We study the question of comparison of minimal expected costs in cases centralized and decentralized inventory models if demand is normally distributed.

Key words: *optimal lot size, minimization of holding and stock-out costs, single-period inventory models.*

Отримано: 20.09.2012

УДК 517.937

В. А. Літовченко, д-р фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

СИЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Сформульовано та доведено теорему про сильну стабілізацію класичних розв'язків одного параболічного рівняння інтегрального вигляду з оператором Бесселя дробового інтегродиференціювання з додатним параметром. Граничні значення цих розв'язків є згортувачами у просторах основних функцій, елементи яких мають характерні для фундаментального розв'язку задачі Коші цього рівняння властивості гладкості та поведінку в околі нескінченно віддалених просторових точок.

Ключові слова: *стабілізація розв'язку, задача Коші, згортувач, псевдодиференціальне рівняння.*

Вступ. Під стабілізацією розв'язку $u(t,\cdot)$ задачі Коші для параболічного рівняння розуміють існування у цього розв'язку границі при $t \to +\infty$, яка трактується у тому чи іншому розумінні. Перші дослідження зі стабілізації розв'язків задачі Коші для простіших рівнянь параболічного типу були започатковані М. Кжижанським ще в 50-х роках минулого століття. Він, зокрема, побудував приклад обмеженої початкової функції, з якою розв'язок задачі Коші для класичного рівняння теплопровідності не має границі при $t \to +\infty$. Його ідея неодноразово використовувалась іншими дослідниками при побудові прикладів, що характеризують поведінку розв'язків у залежності від властивостей початкових функцій. У більшості праць (див., наприклад, огляд літератури в [1]), присвячених стабілізації розв'язків задачі Коші для тих чи інших рівнянь або систем рівнянь параболічного типу припускається, що початкова функція є звичайною, тобто досліджуються властивості розв'язків класичної задачі Коші. Значно менше це питання з’ясовано для розв’язків параболічних еволюційних рівнянь із узагальненими граничними значеннями.

Робота присвячена дослідженню сильної стабілізації розв’язків задачі Коші для одного рівняння інтегрального вигляду [2] з оператором Бесселя дробового інтегродиференціювання з додатним параметром [3], початкові дані якої належать до широкого класу узагальнених функцій.

1. Попередні відомості. Нехай $\mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ — відповідно множини натуральних, дійсних і комплексних чисел, $\mathbf{Z}_+$ — множина цілих невід’ємних чисел, $C^\infty(\mathbf{R})$ $\left(C^\infty(\mathbf{C})\right)$ — простір усіх нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbf{R}\,(\mathbf{C})$; S — простір Л. Шварца швидко спадних функцій, а $M(\cdot)$ і $\Omega(\cdot)$ — опуклі, парні, невід’ємні функції, побудовані в [4], при означенні просторів W^Ω і W_M Гуревича Б. Л.

Через W_α^Ω і W_M^β, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, позначимо простори основних функцій, означених в [2]:

$$W_M^\beta = \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}) \mid \ \exists c > 0\, \exists A > 0\, \exists \delta > 0\, \forall k \in \mathbf{Z}_+ \ \forall x \in \mathbf{R}:$$

$$\left|\partial_x^k \varphi(x)\right| \le c A^k k^{\beta k} e^{-M(\delta x)}\Big\};$$

$$W_\alpha^\Omega = \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbf{C}) \mid \ \exists c > 0\, \exists a > 0\, \exists \delta > 0\, \forall z = x + iy \in \mathbf{C}:$$

$$\left|\varphi(z)\right| \le c \exp\{-\delta\, |z|^{\frac{1}{\alpha}} + \Omega(ay)\}\Big\}.$$

Їх можна трактувати як об’єднання відповідних повних досконалих зліченно нормованих просторів, при цьому послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbf{N}\} \subset W_M^\beta$ збігатиметься до $\varphi \in W_M^\beta$ у просторі W_M^β, якщо:

1) $\forall k \in \mathbf{Z}_+ : \partial_x^k \varphi_\nu(x) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \partial_x^k \varphi(x)$ рівномірно за змінною x на кожному компакті $\mathbf{K}$ з $\mathbf{R}$;

2) $$\exists c > 0\, \exists A > 0\, \exists \delta > 0\, \forall k \in \mathbf{Z}_+ \ \forall \nu \in \mathbf{N}\, \forall x \in \mathbf{R}:$$
$$\left|\partial_x^k \varphi_\nu(x)\right| \le c A^k k^{k\beta} \exp\{-M(\delta x)\}.$$

Простори W_α^Ω і W_M^β тісно пов’язані між собою оператором перетворенням Фур’є F [2]: *нехай* $M(\cdot)$ *і* $\Omega(\cdot)$ *— взаємно двоїсті за Юнгом функції, тоді* $F\ (F^{-1}) : W_\alpha^\Omega \to W_M^\alpha$, $\alpha > 0$, *причому кожне з цих відображень є взаємно однозначним і неперервним.*

Нехай далі

$$P(x)=2\frac{\left(a+x^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\ln\left(a+x^2\right)},\ x\in\mathbf{R},\ a>1,\ \gamma>0,$$

причому a і γ — такі, що функція $\Omega_1(\cdot)=P(\cdot)-P(0)$ є опуклою на $\left[0;+\infty\right)$, а $\Phi\in\left\{W_{\Omega_1};W_{\Omega_1}^{\beta},\beta\geq 1\right\}$.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u\left(t,x\right)}{\partial t}+\int\limits_{-\infty}^{\gamma}\left(\left(aE-\partial_x^2\right)^{\frac{\tau}{2}}u\right)\left(t,x\right)d\tau=0\quad t>0,\ x\in\mathbf{R}\,, \tag{1}$$

де $\gamma>0,\left(aE-\partial_x^2\right)^{\frac{\tau}{2}}$ — оператор Бесселя дробового інтегродиференціювання у просторі S з параметром $a>1$ [3], тобто оператор, дія якого на елементах $f\in S$ визначається рівністю

$$\left(aE-\partial_x^2\right)^{\frac{\tau}{2}}f=F^{-1}\left[\left(a+\xi^2\right)^{\frac{\tau}{2}}F[f]\right],$$

де E — одиничний оператор.

Якщо для рівняння (1) задати початкову умову

$$u\left(t,\cdot\right)\Big|_{t=0}=f,\quad f\in\tilde{\Phi}',\tag{2}$$

де $\widetilde{\Phi}\equiv F\left[\Phi\right]$ — простір Фур'є-образів, тобто

$$F\left[\Phi\right]=\left\{F\left[\varphi\right]\!\left(\sigma\right)=\int\limits_{\mathbf{R}}\varphi\!\left(x\right)e^{ix\sigma}dx,\varphi\in\Phi\right\},$$

то під розв'язком задачі Коші (1), (2) розумітимемо гладку функцію u, яка у звичайному розумінні задовольняє рівняння (1), а початкову умову (2) у сенсі слабкої збіжності в просторі $\widetilde{\Phi}'$ (тут штрихом $'$ позначено топологічну спряженість).

Фундаментальний розв'язок задачі Коші (1), (2) визначається рівністю

$$G_t\left(x\right)=F^{-1}\left[\theta_t(\xi)\right]\!\left(t,x\right),\quad t>0,\ x\in\mathbf{R}\,,$$

в якій $\theta_t(\cdot)=e^{-tP(\cdot)}$, $t>0$.

Оцінка [2]

$$\left|\partial_x^k\theta_t(x)\right|\leq cA^k k!\,\theta_{\frac{t}{2}}(x),\quad k\in\mathbf{Z}_+,\ x\in\mathbf{R},\ \mathrm{t}>0,\tag{3}$$

де c і A — додатні сталі, незалежні від x,k і t, гарантує належність функції $\theta_t(\cdot)$ до простору Φ при кожному фіксованому $t>0$.

Що, у свою чергу, забезпечує правильність наступного співвідношення: $G_t\left(\cdot\right) \in \tilde{\Phi}, \quad t > 0.$

Правильне таке твердження про коректну розв'язність задачі Коші (1), (2) у просторі $\tilde{\Phi}$ [2]: *нехай* $M_1(\cdot)$ *— функція, разом з якою* $\Omega_1(\cdot)$ *є взаємно двоїстими за Юнгом, тоді для того, щоб задача Коші (1), (2) мала єдиний розв'язок* $u\left(t,\cdot\right)$*, неперервно залежний від початкових даних, який при кожному фіксованому* $t > 0$ *належить до простору* $\tilde{\Phi} \in \left\{W^{M_1}; W_{\beta}^{M_1}, \beta \ge 1\right\}$ *і для якого виконується рівність* $\partial_t F\left[u\right] = F\left[\partial_t u\right], t > 0,$ *необхідно й достатньо, щоб* f *був згортувачем у* $\tilde{\Phi}$*, при цьому завжди виконуватиметься рівність* $u\left(t,x\right) = f * G_t\left(x\right), \ t > 0, \ x \in \mathbf{R}$ *(тут* $*$ *— операція згортки).*

2. Основний результат. Наступне твердження характеризує сильну стацібілізацію до нуля у просторі $\tilde{\Phi}$ розв'язку задачі Коші (1), (2).

Теорема. *Розв'язок* $u\left(t,\cdot\right)$ *задачі Коші (1), (2), побудований за згортувачем* f *у просторі* $\tilde{\Phi}$*, сильно стабілізується до нуля у цьому просторі.*

Доведення. Оскільки початкова функція f — зготрувач у просторі $\tilde{\Phi}$, то згідно з попереднім твердженням, розв'язок задачі Коші (1), (2) належить до $\tilde{\Phi}$ і має структуру $u\left(t,\cdot\right) = f * G_t\left(\cdot\right), t > 0.$ Зваживши на те, що оператор перетворення Фур'є F (F^{-1}) задає ізоморфізм між просторами $\tilde{\Phi}$ і Φ (див. [2; 4]), для доведення теореми досить установити збіжність $F[u](t,\cdot)$ до нуля при $t \to +\infty$ у сенсі збіжності в Φ.

Покладемо спочатку $\Phi = W_{\Omega_1}^{\beta}, \beta \ge 1$, тоді згідно з критерієм збіжності у цьому просторі, досить переконатися у правильності наступних тверджень:

1) $\forall k \in \mathbf{Z}_+ : \ \partial_{\xi}^{k} F[u](t,\xi) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ рівномірно за змінною ξ на кожному компакті $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$;

2) $\exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t >> 1 \ \forall k \in \mathbf{Z}_+ \ \forall \xi \in \mathbf{R}:$
$$\left|\partial_{\xi}^{k} F[u](t,\xi)\right| \le cA^k k^{k\beta} \exp\left\{-\Omega_1(\delta\xi)\right\}.$$

Скориставшись відомою формулою перетворення Фур'є згортки та структурою фундаментального розв'язку $G_t\left(\cdot\right)$, дістанемо, що

$F[u](t,\cdot) = F[f](\cdot)\theta_t(\cdot)$, причому $F[f](\cdot)$ — мультиплікатор у просторі Φ. Згідно з критерієм мультиплікатора в Φ [2], для кожного $l \in (0;1)$ функція $\mu_l(\cdot) = F[f](\cdot)\theta_l(\cdot)$ є елементом простору Φ, тобто

$$\exists c_l > 0\ \exists A_l > 0\ \ \exists \delta_l > 0\ \forall k \in \mathbf{Z}_+\ \ \forall \xi \in \mathbf{R} : \left|\partial_\xi^k \mu_l(\xi)\right| \le c_l A_l^k k^{\beta k} e^{-\Omega_1(\delta_l \xi)}.$$

Звідси, врахувавши оцінки (3), при $l = \dfrac{1}{2}$ знаходимо, що

$$\left|\partial_\xi^k F[u](t,\xi)\right| = \left|\partial_\xi^k \left(\mu_{\frac{1}{2}}(\xi)\theta_{t-\frac{1}{2}}(\xi)\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{r=0}^{k} C_k^r \left|\partial_\xi^r \mu_{\frac{1}{2}}(\xi)\right| \left|\partial_\xi^{k-r} \theta_{t-\frac{1}{2}}(\xi)\right| \le c c_{\frac{1}{2}} \left(\sum_{r=0}^{k} C_k^r A_{\frac{1}{2}}^r A^{k-r}(k-r)!\, r^{r\beta}\right) \times$$

$$\times \theta_{\frac{2t-1}{4}}(\xi) \exp\left\{-\Omega_1(\delta_{\frac{1}{2}}\xi)\right\} \le c_0 A_0^k \exp\left\{-\Omega_1(\delta_{\frac{1}{2}}\xi)\right\} \sum_{r=0}^{k} C_k^r (k-r)!\, r^{r\beta},$$

$$t > 1,\ k \in \mathbf{Z}_+,\ \xi \in \mathbf{R},$$

де $c_0 = \max\{c, c_{\frac{1}{2}}\}$, $A_0 = \max\{A, A_{\frac{1}{2}}\}$ — додатні сталі, незалежні від t, k і ξ.

Оскільки

$$(k-r)!\, r^{r\beta} \le (k-r)^{(k-r)} r^{r\beta} \le k^{k-r} r^{r\beta} \le k^{\beta(k-r)} k^{r\beta} = k^{k\beta}, \quad \beta \ge 1,\ r \le k$$

і

$$\sum_{r=0}^{k} C_k^r = 2^k,$$

то

$$\left|\partial_\xi^k F[u](t,\xi)\right| \le c_0 (2A_0)^k k^{k\beta} \exp\left\{-\Omega_1(\delta_{\frac{1}{2}}\xi)\right\},$$

для всіх $t > 1$, $k \in \mathbf{Z}_+$ і $\xi \in \mathbf{R}$.

Отже, твердження 2) доведено.

Доведемо тепер твердження 1). Для цього зафіксувавши довільним способом компактну множину $\mathbf{K}$ із $\mathbf{R}$ і врахувавши нескінченну диференційовність мультиплікатора $F[f](\cdot)$ на $\mathbf{R}$, а також оцінку (3), для всіх $t > 0$, $k \in \mathbf{Z}_+$ і $\xi \in \mathbf{K}$ дістанемо

$$\left|\partial_\xi^k F[u](t,\xi)\right| \le \sum_{r=0}^{k} C_k^r \left|\partial_\xi^r F[f](\xi)\right| \left|\partial_\xi^{k-r} \theta_t(\xi)\right| \le$$

$$\le \sum_{r=0}^{k} C_k^r \left(\max_{\xi \in \mathbf{K}} \left|\partial_\xi^r F[f](\xi)\right|\right) \left|\partial_\xi^{k-r} \theta_t(\xi)\right| \le c_k \exp\left\{-t \frac{\left(a+\xi^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}}{\ln\left(a+\xi^2\right)}\right\},$$

де стала $c_k > 0$ не залежить від t і ξ.

Далі, засобами диференціального числення переконуємося, що

$$\inf_{\varsigma\ge 0}\left\{\frac{(a+\varsigma)^{\frac{\gamma}{2}}}{\ln(a+\varsigma)}\right\}=\frac{\gamma}{2}e^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Тоді

$$\left|\partial_{\xi}^{k}F[u](t,\xi)\right|\le c_k\exp\left\{-\frac{t\gamma}{2}\sqrt{e^{\gamma}}\right\},\quad t>0,k\in\mathbf{Z}_+,\xi\in\mathbf{K}.$$

Звідси вже приходимо до виконання граничного співвідношення 1).

Таким чином, сильну стабілізацію до нуля у просторах $W_{\beta}^{M_1}$ при $\beta\ge 1$ розв'язку задачі Коші (1), (2) доведено.

Випадок простору $\Phi=W_{\Omega_1}$ реалізується аналогічно.

Теорему доведено.

Висновок. Кожен класичний розв'язок рівняння (1), який має стосовно просторової змінної x властивості, що є характерними для фундаментального розв'язку задачі Коші для цього рівняння, стабілізується до нуля разом із своїми похідними довільного порядку рівномірно стосовно змінної x на кожній компактній множині числової осі.

Список використаних джерел:

1. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
2. Літовченко В. А. Коректна розв'язність задачі Коші для одного рівняння інтегрального вигляду / В. А. Літовченко // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 2. — С. 185–197.
3. Літовченко В. А. Бесселеве дробове інтегродиференціювання з додатним параметром / В. А. Літовченко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. Математика. — Чернівці : Рута, 2002. — Вип. 134. — С. 65–70.
4. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.

Formulated and proven theorem about the strong stabilizing of classic decisions of one parabolic equation in the integral form with the operator of Bessell fractional integro-differential with a positive parameter. Scope values of these decisions are convolutions in spaces of basic functions elements of which characteristic for the fundamental decision of problem Cauchy of this equation of property have.

Key words: *stabilizing solution, problem Cauchy, convolution, pseudodifferential equation.*

Отримано: 06.09.2012