бугров А. К. Механика грунтов / А. К. Бугров. — СПб. : СПбГПУ, 2007. — 342 с.
3. Строкова Л. А. Определение параметров для численного моделирования поведения грунтов / Л. А. Строкова // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 313, № 1. — С. 121–127.
4. Ободан Н. І. Обернена задача визначення зовнішніх навантажень при деформації тонкостінних оболонок / Н. І. Ободан, Н. А. Гук // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2011. — № 1. — С. 47–50.
5. Ободан Н. И. Идентификация обратных задач деформирования тонкостенных оболочек методом декомпозиции / Н. И. Ободан, Н. А. Гук // Математичні методи і фізико-механічні поля. — 2010. — Т. 53, № 3. — С. 105–116.

The problem of identification of heterogeneous properties of founding by results of indirect observation is considered. Winkler's model for description of soil behavior is used. The vector of unknown coefficient of inflexibility is defined from the solution of the inverse problem formulated in variation statement. Results of identification of inflexibility coefficient vector for various cases of location of heterogeneities of founding are given.

Key words: *inverse problem, plate, founding, Winkler's model, coefficient of inflexibility.*

Отримано: 20.09.2012