УДК 517.52/524:517.58/589

М. П. Ленюк, д-р фіз.-мат. наук, професор,
О. М. Нікітіна, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький факультет Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ПІДСУМОВУВАННЯ ПОЛІПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА — ЛЕЖАНДРА — ФУР'Є НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом порівняння розв'язків, побудованих на сегменті полярної осі з двома точками спряження для сепаратної системи із диференціальних рівнянь Ейлера, Лежандра та Фур'є для модифікованих функцій методом функцій Коші й методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення, підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера — Лежандра — Фур'є.

Ключові слова: *функції Коші, функції Гріна, функції впливу, головні розв'язки, умова однозначної розв'язності, власні елементи, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, логічна схема.*

Постановка проблеми. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують напружений стан композита, виражаються у вигляді поліпараметричного функціонального ряду, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Підсумовуванню однієї сім'ї функціональних рядів присвячена пропонована стаття.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині $I_2 = \{r: \ r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 > 0, R_3 < \infty\}$ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, Лежандра та Фур'є для модифікованих функцій

$$\left(B_\alpha^* - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$\left(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2\right)u_2(r)=-g_2(r),\quad r\in(R_1,R_2)\ , \tag{1}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_3^2\right)u_3(r)=-g_3(r),\quad r\in(R_2,R_3)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)u_1(r)\Big|_{r=R_0}=g_0,\ \left(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3\right)u_3(r)\Big|_{r=R_3}=g_R \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk},\quad j,k=1,2. \tag{3}$$

У рівностях (1) беруть участь диференціальні оператори Ейлера B_α^* [1], Лежандра $\Lambda_{(\mu)}$ [2] та Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [1]:

$$B_\alpha^*=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)r\frac{d}{dr}+\alpha^2,$$

$$\Lambda_{(\mu)}=\frac{d^2}{dr^2}+cthr\frac{d}{dr}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr}+\frac{\mu_2^2}{1+chr}\right),$$

$$(\mu)=(\mu_1,\mu_2),\quad \mu_1\ge\mu_2\ge 0,\quad 2\alpha+1>0\ .$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0\le 0$, $\beta_{11}^0\ge 0$, $\alpha_{22}^3\ge 0$, $\beta_{22}^3\ge 0$, $|\alpha_{11}^0|+\beta_{11}^0\ne 0$, $\alpha_{22}^3+\beta_{22}^3\ne 0$; $\alpha_{jm}^k\ge 0$, $\beta_{jm}^k\ge 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$; $j,m,k=1,2$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^*-q_1^2)v=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $r^{-\alpha-q_1}$ та $r^{-\alpha+q_1}$ [1], фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2)v=0$ утворюють функції $P_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr)$ та $L_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr)$ [2], фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2}-q_3^2)v=0$ утворюють функції chq_3r та shq_3r [1].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (1)—(3) методом функцій Коші [1; 3]:

$$u_1(r)=A_1r^{-\alpha-q_1}+B_1r^{-\alpha+q_1}+\int_{R_0}^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho\ ,$$

$$u_2(r) = A_2 P_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr) + B_2 L_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr) + \int\limits_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) sh\rho d\rho\,, \qquad (4)$$

$$u_3(r) = A_3 chq_3 r + B_3 shq_3 r + \int\limits_{R_2}^{R_3} E_3(r,\rho) g_3(\rho) d\rho\,.$$

У рівностях (4) беруть участь функції Коші [1; 3]:

$$E_1(r,\rho) = -\frac{1}{2q_1 \Delta_{\alpha;11}(q_1;R_0;R_1)} \begin{cases} \Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,r)\Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1,\rho), \; R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,\rho)\Psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1,r), \; R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \qquad (5)$$

$$E_2(r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} \times$$

$$\times \begin{cases} F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, chr) F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho), \quad R_1 < r < \rho < R_2, \\ F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho) F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, chr), \quad R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \qquad (6)$$

$$E_3(r,\rho) = -\frac{1}{q_3 \Delta_{12}(q_3 R_2, q_3 R_3)} \times$$

$$\times \begin{cases} \Phi_{12}^2(q_3R_2, q_3r)\Phi_{22}^3(q_3R_3, q_3\rho), \quad R_2 < r < \rho < R_3, \\ \Phi_{12}^2(q_3R_2, q_3\rho)\Phi_{22}^3(q_3R_3, q_3r), \quad R_2 < \rho < r < R_3. \end{cases} \qquad (7)$$

Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин A_j, $B_j (j = \overline{1,3})$ дають неоднорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$Z_{\alpha;11}^{01}(q_1,R_0)A_1 + Z_{\alpha;11}^{02}(q_1,R_0)B_1 = g_0,$$

$$Z_{\alpha;j1}^{11}(q_1,R_1)A_1 + Z_{\alpha;j1}^{12}(q_1,R_1)B_1 - Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu),11}(chR_1)A_2 - Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu),12}(chR_1)B_2 = \omega_{j1} + \delta_{j2}G_{12},$$

$$Z_{\upsilon_2;j1}^{(\mu),21}(chR_2)A_2 + Z_{\upsilon_2;j1}^{(\mu),22}(chR_2)B_2 - V_{j2}^{21}(q_3R_2)A_3 - V_{j2}^{22}(q_3R_2)B_3 = \omega_{j2} + \delta_{j2}G_{23},$$

$$V_{22}^{31}(q_3R_3)A_3 + V_{22}^{32}(q_3R_3)B_3 = g_R. \qquad (8)$$

У системі (8) беруть участь функції

$$G_{12} = -\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \int\limits_{R_0}^{R_1} \frac{\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,\rho)}{\Delta_{\alpha;11}(q_1;R_0,R_1)} g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1} d\rho -$$

$$-\frac{c_{21}}{shR_1} \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} \times g_2(\rho) sh\rho d\rho,$$

$$G_{23} = \frac{c_{12}}{shR_2} \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} g_2(\rho) sh\rho d\rho + c_{22} \int\limits_{R_2}^{R_3} \frac{\Phi_{22}^3(q_3R_3, q_3\rho)}{\Delta_{12}(q_3R_2, q_3R_3)} g_3(\rho) d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} ($\delta_{12}=0, \delta_{22}=1$).

У рівностях (5)—(7) прийняті позначення:

$$\Delta_{\alpha;j1}(q_1;R_0,R_1)=Z^{01}_{\alpha;11}(q_1,R_0)Z^{12}_{\alpha;j1}(q_1,R_1)-Z^{02}_{\alpha;11}(q_1,R_0)Z^{11}_{\alpha;j1}(q_1,R_1); \quad j=1,2;$$

$$\Delta^{(\mu)}_{\upsilon_2;jk}(chR_1,chR_2)=Z^{(\mu);11}_{\upsilon_2;j2}(chR_1)Z^{(\mu);22}_{\upsilon_2;k1}(chR_2)-Z^{(\mu);12}_{\upsilon_2;j2}(chR_1)Z^{(\mu);21}_{\upsilon_2;k1}(chR_2);$$

$$\Delta_{j2}(q_3R_2,q_3R_3)=V^{21}_{j2}(q_3R_2)V^{32}_{22}(q_3R_3)-V^{22}_{j2}(q_3R_2)V^{31}_{22}(q_3R_3), \quad j,k=1,2 .$$

Всі інші функції загальновідомі [4].

Введемо до розгляду функції:

$$A^{(\mu)}_{\alpha;j}(q)=\Delta_{\alpha;11}(q_1;R_0,R_1)\Delta^{(\mu)}_{\upsilon_2;2j}(chR_1,chR_2)-\Delta_{\alpha;21}(q_1;R_0,R_1)\Delta^{(\mu)}_{\upsilon_2;1j}(chR_1,chR_2),$$

$$B_{(\mu);j}(q)=\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)\Delta^{(\mu)}_{\upsilon_2;j1}(chR_1,chR_2)-\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)\Delta^{(\mu)}_{\upsilon_2;j2}(chR_1,chR_2),$$

$$\Theta^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,q)=\Delta_{\alpha;21}(q_1;R_0,R_1)F^{(\mu),1}_{\upsilon_2;12}(chR_1,chr)-\Delta_{\alpha;11}(q_1;R_0,R_1)F^{(\mu),1}_{\upsilon_2;22}(chR_1,chr),$$

$$\Theta_{(\mu);2}(r,q)=\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)F^{(\mu),2}_{\upsilon_2;21}(chR_2,chr)-\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)F^{(\mu),2}_{\upsilon_2;11}(chR_2,chr).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (8) відмінний від нуля [5]:

$$\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)\equiv A^{(\mu)}_{\alpha;1}(q)\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)-A^{(\mu)}_{\alpha;2}(q)\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)=$$
$$=\Delta_{\alpha;11}(q_1;R_0,R_1)B_{(\mu);2}(q)-\Delta_{\alpha;21}(q_1;R_0,R_1)B_{(\mu);1}(q)\neq 0 . \qquad (9)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)—(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\alpha;11}(r,q)=\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}[B_{(\mu);2}(q)\Psi^{1*}_{\alpha;11}(q_1,r)-B_{(\mu);1}(q)\Psi^{1*}_{\alpha;21}(q_1,r)], \qquad (10)$$

$$W^{(\mu)}_{\alpha;12}(r,q)=-\frac{2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{\Theta_{(\mu);2}(r,q)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)},$$

$$W^{(\mu)}_{\alpha;13}(r,q)=-\frac{2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{c_{12}}{B_{(\mu)}shR_2}\frac{\Phi^3_{22}(q_3R_3,q_3r)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)};$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\alpha;31}(r,q)=\frac{c_{21}c_{22}q_3}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\frac{\Psi^{0*}_{\alpha;11}(q_1,r)}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)},$$

$$W^{(\mu)}_{\alpha;32}(r,q)=\frac{c_{22}q_3}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}\Theta^{(\mu)}_{\alpha;1}(r,q), \qquad (11)$$

$$W^{(\mu)}_{\alpha;33}(r,q)=\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\alpha}(q)}[A^{(\mu)}_{\alpha;2}(q)\Phi^2_{12}(q_3R_2,q_3r)-A^{(\mu)}_{\alpha;1}(q)\Phi^2_{22}(q_3R_2,q_3r)];$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\alpha;11}^{(\mu);1}(r,q) = -\frac{B_{(\mu);2}(q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,r), \quad R_{\alpha;21}^{(\mu);1}(r,q) = \frac{B_{(\mu);1}(q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,r),$$

$$R_{\alpha;12}^{(\mu);1}(r,q) = -\frac{c_{21}}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\frac{\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,r),$$

$$R_{\alpha;22}^{(\mu);1}(r,q) = \frac{c_{21}}{B_{(\mu)}shR_1}\times\frac{\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,r),$$

$$R_{\alpha;11}^{(\mu);2}(r,q) = \frac{\Delta_{\alpha;21}(q_1;R_0,R_1)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Theta_{(\mu);2}(r,q), \tag{12}$$

$$R_{\alpha;21}^{(\mu);2}(r,q) = -\frac{\Delta_{\alpha;11}(q_1;R_0,R_1)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Theta_{(\mu);2}(r,q),$$

$$R_{\alpha;12}^{(\mu);2}(r,q) = -\frac{\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\times\Theta_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,q),$$

$$R_{\alpha;22}^{(\mu);2}(r,q) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Theta_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,q),$$

$$R_{\alpha;11}^{(\mu);3}(r,q) = \frac{c_{12}\Delta_{\alpha;21}(q_1R_0,R_1)}{B_{(\mu)}shR_2\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\times\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3r),$$

$$R_{\alpha;21}^{(\mu);3}(r,q) = -\frac{c_{12}}{B_{(\mu)}shR_2}\frac{1}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Delta_{\alpha;11}(q_1;R_0,R_1)\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3r),$$

$$R_{\alpha;12}^{(\mu);3}(r,q) = \frac{A_{\alpha;2}^{(\mu)}(q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3r),$$

$$R_{\alpha;22}^{(\mu);3}(r,q) = -\frac{A_{\alpha;1}^{(\mu)}(q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3r);$$

4) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{\alpha;11}^{(\mu)}(r,\rho,q) = -\frac{1}{2q_1}\begin{cases}\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,r)W_{\alpha;11}^{(\mu)}(\rho,q), & R_0 < r < \rho < R_1,\\ \Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,\rho)W_{\alpha;11}^{(\mu)}(r,q), & R_0 < \rho < r < R_1,\end{cases}$$

$$H_{\alpha;12}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{shR_1}\frac{\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,r)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Theta_{(\mu);2}(\rho,q),$$

$$H_{\alpha;13}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}c_{22}}{B_{(\mu)}shR_1}\frac{\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,r)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\times\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3\rho),$$

$$H_{\alpha;21}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \frac{\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,\rho)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)} \Theta_{(\mu);2}(r,q)\,,$$

$$H_{\alpha;22}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)} \begin{cases} \Theta_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,q)\Theta_{(\mu);2}(\rho,q), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Theta_{\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,q)\Theta_{(\mu);2}(r,q), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \tag{13}$$

$$H_{\alpha;23}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{c_{22}}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)} \Theta_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,q)\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3\rho)\,,$$

$$H_{\alpha;31}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}c_{12}}{R_1^{2\alpha+1}B_{(\mu)}shR_2} \times \frac{\Psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,\rho)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)} \Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3r)\,,$$

$$H_{\alpha;32}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{c_{12}}{shR_2} \frac{\Theta_{\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)} \Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3r)\,,$$

$$H_{\alpha;33}^{(\mu)}(r,\rho,q) = \frac{1}{q_3} \begin{cases} W_{\alpha;33}^{(\mu)}(r,q)\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3\rho), & R_2 < r < \rho < R_3, \\ W_{\alpha;33}^{(\mu)}(\rho,q)\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3r), & R_2 < \rho < r < R_3. \end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (8) й підстановки отриманих за правилами Крамера [5] значень A_j, $B_j\,(j=\overline{1,3})$ у формули (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)—(3):

$$\begin{aligned} u_j(r) &= W_{\alpha;1j}^{(\mu)}(r,q)g_0 + \sum_{m,k=1}^{2} R_{\alpha;mk}^{(\mu);j}(r,q)\omega_{mk} + W_{\alpha;3j}^{(\mu)}(r,q)g_R + \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\int_{R_{i-1}}^{R_i} H_{\alpha;ji}^{(\mu)}(r,\rho,q)g_i(\rho)\varphi_i(\rho)d\rho, \quad j=\overline{1,3}, \end{aligned} \tag{14}$$

де $\varphi_1(r) = r^{2\alpha-1}$, $\varphi_2(r) = shr$, $\varphi_3(r) = 1$.

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)—(3) методом гібридного інтегрального перетворення, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\begin{aligned} M_\alpha^{(\mu)} &= \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B_\alpha^* + \theta(r-R_1)\times \\ &\times\theta(R_2-r)\Lambda_{(\mu)} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\frac{d^2}{dr^2}, \end{aligned} \tag{15}$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3].

Диференціальний оператор $M_\alpha^{(\mu)}$ самоспряжений і на множині I_2 не має особливої точки. Отже, спектр його неперервний і дискретний [6]. Власні елементи ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$ знайдемо як ненульовий розв'язок спектральної задачі Штурма — Ліувілля, породженої ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$.

Нехай β — спектральний параметр (власне число), а функції $V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ — компоненти спектральної вектор-функції

$$V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)=\sum_{j=1}^{3}\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta). \tag{16}$$

При цьому функції $V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{gathered}\left(B_{\alpha}^{*}+b_1^2\right)V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\ \ r\in(R_0,R_1),\ \ b_1^2=\beta^2+k_1^2,\ \ k_1^2\ge 0\,,\\ \left(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2\right)V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\ \ r\in(R_1,R_2),\ \ b_2^2=\beta^2+k_2^2,\ \ k_2^2\ge 0\,,\\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+b_3^2\right)V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\ \ r\in(R_2,R_3),\ \ b_3^2=\beta^2+k_3^2,\ \ k_3^2\ge 0\,,\end{gathered} \tag{17}$$

однорідні крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{0}\right)V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}=0,\ \left(\alpha_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{3}\right)V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\Big|_{r=R_3}=0 \tag{18}$$

та однорідні умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)V_{\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)V_{\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k}=0, \quad j,k=1,2. \tag{19}$$

Наявність фундаментальної системи розв'язків ($r^{-\alpha}\cos(b_1\ln r)$ та $r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r)$ для першого рівняння, $A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)$ для другого рівняння та $\cos b_3 r$ й $\sin b_3 r$ для третього рівняння; ($\upsilon_2^*=-1/2+ib_2$) в силу лінійності спектральної задачі (17)—(19) дозволяє зобразити функції $V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків:

$$\begin{gathered}V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=A_1 r^{-\alpha}\cos(b_1\ln r)+B_1 r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r),\ \ r\in(R_0,R_1),\\ V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)=A_2 A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)+B_2 B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr),\ \ r\in(R_1,R_2)\,,\\ V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)=A_3\cos b_3 r+B_3\sin b_3 r,\ \ r\in(R_2,R_3)\,.\end{gathered} \tag{20}$$

Крайові умови (18) та умови спряження (19) для визначення шести величин $A_j, B_j\,(j=\overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$Y_{\alpha;11}^{01}(b_1,R_0)A_1+Y_{\alpha;11}^{02}(b_1,R_0)B_1=0,$$

$$Y^{11}_{\alpha;j1}(b_1,R_1)A_1+Y^{12}_{\alpha;j1}(b_1,R_1)B_1-Y^{(\mu),11}_{\upsilon_2^*;j2}(chR_1)A_2-Y^{(\mu),12}_{\upsilon_2^*;j2}(chR_1)B_2=0,$$

$$j=1,2;$$

$$Y^{(\mu),21}_{\upsilon_2^*;j1}(chR_2)A_2+Y^{(\mu),22}_{\upsilon_2^*;j1}(chR_2)B_2-v^{21}_{j2}(b_3R_2)A_3-v^{22}_{j2}(b_3R_2)B_3=0, \quad (21)$$

$$v^{31}_{22}(b_3R_3)A_3+v^{32}_{22}(b_3R_3)B_3=0.$$

Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{\alpha;j1}(b_1;R_0,R_1)=Y^{01}_{\alpha;11}(b_1,R_0)Y^{12}_{\alpha;j1}(b_1,R_1)-Y^{02}_{\alpha;11}(b_1,R_0)Y^{11}_{\alpha;j1}(b_1,R_1);\ j=1,2;$$

$$\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;jk}(chR_1,chR_2)=Y^{(\mu),11}_{\upsilon_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu),22}_{\upsilon_2^*;k1}(chR_2)-Y^{(\mu),12}_{\upsilon_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu),21}_{\upsilon_2^*;k1}(chR_2);$$

$$\delta_{j2}(b_3R_2,b_3R_3)=v^{21}_{j2}(b_3R_2)v^{32}_{22}(b_3R_3)-v^{22}_{j2}(b_3R_2)v^{31}_{22}(b_3R_3),\ j=1,2;$$

$$a^{(\mu)}_{\alpha;j}(\beta)=\delta_{\alpha;11}(b_1;R_0,R_1)\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;2j}(chR_1,chR_2)-\delta_{\alpha;21}(b_1;R_0,R_1)\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;1j}(chR_1,chR_2).$$

Для того, щоб алгебраїчна система (21) мала ненульові розв'язки, необхідно і досить, щоб її визначник дорівнював нулю [5]:

$$\delta^{(\mu)}_{\alpha}(\beta)\equiv a^{(\mu)}_{\alpha;1}(\beta)\delta_{22}(b_3R_2,b_3R_3)-a^{(\mu)}_{\alpha;2}(\beta)\delta_{12}(b_3R_2,b_3R_3)=0. \quad (22)$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M^{(\mu)}_{\alpha}$.

Підставимо в систему (21) $\beta=\beta_n$ $(b_j(\beta_n)\equiv b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Алгебраїчна система з п'яти рівнянь, що залишилися, сумісна [5]. Її розв'язок будується стандартним способом.

Припустимо, що $A_1=A_0Y^{02}_{\alpha;11}(b_{1n},R_0)$, $B_1=-A_0Y^{01}_{\alpha;11}(b_{1n},R_0)$, де $A_0\neq 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи перетворюється в тотожню рівність. Для знаходження A_2, B_2 маємо алгебраїчну систему:

$$Y^{(\mu),11}_{\upsilon_{2n}^*;j2}(chR_1)A_2+Y^{(\mu),12}_{\upsilon_{2n}^*;j2}(chR_1)B_2=-A_0\delta_{\alpha;j1}(b_{1n};R_0,R_1),\quad j=1,2 \quad (23)$$

Оскільки визначник системи (23)

$$q_{(\mu)}(\beta_n)=c_{21}(s_{(\mu)}(b_{2n})shR_1)^{-1}\neq 0,$$

то алгебраїчна система (23) має єдиний розв'язок:

$$A_2=$$

$$=\frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)}\left[\delta_{\alpha;21}(b_{1n};R_0,R_1)Y^{(\mu),12}_{\upsilon_{2n}^*;12}(chR_1)-\delta_{\alpha;11}(b_{1n};R_0,R_1)Y^{(\mu),12}_{\upsilon_{2n}^*;22}(chR_1)\right], \quad (24)$$

$$B_2=$$

$$=\frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)}\left[\delta_{\alpha;11}(b_{1n};R_0,R_1)Y^{(\mu),11}_{\upsilon_{2n}^*;22}(chR_1)-\delta_{\alpha;21}(b_{1n};R_0,R_1)Y^{(\mu),11}_{\upsilon_{2n}^*;12}(chR_1)\right].$$

При відомих A_2, B_2 для визначення A_3, B_3 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$v_{j2}^{21}(b_{3n}R_2)A_3 + v_{j2}^{22}(b_{3n}R_2)B_3 = A_0[q_{(\mu)}(\beta_n)]^{-1} a_{\alpha;j}^{(\mu)}(\beta_n); \quad j = 1,2. \tag{25}$$

Алгебраїчна система (25) має єдиний розв'язок [5]:

$$A_0 = q_{(\mu)}(\beta_n)c_{22}b_{3n}, \quad A_3 = \omega_{\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n), \quad B_3 = -\omega_{\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n); \tag{26}$$

$$\omega_{\alpha;j}^{(\mu)}(\beta_n) = a_{\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n)v_{22}^{2j}(b_{3n}R_2) - a_{\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n)v_{12}^{2j}(b_{3n}R_2), \quad j = 1,2.$$

Підставивши визначені формулами (24) і (26) величини $A_j, B_j\,(j = \overline{1,3})$ у рівності (20), одержуємо функції:

$$V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n) = q_{(\mu)}(\beta_n)c_{22}b_{3n}[Y_{\alpha;11}^{02}(b_{1n},R_0)r^{-\alpha}\cos(b_{1n}\ln r) -$$

$$-Y_{\alpha;11}^{01}(b_{1n},R_0)r^{-\alpha}\sin(b_{1n}\ln r)]; \quad V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n) = c_{22}b_{3n}[\delta_{\alpha;11}(b_{1n};R_0,R_1)\times$$

$$\times F_{\upsilon_{2n}^*;22}^{(\mu),1}(chR_1,chr) - \delta_{\alpha;21}(b_{1n};R_0,R_1)F_{\upsilon_{2n}^*;12}^{(\mu),1}(chR_1,chr)]; \tag{27}$$

$$V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n) = \omega_{\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n)\cos(b_{3n}r) - \omega_{\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n)\sin(b_{3n}r);$$

$$F_{\upsilon_{2n}^*;j2}^{(\mu),1}(chR_1,chr) = Y_{\upsilon_{2n}^*;j2}^{(\mu),11}(chR_1)B_{\upsilon_{2n}^*}^{(\mu)}(chr) - Y_{\upsilon_{2n}^*;j2}^{(\mu),12}(chR_1)A_{\upsilon_{2n}^*}^{(\mu)}(chr), \; j = 1,2.$$

Згідно рівності (16) спектральна вектор-функція $V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)$ стає відомою.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{shR_1}{shR_2}R_1^{-(2\alpha+1)}, \; \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{1}{shR_2}, \; \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\begin{aligned}\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha-1} + \theta(r-R_1)\times \\ \times\theta(R_2-r)\sigma_2 shr + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3\end{aligned} \tag{28}$$

та квадрат норми спектральної вектор-функції

$$\| V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\|^2 = \int_{R_0}^{R_3}[V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2\sigma(r)dr \equiv \sum_{k=1}^{3}\int_{R_{k-1}}^{R_k}[V_{\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2\sigma_k\varphi_k(r)dr. \tag{29}$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної вектор-функції $V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)$ з її квадратом норми $\| V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\|^2$ дозволяє визначити пряме $H_\alpha^{(\mu)}$ та обернене $H_\alpha^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$:

$$H_\alpha^{(\mu)}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_3} g(r)V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n, \tag{30}$$

$$H_{\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \frac{V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\| V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \|^2} \equiv g(r). \quad (31)$$

Згідно з роботою [6] маємо твердження:

1) корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{\alpha}^{(\mu)}(\beta) = 0$ утворюють для ГДО $M_{\alpha}^{(\mu)}$ дискретний спектр; 2) система $\left\{V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ власних функцій ортогональна на множині I_2 з вагового функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена; 3) будь-яка вектор-функція $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з області визначення ГДО $M_{\alpha}^{(\mu)}$ зображається за системою $\left\{V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R_3} g(\rho) V_{\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n) \sigma(\rho) d\rho \frac{V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\| V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \|^2}. \quad (32)$$

У подальшому перейдемо до ортонормованої системи власних функцій

$$\left\{v_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \cdot \left\| V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right\|^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Ряд Фур'є (32) має спрощений вигляд:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R_3} g(\rho) v_{\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n) \sigma(\rho) d\rho \quad v_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n). \quad (33)$$

При цьому формули (30), (31) набувають вигляду:

$$H_{\alpha}^{(\mu)}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_3} g(r) v_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n, \quad (34)$$

$$H_{\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv g(r). \quad (35)$$

Введемо до розгляду величини та функції:

$$d_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha+1} \cdot c_{11}^{-1}, \quad d_2 = \sigma_2 sh R_2 \cdot c_{12}^{-1}; \quad \tilde{g}_{1n} = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) v_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n) \sigma_1 r^{2\alpha-1} dr,$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) v_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n) \sigma_2 shr dr, \quad \tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) v_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n) \sigma_3 dr,$$

$$Z_{\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta_n) = \left(\alpha_{i2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{i2}^k\right) v_{\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k}, i,k = 1,2.$$

В основі застосування правил (34), (35) знаходиться основна тотожність СГІП ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$ [6]:

$$H_\alpha^{(\mu)}[M_\alpha^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta_n^2\tilde{g}_n - \sum_{i=1}^{3} k_i^2\tilde{g}_{in} + (-\alpha_{11}^0)^{-1} v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)\sigma_1 R_0^{2\alpha+1} g_0 +$$

$$+(\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\sigma_3 g_R + \sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}]. \quad (36)$$

Побудовані правила (34), (35) та (36) складають математичний апарат для розв'язання крайової задачі (1)—(3) за відомою логічною схемою [7].

Запишемо систему (1) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(B_\alpha^* - q_1^2\right)u_1(r) \\ \left(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2\right)u_2(r) \\ \left(\dfrac{d^2}{dr^2} - q_3^2\right)u_3(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Інтегральний оператор $H_\alpha^{(\mu)}$ згідно правила (34) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_\alpha^{(\mu)}[\cdots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \cdots v_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots v_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 shr dr \times \right.$$

$$\left. \times \int_{R_2}^{R_3} \cdots v_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 dr \right]. \quad (38)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (38) за правилом множення матриць до системи (37). Внаслідок основної тотожності (36) одержуємо алгебраїчне рівняння:

$$(\beta_n^2 + q^2)\tilde{u}_n = \tilde{g}_n + (-\alpha_{11}^0)^{-1} v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)\sigma_1 R_0^{2\alpha+1} g_0 + (\alpha_{22}^3)^{-1} v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\sigma_3 g_R +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{\alpha;12}^{(\mu);k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\alpha;22}^{(\mu);k}(\beta_n)\omega_{1k}]; \quad q^2 = \max\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\}.$$

Звідси знаходимо, що функція

$$\tilde{u}_n = \frac{\tilde{g}_n}{\beta_n^2 + q^2} + \frac{v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2 + q^2)}\sigma_1 R_0^{2\alpha+1} g_0 + \frac{v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2 + q^2)} g_R +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k \left[\frac{Z_{\alpha;12}^{(\mu);k}(\beta_n)}{\beta_n^2 + q^2}\omega_{2k} - \frac{Z_{\alpha;22}^{(\mu);k}(\beta_n)}{\beta_n^2 + q^2}\omega_{1k} \right]. \quad (39)$$

Оператор $H_\alpha^{-(\mu)}$ згідно правила (35) як обернений до (38) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_\alpha^{-(\mu)}[\cdots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n) \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (40) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n]$, де функція $\tilde{u}_n$ визначена формулою (39). У результаті елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)—(3):

$$\begin{aligned} u_j(r) = {} & \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2 + q^2} v_{\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta_n) \right) g_k(\rho)\sigma_k \varphi_k(\rho) d\rho + \\ & + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+q^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right) \sigma_1 R_0^{2\alpha+1} g_0 + \\ & + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+q^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right) g_R + \\ & + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right) \omega_{2k} - \right. \\ & \left. - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right) \omega_{1k} \right], \ j = \overline{1,3}. \end{aligned} \tag{41}$$

Порівнюючи розв'язки (14) та (41) в силу теореми єдиності, одержуємо такі формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+q^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) = (\sigma_1 R_0^{2\alpha+1})^{-1} W_{\alpha;1j}^{(\mu)}(r,q) \quad j=\overline{1,3}, \tag{42}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+q^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) = \sigma_3^{-1} W_{\alpha;3j}^{(\mu)}(r,q) \quad j=\overline{1,3}, \sigma_3 = 1, \tag{43}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n) = d_k^{-1} R_{\alpha;2k}^{(\mu),j}(r,q); \quad k=1,2; \quad j=\overline{1,3}, \tag{44}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n) = -d_k^{-1} R_{\alpha;1k}^{(\mu),j}(r,q); \quad k=1,2; \quad j=\overline{1,3}, \quad (45)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} v_{\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta_n) = \sigma_k^{-1} H_{\alpha;jk}^{(\mu)}(r,\rho,q); \quad j,k=\overline{1,3}. \quad (46)$$

Підсумком виконаного дослідження є твердження.

Теорема. Якщо вектор-функція $f(r)=\{B_\alpha^*[g_1(r)];\Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; g_3''(r)\}$ неперервна на множині I_2, функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3) і виконується умова (9) однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3), то мають місце формули (42)—(46) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$, визначеного рівністю (15).

Зауваження 1. Якщо $q^2=q_1^2$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2\geq 0$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2\geq 0$; якщо $q^2=q_2^2>0$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\geq 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=q_2^2-q_3^2\geq 0$; якщо $q^2=q_3^2>0$, то $k_1^2=q_3^2-q_1^2\geq 0$, $k_2^2=q_3^2-q_2^2\geq 0$, $k_3^2=0$.

Зауваження 2. Оскільки праві частини рівностей (42)—(46) не залежать від нерівностей $(q_j^2-q_m^2)\geq 0$, то можна при необхідності покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q_0^2>0$.

Зауваження 3. Використані в цій статті функції загальновідомі [4; 7].

Висновок. Одержані формули (42)—(46) підсумовування функціональних рядів поповнюють математичний довідник у розділі «Підсумовування функціональних рядів». Вони можуть бути використані при вивченні стаціонарного стану композитів у випадку теплового або механічного миттєвого удару, при доведенні існування розв'язку мішаних задач математичної фізики неоднорідних середовищ тощо.

Список використаних джерел:

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
2. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера—Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 246 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Ленюк М. П. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридних диференціальних операторів / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2011. — Том VIII. — 332 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.

6. Комаров Г. М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку / Г. М. Комаров, М. П. Ленюк, В. В. Мороз. — Чернівці : Прут, 2001. — 228 с.
7. Ленюк М. П. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економічна думка, 2012. — Т. 2. — 308 с.

The method of comparison solutions, built on the segment polar axis with two points of interface for separate system of differential equations of Euler, Legendre and Fourier modified functions by Cauchy functions and by age-dpovidnoho finite hybrid integral transformation, summarized polyparametric family functional rows by own elements hybrid differential Euler — Legendre — Fourier.

Key words: *Cauchy functions, Green's functions, features influence, major interchanges, the unique solvability, custom elements, hybrid integral transformation, then main-tozhnist, logic circuit.*

Отримано: 14.09.2012

УДК 519.71:510.22:629.78

М. М. Личак, д-р фіз.-мат. наук, професор,
А. В. Кравченко, аспірантка

Інститут космічних досліджень НАН та ДКА України, м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ДИСКРЕТНОГО КЕРУВАННЯ ОРІЄНТАЦІЄЮ КОСМІЧНОГО АПАРАТУ

Моделюється процес дискретного керування неперервним обертовим рухом (навколо центру мас) космічного апарату (КА). Для цього використовується математична модель обертового руху твердого тіла у вигляді системи із шести нелінійних диференціальних рівнянь, а також апроксимаційна модель процесу дискретного керування цим рухом у вигляді системи нелінійних різницевих рівнянь. Побудоване оптимальне за швидкодією дискретне керування для переводу системи в режим орієнтації, а також стабілізуюче обмежене за величиною керування. Проведене моделювання роботи замкнутої системи підтвердило ефективність керування при завадах вимірювань, та навіть коли не всі параметри орієнтації вимірюються.

Ключові слова: *математичне моделювання, дискретне керування, космічний апарат, обертовий рух, режим орієнтації, різницеві рівняння, оптимізація, стабілізація, завади вимірювань.*

Вступ. Розглядається процес дискретного керування неперервним обертовим рухом (навколо центру мас) космічного апарату (КА), коли він рухається навколо Землі по круговій орбіті [1, с. 31—33; 2, с. 135—136; 3. с. 48—69; 4, с. 160—173]. При цьому вимірювання параметрів

