УДК 517.956

О. В. Мартинюк, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЗЛІЧЕННО-НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ. III

У статті визначаються нові класи функцій-символів та нові класи псевдодиференціальних операторів, які будуються за такими символами за допомогою прямого та оберненого перетворення Бесселя. Встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами з початковими функціями з просторів типу розподілів Соболєва—Шварца.

Ключові слова: *перетворення Бесселя, простори основних функцій, простори узагальнених функцій, задача Коші, псевдо-Бесселеві оператори, оператор узагальненого зсуву аргументу.*

Ця робота є продовженням статей [1; 2]. Тут вивчаються властивості оператора узагальненого зсуву аргументу, перетворення Бесселя узагальнених функцій, згорток, згортувачів та мультиплікаторів.

Оператор узагальненого зсуву аргументу в просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$

Символом T_x^{ξ} позначимо оператор узагальненого зсуву аргументу, який відповідає оператору Бесселя [3]:

$$T_x^{\xi}\varphi(x) = b_\nu \int_0^{\pi} \varphi\left(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}\right)\sin^{2\nu}\omega d\omega,\ \varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$, при цьому [3]

1) $|T_x^{\xi}\varphi(x)| \le T_x^{\xi}|\varphi(x)| \le \sup\limits_{x\in[0,\infty)}|\varphi(x)|$;

2) $T_x^{\xi} j_\nu(sx) = j_\nu(sx) j_\nu(s\xi)$, $\{x,\xi,s\}\subset(0,\infty)$;

3) якщо $f(x)$, $x\in[0,+\infty)$, — неперервна функція, для якої $\int_0^{\infty}|f(x)|x^{2\nu+1}dx<\infty$, функція $g(x)$, $x\in[0,+\infty)$, — неперервна і обмежена на $[0,+\infty)$, то

$$\int_0^{\infty} T_x^{\xi} f(x)\cdot g(x)x^{2\nu+1}dx = \int_0^{\infty} f(x) T_x^{\xi} g(x)x^{2\nu+1}dx;$$

4) $T_x^\xi 1 = 1$, $T_x^\xi f(x) = T_\xi^x f(\xi)$, $T_x^\xi T_z^\xi f(\xi) = T_x^z T_\xi^z f(\xi)$;

5) $F_B[T_x^\xi f(x)](\sigma) = j_\nu(\sigma\xi) F_B[f](\sigma)$.

Лема 1. У просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$ визначений і неперервний оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ.

Доведення. Внаслідок властивості 5) для довільної основної функції $\varphi \in \Phi_{\beta,\gamma}^\nu$ маємо, що

$$F_B^{-1}[T_x^\xi \varphi](\sigma) = j_\nu(\sigma\xi) F_B^{-1}[\varphi](\sigma) \equiv \Psi_\xi(\sigma).$$

Зазначимо, що при фіксованому ξ функція $j_\nu(\sigma\xi)$, як функція σ, є мультиплікатором у просторі $\theta_{M,\rho}$. Справді, із інтегрального зображення Пуассона функції j_ν випливають оцінки

$$|D_\sigma^k j_\nu(\sigma\xi)| \le A_\nu |\xi|^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \{\sigma, \xi\} \subset \mathbb{R}.$$

Скориставшись тим, що опукла функція ρ на нескінченності зростає швидше за довільну лінійну функцію знаходимо, що $j_\nu \cdot \psi \in \theta_{M,\rho}$ для довільної функції $\psi \in \theta_{M,\rho}$. Оскільки $F_B^{-1}[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$, то $\Psi_\xi \in \theta_{M,\rho}$ при кожному ξ. Застосувавши перетворення Бесселя знайдемо, що $T_x^\xi \varphi = F_B[\Psi_\xi] \in \Phi_{\beta,\gamma}^\nu$ при кожному ξ, тобто вказаний оператор визначений у просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$.

Неперервність оператора T_x^ξ випливає з властивості неперервності операції прямого та оберненого перетворення Бесселя. Справді, якщо $\{\varphi, \varphi_k, k \ge 1\} \subset \Phi_{\beta,\gamma}^\nu$, причому $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$, то

$$F_B^{-1}\left[T_x^\xi \varphi_k\right] = j_\nu(\sigma\xi) F_B^{-1}[\varphi_k](\sigma) \underset{k\to\infty}{\to} j_\nu(\sigma\xi) F_B^{-1}[\varphi](\sigma) = F_B^{-1}\left[T_x^\xi \varphi\right]$$

у просторі $\theta_{M,\rho}$. Застосувавши перетворення F_B знайдемо, що $T_x^\xi \varphi_k \to T_x^\xi \varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$.

Лема доведена.

Лема 2. Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T_x^\xi \varphi$ диференційовна у просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^\nu$.

Доведення. Нехай, за означенням,

$$G_{\Delta\xi}(x) = \frac{1}{\Delta\xi}[T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi(x) - T_x^\xi \varphi(x)], \varphi \in \Phi_{\beta,\gamma}^\nu, \{\xi, \Delta\xi, x\} \subset \mathbb{R}, \Delta\xi \ne 0.$$

Для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення $G_{\Delta\xi} \to \frac{\partial}{\partial\xi} T_x^{\xi}\varphi$, $\Delta\xi \to 0$, справджується у просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$. Урахувавши властивість неперервності перетворення Бесселя (прямого і оберненого) досить довести, що $F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}] \to F_B^{-1}[\frac{\partial}{\partial\xi} T_x^{\xi}\varphi]$ при $\Delta\xi \to 0$ у просторі $\theta_{M,\rho}$. Іншими словами, це означає, що:

1) сім'я функцій $\{F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}]$, $|\Delta\xi| \le \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$ — фіксоване число$\}$ обмежена в просторі $\theta_{M,\rho}$, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c = c(p) > 0 \ \forall \Delta\xi \ne 0, |\Delta\xi| \le \varepsilon_0 : \left\| F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}] \right\|_{p,a} \le c$$

при деякому $a > 0$;

2) для довільного $k \in \mathbb{Z}_+$ сім'я функцій

$$\{\gamma_{k,\Delta\xi}(\sigma) := D_{\sigma}^{2k}\left(F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}](\sigma) - F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial\xi} T_x^{\xi}\varphi\right](\sigma)\right), |\Delta\xi| \le \varepsilon_0\}$$

збігається до нуля при $\Delta\xi \to 0$ рівномірно по σ на кожному відрізку $[a,b] \subset (0,+\infty)$.

Доведемо, що умова 1) виконується. Урахувавши властивість 5) оператора T_x^{ξ} одержимо співвідношення:

$$F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}](\sigma) = \frac{1}{\Delta\xi}(F_B^{-1}[T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi](\sigma) - F_B^{-1}[T_x^{\xi}\varphi](\sigma)) =$$

$$= \frac{1}{\Delta\xi}(j_{\nu}(\sigma(\xi+\Delta\xi)) - j_{\nu}(\sigma\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi} j_{\nu}(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma), 0 < \theta < 1.$$

Із інтегрального зображення Пуассона нормованої функції Бесселя випливає, що

$$|D_{\sigma}^{l}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} j_{\nu}(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))\right)| \le \tilde{c}_l\,|\sigma|, \quad 0 \le l \le 2k, \tag{1}$$

де $\tilde{c}_l = \tilde{c}_l(\xi)$ (ξ — фіксоване) і $\tilde{c}_l$ не залежить від $\Delta\xi$. Оскільки $F^{-1}[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$, то при деякому $a > 0$ функція $F_B^{-1}[\varphi]$ задовольняє нерівності

$$|D_{\sigma}^{k} F_B^{-1}[\varphi](\sigma)| \le c_k M^{-k}(\sigma) e^{-\rho(a\sigma)}, k \in \mathbb{Z}_+, \sigma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{2}$$

Тоді для вказаного $a>0$ з урахуванням (1), (2) знайдемо, що для фіксованого $p\in\mathbb{Z}_+$

$$\Lambda(\sigma):=\exp\{\rho(a(1-\frac{1}{p+2})\sigma)\}M^{2k}(\sigma)\,|\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^{l}D_{\sigma}^{l}(\frac{\partial}{\partial\xi}j_{\nu}(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi)))\times$$

$$\times D_{\sigma}^{2k-l}F_B^{-1}[\varphi](\sigma)\,|\le\exp\{\rho(a(1-\frac{1}{p+2})\sigma)-\rho(a\sigma)\}\cdot|\sigma|\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^{l}\tilde{c}_l\cdot M^{l}(\sigma)\le\exp\{\rho(a(1-\frac{1}{p+2})\sigma)-\rho((a-\beta)\sigma)\}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^{l}\tilde{c}_l\sigma M^{l}(\sigma)\exp\{-\rho(\beta\sigma)\},\sigma>0,$$

де $\beta\in\left(0,\dfrac{a}{p+2}\right)$, β – фіксоване. Тут ми скористалися нерівністю опуклості для функції ρ, з якої випливає, що

$$-\rho(a\sigma)\le-\rho((a-\beta)\sigma)-\rho(\beta\sigma)$$

для вказаного параметра β. З цієї ж нерівності дістаємо також, що

$$\rho(a(1-\frac{1}{p+2})\sigma)-\rho((a-\beta)\sigma)\le-\rho((\frac{a}{p+2}-\beta)\sigma),\ \frac{a}{p+2}-\beta>0.$$

Із обмежень, накладених на функції ρ та M випливає також нерівність $\sigma M^{l}(\sigma)\exp\{-\rho(\beta\sigma)\}\le d_l$, $\sigma>0$. Тоді

$$\Lambda(\sigma)\le\exp\left\{-\rho\left(\left(\frac{a}{p+2}-\beta\right)\sigma\right)\right\}\cdot\sum_{l=0}^{2k}C_{2k}^{l}\tilde{c}_l d_l\le B_k,\quad\forall\sigma>0,$$

де стала $B_k>0$ не залежить від $\Delta\xi$. Зазначимо також, що $\Lambda(\sigma)\to\boldsymbol{const}$ при $\sigma\to+0$ (див. властивості функції $F_B^{-1}[\varphi]\in\theta_{M,\rho}$, [1]). Звідси вже випливає нерівність

$$\left\|F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}]\right\|_{p,a}\le c,\quad p\in\mathbb{Z}_+,a>0,$$

де $c>0$ не залежить від $\Delta\xi$. Таким чином, сім'я функцій $\{F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}]$, $|\Delta\xi|\le\varepsilon_0\}$ умову 1) задовольняє.

Далі скористаємося такими відомими формулами [4]:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}j_{\nu}(\sigma\xi)=c\xi\sigma^2 j_{\nu+1}(\sigma\xi),\quad\frac{\partial}{\partial\sigma}j_{\nu}(\sigma\xi)=c\sigma\xi^2 j_{\nu+1}(\sigma\xi),\qquad(3)$$

де стала c залежить лише від ν. Тоді

$$F_B^{-1}[\frac{\partial}{\partial\xi}T_x^{\xi}\varphi](\sigma)=\frac{\partial}{\partial\xi}F_B^{-1}[T_x^{\xi}\varphi](\sigma)=\frac{\partial}{\partial\xi}j_{\nu}(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma)=$$
$$=c\xi\sigma^2 j_{\nu+1}(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma),$$
$$F_B^{-1}[G_{\Delta\xi}](\sigma)=\frac{\partial}{\partial\xi}j_{\nu}(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma)=$$
$$=c\xi\sigma^2 j_{\nu+1}(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma).$$

Знову скориставшись формулами (3) знайдемо, що

$$\gamma_{k,\Delta\xi}(\sigma)=c\xi D_{\sigma}^{2k}[\sigma^2(j_{\nu+1}(\sigma(\xi+\theta\Delta\xi))-j_{\nu+1}(\sigma\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma)]=$$
$$=cc_1\xi^2\theta\Delta\xi D_{\sigma}^{2k}[\sigma^4 j_{\nu+2}(\sigma(\xi+\theta_1\Delta\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma)],k\in\mathbb{Z}_+,$$

де стала $c_1>0$ залежить лише від ν, $0<\theta_1<1$. Із властивостей нормованої функції Бесселя $j_{\nu+2}$ (див. інтегральне зображення Пуассона нормованої функції Бесселя) та функції $F_B^{-1}[\varphi]$ дістаємо, що при кожному фіксованому $k\in\mathbb{Z}_+$ функція

$$D_{\sigma}^{2k}[\sigma^4\cdot j_{\nu+2}(\sigma(\xi+\theta_1\Delta\xi))F_B^{-1}[\varphi](\sigma)]$$

є обмеженою деякою сталою $c=c(k,\nu,\xi)>0$ (не залежною від $\Delta\xi$), якщо $\sigma\in[a,b]\subset(0,\infty)$. Отже, $\gamma_{k,\Delta\xi}\to 0$ при $\Delta\xi\to 0$ рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset(0,\infty)$. Отже, умова 2) також виконується.

Лема доведена.

Наслідок 1. Операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$.

Для доведення цього твердження досить скористатися лемою 2 та методом математичної індукції.

Слідуючи [4], згортку двох функцій з простору $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ визначимо формулою

$$(\varphi*\psi)(x)=\int_0^{\infty}T_x^{\xi}\varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi,\ \{\varphi,\psi\}\subset\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}.$$

Із властивостей оператора T_x^{ξ} випливає, що функція $\varphi*\psi$ є інтегровною на $[0,\infty)$ з вагою $x^{2\nu+1}$. Справді, оскільки існує інтеграл

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|\varphi(\eta)\psi(\xi)|\eta^{2\nu+1}\xi^{2\nu+1}d\eta d\xi,$$

то існує подвійний інтеграл

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}T_x^{\xi}\varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1}x^{2\nu+1}d\xi dx. \tag{4}$$

На підставі (4) твердимо, що існує інтеграл

$$\int_0^\infty (\varphi*\psi)(x)\, j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx.$$

Із [1] випливає, що $\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}\in\theta_{M,\rho}$ для довільних двох функцій $\{\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\}\subset\theta_{M,\rho}$. Оскільки $\tilde{\varphi}=F_B^{-1}[\varphi]$, $\tilde{\psi}=F_B^{-1}[\psi]$, де $\{\varphi,\psi\}\subset\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, то маємо співвідношення $F_B^{-1}[\varphi]\cdot F_B^{-1}[\psi]\in\theta_{M,\rho}$. З іншого боку,

$$F_B^{-1}[\varphi]\cdot F_B^{-1}[\psi] = c_\nu \int_0^\infty \varphi(x)\, j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \cdot c_\nu \int_0^\infty \psi(\xi)\, j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi =$$

$$= c_\nu^2 \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(x)\, j_\nu(\sigma\xi)\, j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx\right)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi =$$

$$= c_\nu^2 \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi\, j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx\right)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi =$$

$$= c_\nu^2 \int_0^\infty \left(\int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x)\, j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx\right)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi =$$

$$= c_\nu^2 \int_0^\infty \left(\int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x)\psi(\xi)\xi^{2\nu+1} d\xi\right) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx = c_\nu F_B^{-1}[\varphi*\psi](\sigma).$$

Застосувавши перетворення Бесселя знайдемо, що

$$\varphi*\psi = c_\nu^{-1} F_B[F_B^{-1}[\varphi]\cdot F_B^{-1}[\psi]].$$

Отже, $\varphi*\psi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, якщо $\{\varphi,\psi\}\subset\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$.

Простір узагальнених функцій $(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$. Перетворення Бесселя узагальнених функцій з простору $(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$

Символом $(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ визначається формулою

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_0^\infty f(x)\varphi(x) x^{2\nu+1} dx.$$

Кожна локально інтегровна парна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\exists c>0\,\exists s\in(0,[\beta^{-1}[\gamma]])\,\forall x\in\mathbb{R}:\ |f(x)|\le c(1+|x|)^s, \qquad (5)$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (\Phi^{\nu}_{\gamma,\beta})'$:

$$\langle F_f,\varphi\rangle = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx, \quad \forall\varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}.$$

тобто простір $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ вкладається в $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. З леми дю Буа Раймона випливає, що кожна регулярна узагальнена функція з $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ визначається однією (з точністю до значень на множині міри нуль) локально інтегровною парною на $\mathbb{R}$ функцією, яка задовольняє умову (5). З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} \ni f \to F_f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ є неперервним.

Оскільки $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} = \bigcap_{p=0}^{\infty}\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, причому вкладення $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p+1}\subset\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p}$, $p\in\mathbb{Z}_+$, неперервні, щільні й компактні, то

$$(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})' = (\lim_{p\to\infty} \boldsymbol{pr}\,\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})' = \lim_{p\to\infty} \boldsymbol{ind}(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})'.$$

Отже, якщо $f\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$, то $f\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})'$ при деякому $p\in\mathbb{Z}_+$, при цьому

$$|\langle f,\varphi\rangle|\le c\|\varphi\|_p,\ \varphi\in\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma},$$

де $c=\|f\|_p$ — норма функціоналу f у просторі $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})'$. Найменше з таких p називається порядком f, тобто кожна узагальнена функція $f\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ має скінченний порядок. Зазначимо також, що правильними є вкладення

$$(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,0})'\subset(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,1})'\subset\ldots\subset(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})'\subset\ldots,$$

причому кожне вкладення $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p})'\subset(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma,p+1})'$, $p\in\mathbb{Z}_+$, є неперервним і компактним. Із загальної теореми про повноту простору, спряженого до зліченно-нормованого простору [5] дістаємо, що простір $(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ — повний відносно слабкої збіжності.

Оскільки в просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f\in(\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f*\varphi)(x)=\langle f_\xi, T_x^\xi\varphi(x)\rangle\equiv\langle f_\xi, T_\xi^x\varphi(\xi)\rangle,\ \varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu},$$

при цьому $f*\varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією (згідно з наслідком 1 операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$; звідси та з властивості неперервності функціоналу f випливає, що $f*\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$ для довільної основної функції φ).

У просторі узагальнених функцій $(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$ можна також ввести операцію $(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'\ni f\to T_x^\xi f\in(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$ так: для довільної узагальненої функції $f\in(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$ визначимо узагальнену функцію $T_x^\xi f\in(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$ за допомогою співвідношення:

$$\langle T_x^\xi f,\varphi\rangle=\langle f, T_x^\xi\varphi(x)\rangle,\quad \forall\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}.$$

Із властивості неперервності операції T_x^ξ в основному просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ випливає неперервність вказаної операції у просторі $(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$. Аналогічно, за довільною узагальненою функцією $f\in(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$ визначається узагальнена функція $T_\xi^x f$:

$$\langle T_\xi^x f,\varphi\rangle=\langle f, T_\xi^x\varphi(\xi)\rangle, \forall\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}.$$

Оскільки $T_\xi^x\varphi(\xi)=T_x^\xi\varphi(x)$, то звідси дістаємо, що $T_x^\xi f=T_\xi^x f$, $\forall f\in(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$. Отже,

$$\langle T_x^\xi f,\varphi\rangle=f*\varphi,\quad \forall\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}.$$

Нехай $f\in(\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu})'$. Якщо $f*\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, $\forall\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ і із співвідношення $\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ за топологією простору $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ випливає, що $f*\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ за топологією простору $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$. Оскільки $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$ — досконалий простір із диференційовною операцією узагальненого зсуву аргументу, то із результатів, одержаних у [5], випливає, що кожний фінітний функціонал є згортувачем у просторі $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$. Відзначимо, що фінітні узагальнені функції утворюють досить широкий клас; зокрема, довільна обмежена замкнена множина є носієм узагальненої функції з $E'=E'(\mathbb{R})$ [6]. Тут символом $E=E(\mathbb{R})$ позначено простір усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій з топологією, яка визначається сім'єю півнорм

$$p_{\mathbb{K},\alpha}(\varphi) = \max_{x\in\mathbb{K}} |D_x^{\alpha}\varphi(x)|, \quad \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}),$$

де $\mathbb{K}$ — компакт в $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Відомо [7], що E' збігається з сукупністю узагальнених функцій з простору $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, які мають компактний носій.

Оскільки $F_B[\varphi] \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, якщо $\varphi \in \theta_{M,\rho}$, то перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_B[f], \varphi\rangle = \langle f, F_B[\varphi]\rangle, \quad \forall \varphi \in \theta_{M,\rho}.$$

Звідси, з властивості лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_B[f]$, заданого на просторі $\theta_{M,\rho}$. Отже, $F_B[f] \in \theta'_{M,\rho}$.

Теорема 1. Якщо узагальнена функція $f \in (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$ — згортувач у просторі $\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$, то для довільної функції $\varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma}$ правильною є формула

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi], \quad F_B[\varphi] = c_{\nu}^{-1} F_B^{-1}[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми $f * \varphi \in \Phi^{\nu}_{\beta,\gamma} \subset (\Phi^{\nu}_{\beta,\gamma})'$. Тоді, скориставшись означенням перетворення Бесселя (прямого і оберненого), а також означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо співвідношення

$$\forall \psi \in \theta_{M,\rho} : \langle F_B[f * \varphi], \psi\rangle = \langle f * \varphi, F_B[\psi]\rangle =$$

$$= \int_0^{\infty} (f * \varphi)(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx = \int_0^{\infty} \langle f_{\xi}, T_x^{\xi}\varphi(x)\rangle F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx = \quad (6)$$

$$= \langle f_{\xi}, \int_0^{\infty} T_x^{\xi}\varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx\rangle$$

(зазначимо, що остання рівність записана, поки-що, формально).

Нехай

$$J(\xi) := \int_0^{\infty} T_x^{\xi}\varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx.$$

Тоді

$$J(\xi) = \int_0^{\infty} T_x^{\xi}\varphi(x) \left(\int_0^{\infty} \psi(\sigma) j_{\nu}(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma\right) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^\infty (\int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty (\int_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty (\int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma\xi) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx) \psi(\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} (\int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx) d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi](\xi).$$

Тут ми скористалися теоремою Фубіні, врахувавши, що збіжним є інтеграл

$$\int_0^\infty (\int_0^\infty |\psi(\sigma)\varphi(x) j_\nu(\sigma x) j_\nu(\sigma\xi)| \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma) dx.$$

Отже,

$$\langle F_B[f*\varphi], \psi\rangle = \langle f, F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi]\rangle = \langle F_B[f], F_B[\varphi]\cdot\psi\rangle =$$
$$= \langle F_B[f]\cdot F_B[\varphi], \psi\rangle, \quad \forall\, \psi \in \theta_{M,\rho}.$$

Обґрунтуємо коректність проведених в (6) перетворень. Для цього введемо позначення:

$$\Lambda_r(\xi) := \int_0^r \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, r > 0.$$

Для доведення (6) досить показати, що $\Lambda_r(\xi) \to J(\xi)$ при $r \to +\infty$ у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, тобто $\alpha_r(\xi) := J(\xi) - \Lambda_r(\xi) \to 0$ при $r \to +\infty$ за топологією простору $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$. Це означає, що:

1) сім'я функцій $\{\alpha_r, r \ge 1\}$ обмежена в $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \; \exists c = c(p) > 0 \; \forall r > 0 : \|\alpha_r\|_p \le c;$$

2) для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ сім'я функцій $\{D_\xi^{2m} \alpha_r, r > 0\}$ збігається до нуля при $r \to +\infty$ рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset [0,+\infty)$.

Доведемо 1). Для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ маємо, що

$$D_{\xi}^{2m} J(\xi) = \int_0^{\infty} \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) D_{\xi}^{2m} j_{\nu}(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1} d\sigma. \qquad (7)$$

Диференціювання тут по ξ під знаком інтеграла можливе, оскільки вказаний інтеграл є рівномірно збіжним відносно параметра ξ. Справді, із інтегрального зображення Пуассона нормованої функції Бесселя випливає нерівність

$$| D_{\xi}^{2m} j_{\nu}(\sigma\xi) | \le 2A_{\nu}\sigma^{2m}, \sigma \ge 0, \xi \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\psi \cdot F_B[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$, то звідси та з останньої нерівності дістаємо, що інтеграл (7) є рівномірно збіжним по параметру ξ. Із рівномірної збіжності (по ξ) інтеграла (7) випливає рівномірна збіжність інтегралів (по ξ)

$$D_{\xi}^{2m} \alpha_r(\xi) = \int_r^{\infty} \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) D_{\xi}^{2m} j_{\nu}(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$$D_{\xi}^{2m} \Lambda_r(\xi) = \int_0^{r} \psi(\xi) F_B[\varphi](\sigma) D_{\xi}^{2m} j_{\nu}(\sigma\xi)\sigma^{2\nu+1} d\sigma, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Зазначимо, що

$$D_{\xi}^{2m} \alpha_r(\xi) = D_{\xi}^{2m} J(\xi) - D_{\xi}^{2m} \Lambda_r(\xi), \ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$| D_{\xi}^{2m} \alpha_r(\xi) | \le | D_{\xi}^{2m} J(\xi) | + | D_{\xi}^{2m} \Lambda_r(\xi) |.$$

Розглянемо функції

$$D_{\xi}^{2m} \Lambda_{r,+}(\xi) = \max(D_{\xi}^{2m} \Lambda_r(\xi), 0), D_{\xi}^{2m} \Lambda_{r,-}(\xi) = -\min(D_{\xi}^{2m} \Lambda_r(\xi), 0),$$

які є невід'ємними і врахуємо те, що

$$| D_{\xi}^{2m} \Lambda_r(\xi) | = D_{\xi}^{2m} \Lambda_{r,+}(\xi) + D_{\xi}^{2m} \Lambda_{r,-}(\xi) \le 2 | D_{\xi}^{2m} J(\xi) |.$$

Отже,

$$| D_{\xi}^{2m} \alpha_r(\xi) | \le 3 | D_{\xi}^{2m} J(\xi) | = 3 | D_{\xi}^{2m} (F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi](\xi)) |, \quad \forall r > 0.$$

Оскільки $D_{\xi}^{2m} (F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi]) \in \Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, якщо $\varphi \in \Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, $\psi \in \theta_{M,\rho}$, то

$$\Lambda(\xi)^{\tilde{\omega}_0 + 2m} | D_{\xi}^{2m} \alpha_r(\xi) | \le 3\Lambda(\xi)^{\tilde{\omega}_0 + 2m} | D_{\xi}^{2m} (F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi](\xi)) | \le c_m, \ \ \forall \xi \in (0, \infty),$$

де стала $c_m > 0$ не залежить від r. Звідси дістаємо, що сім'я функцій $\{\alpha_r, r > 0\}$ обмежена в $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$.

Властивість 2) випливає з рівномірної збіжності інтеграла (7) по ξ (рівномірної на кожному відрізку $[a,b] \subset [0,\infty)$), встановленої раніше, бо тоді

$$\int_r^{+\infty} \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) D_\xi^{2m} j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \to 0$$

при $r \to +\infty$ рівномірно по $\xi \in [a,b] \subset [0,\infty)$ як залишок збіжного інтеграла.

Теорема доведена.

З доведеної теореми випливає також, що якщо функціонал $f \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$ є згортувачем у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, то $F_B[f]$ — мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$.

Наслідок 2. Нехай узагальнена функція $f \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$ задовольняє умови: 1) $F_B[f]$ — мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$; 2) для довільної функції $\varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$ згортка $f * \varphi$ породжує регулярну узагальнену функцію з простору $(\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$. Тоді f — згортувач у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.

Справді, урахувавши умови 1), 2), як і при доведенні теореми 1 встановлюємо, що

$$\forall \psi \in \theta_{M,\rho} : \langle F_B[f * \varphi], \psi \rangle = \langle f * \varphi, F_B[\psi] \rangle =$$

$$= \int_0^\infty (f * \varphi)(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx = \langle F_B[f] \cdot F_B[\varphi], \psi \rangle,$$

тобто $F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi]$, при цьому $\psi := F_B[f] \cdot F_B[\varphi] \in \theta_{M,\rho}$. Отже, $F_B^{-1}[f * \varphi] = c_\nu \psi$, або $f * \varphi = c_\nu F_B[\psi] \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}$, що й потрібно було довести.

Символом $\theta'_{M,\rho}$ позначатимемо сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на $\theta_{M,\rho}$, зі слабкою збіжністю. Елементи простору $\theta'_{M,\rho}$ також називатимемо узагальненими функціями. Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in \theta'_{M,\rho}$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_B[f], \varphi \rangle = \langle f, F_B^{-1}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \Phi^\nu_{\beta,\gamma}. \tag{8}$$

Із (8) випливає, що $F_B[f] \in (\Phi^\nu_{\beta,\gamma})'$.

Теорема 2. Якщо узагальнена функція $f \in \theta'_{M,\rho}$ — мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$, то її перетворення Фур'є — згортувач у просторі $\Phi^\nu_{\beta,\gamma}$.

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$F_B[f]*\varphi=\langle F_B[f],T_x^{\xi}\varphi(x)\rangle=\langle f,F_B^{-1}[T_x^{\xi}\varphi(x)]\rangle,\quad \forall\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}.$$

Зазначимо також, що з умови теореми випливає, що функціонал f є регулярною узагальненою функцією. Оскільки

$$F_B^{-1}[T_x^{\xi}\varphi(x)]=j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma),$$

то

$$F_B[f]*\varphi=\langle f,j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma)\rangle=$$

$$=\int_0^\infty f(\sigma)j_\nu(\sigma\xi)F_B^{-1}[\varphi](\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=F_B[f\cdot F_B^{-1}[\varphi]].$$

Звідси випливає, що $F_B[f\cdot F_B^{-1}[\varphi]]\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, бо $f\cdot F_B^{-1}[\varphi]\in\theta_{M,\rho}$ (тут враховано, що $F_B^{-1}[\varphi]\in\theta_{M,\rho}$, якщо $\varphi\in\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$, а f — мультиплікатор у просторі $\theta_{M,\rho}$).

Абстрактні функції

Нехай X — лінійний топологічний простір або об'єднання (перетин) таких просторів, Ω — деяка множина чисел. Функцію $\Omega\ni\nu\to\varphi_\nu\in X$ називають абстрактною функцією параметра ν у просторі X (див. [5]).

Границею абстрактної функції при $\nu\to\nu_0$ називається такий елемент $\varphi_0\in X$, що для довільної послідовності $\{\nu_n,n\ge1\}$, $\nu_n\to\nu_0$, $n\to\infty$, виконується граничне співвідношення $\varphi_{\nu_n}\to\varphi_{\nu_0}$, $n\to\infty$, у розумінні збіжності в просторі X.

Абстрактна функція називається диференційовною у точці $\nu_0\in\Omega$, якщо в просторі X існує границя

$$\frac{d\varphi_\nu}{d\nu}\Big|_{\nu=\nu_0}=\lim_{h\to0}\frac{\varphi_{\nu_0+h}-\varphi_{\nu_0}}{h}.$$

Відзначимо деякі властивості числових функцій вигляду $\langle f_\nu,\varphi_\nu\rangle$, де $\varphi_\nu\in X$, $f_\nu\in X'$. За X можна, зокрема, взяти простір $\Phi_{\beta,\gamma}^{\nu}$. Правильними є наступні твердження [5]: 1) якщо $\varphi_\nu\to\varphi_{\nu_0}$ при $\nu\to\nu_0$ у просторі X, $f_\nu\to f_{\nu_0}$ при $\nu\to\nu_0$ у просторі X' (тобто слабко), то $\langle f_\nu,\varphi_\nu\rangle\to\langle f_{\nu_0},\varphi_{\nu_0}\rangle$ при $\nu\to\nu_0$; 2) якщо абстрактна функція φ_ν диференційовна в точці $\nu\in\Omega$, функціонал $f_\nu\in X'$ — слабко диференційовна функція параметра ν, то $\langle f_\nu,\varphi_\nu\rangle$ — диференційовна функція, причому

$$\frac{d}{d\nu}\langle f_\nu, \varphi_\nu \rangle = \langle \frac{df_\nu}{d\nu}, \varphi_\nu \rangle + \langle f_\nu, \frac{d\varphi_\nu}{d\nu} \rangle.$$

Список використаних джерел:

1. Мартинюк О. В. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. I / О. В. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 179–192.
2. Мартинюк О.В. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. II / О. В. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 6. — С. 157–171.
3. Левитан Б.И. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.И. Левитан // Успехи мат. наук. — 1951. — Т.6, вып. 2. — С. 102–143.
4. Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальним оператором Бесселя / Я. И. Житомирский // Матем. сб. — 1955. — Т. 36, №2. — С. 299–310.
5. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.
6. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
7. Матийчук М. И. Об одном методе решения задачи Коши для сингулярных параболических уравнений / М. И. Матийчук // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. 44, №1. — С. 135–138.

The new classes of functions-symbols and new classes of pseudo-differential operators, which are built on such characters by direct and inverse Bessel transformation, are defined in the paper. The correct solvability of the Cauchy problem for evolution equations with pseudo-Bessel operators with initial functions of the spaces such as Sobolev—Schwartz distributions is set.

Key words: *Bessel transformation, spaces of basic functions, spaces of generalized functions, the Cauchy problem, pseudo-Bessel operators, the operator of generalized shift of the argument.*

Отримано: 14.06.2011