УДК 519.6

Ю. І. Першина, канд. фіз.-мат. наук

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ РОЗРИВНИМИ СПЛАЙНАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИКУТНИКІВ З ОДНІЄЮ КРИВОЛІНІЙНОЮ СТОРОНОЮ

У статті будується та досліджується розривний інтерлінаційний сплайн для наближення розривної функції двох змінних з областю визначення, що розбивається на прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою. Сформульовані та доведені теореми про інтерлінаційні властивості та похибку побудованої розривної конструкції.

Ключові слова: *розривна функція, розривний сплайн-інтерлінант, криволінійний прямокутний трикутник.*

Вступ. Класична теорія наближення диференційовних функцій багатьох змінних використовує оцінки похибок, які істотно основані на припущенні, що наближувана функція має обмежені похідні достатньо високого порядку. Наприклад, в роботі [1] оцінка наближення поліномами Лагранжа степеня n вимагає неперервності похідної порядку $n+1$, в роботах [2—4] похибка наближення сплайнами вимагає неперервності r-ої $(1 \leq r \leq n+1)$ похідної, де n — степінь сплайна. Для наближення неперервних функцій замість похідних використовуються модулі неперервності.

У той же час практика показує, що необхідно вміти з достатньою точністю наближувати розривні функції, зокрема, розривні функції, які мають в області задання розриви першого роду в окремих точках або на окремих лініях тощо. Наприклад, дослідження внутрішньої структури тіла людини за допомогою методів комп'ютерної томографії в заданій площині повинно враховувати, що різні частини тіла мають свою форму і свою щільність, тобто щільність внутрішньої структури всього тіла описується розривною функцією від трьох змінних, яка має розриви першого роду на поверхнях між різними частинами тіла (серце, шлунок, печінка тощо). У деяких випадках досліднику відома форма цих поверхонь (як правило, наближено).

Розроблені методи в подальшому будуть використовуватися для розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії. Для цього доцільніше використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на даній системі ліній. Тобто, вони надають можливість будувати оператори, інтеграли від яких по вказаних лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Звідси витікає, що інтерлінація є математичним апаратом, природно пов'язаним із задачею відновлення характеристик об'єктів за відомими їх проекціями.

Тому актуальною є задача наближення такого роду функцій за допомогою конструкцій, які на вказаних лініях зберігають властивості наближуваної функції, тобто мають розриви першого роду (взагалі кажучи, з невідомими значеннями розривів).

У роботі [6] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [7] — інтерлінаційними розривними сплайнами на ректангульованій області визначення. Були також побудовані розривні інтерполяційні [8] та інтерлінаційні [9] сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники. В роботі [10] досліджувався неперервний оператор інтерлінації для наближення неперервних функцій на лініях тріангуляції.

У цій статті вперше будуються та досліджуються інтерлінаційні розривні сплайни для наближення розривних функцій з областю визначення, що розбивається на прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою.

Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x,y)$ в області D. Будемо вважати, що область D разбивається прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < ... < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = 1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається два прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою роботи є побудова та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної інтерлінації таких, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерлінації функції $f(x,y)$.

Метод побудови наближуючого розривного сплайна-інтерлінанта. Розглянемо трикутний елемент T_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ (рис. 1), в якому катети задаються рівняннями

$$AB : x = x_i,\ AC:\ y = y_j\ ,$$

а гіпотенуза BC, взагалі кажучи, є криволінійною і може задаватися рівнянням $h(x) + g(y) = 1$, тобто $y = g^{-1}(1 - h(x))$ або $x = h^{-1}(1 - g(y))$. Причому виконуються наступні співвідношення:

$$g(y_j) = 0,\ h(x_i) = 0\ .$$

Нехай на цьому трикутнику задана функція $f(x, y)$, яка на лініях заданого трикутного елемента може мати розриви першого роду.

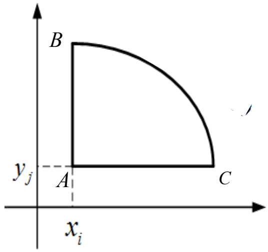


Рис. 1. *Один з можливих трикутних елементів з криволінійною гіпотенузою та з прямим кутом у вузлі* (x_i, y_j)

Вважаємо заданими:

1. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $x = x_i$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i\,(y) = \lim_{x \to x_i + 0} f(x, y) = f(x_i + 0, y),$$

$$\varphi m_i\,(y) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x, y) = f(x_i - 0, y)\,;$$

$$\varphi pp_{ij} = \varphi p_i\,(y_j) = \lim_{\substack{x \to x_i + 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),;$$

$$\varphi mp_{ij} = \varphi m_i\,(y_j) = \lim_{\substack{x \to x_i - 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0)\,.$$

2. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $y = y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \to y_j + 0} f(x, y) = f(x, y_j + 0),$$

$$\psi m_j(x) = \lim_{y \to y_j - 0} f(x, y) = f(x, y_j - 0),$$

$$\psi pp_{ij} = \psi p_j(x_i) = \lim_{\substack{x \to x_i + 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\psi pm_{ij} = \psi m_j(x_i) = \lim_{\substack{x \to x_i + 0 \\ y \to y_j - 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j - 0)\,.$$

3. Сліди функції $f(x, y)$ на криволінійній гіпотенузі (під та над прямою відповідно):

$$\eta m_{ij}(x) = f\left(x, g^{-1}(1 - h(x)) - 0\right),\ \eta p_{ij}(x) = f\left(x, g^{-1}(1 - h(x)) + 0\right);$$

$$\eta pm_{ij} = \eta m_{ij}(x_i) = f\left(x_i + 0, g^{-1}(1 - h(x_i)) - 0\right),$$
$$\eta pp_{ij} = \eta p_{ij}(x_i) = f\left(x_i + 0, g^{-1}(1 - h(x_i)) + 0\right)$$

або

$$\eta m_{ij}(y) = f\left(h^{-1}(1 - g(y)) + 0, y\right), \eta p_{ij}(y) = f\left(h^{-1}(1 - g(y)) - 0, y\right);$$
$$\eta pm_{ij} = \eta m_{ij}(y_j) = f\left(h^{-1}(1 - g(y_j)) + 0, y_j - 0\right),$$
$$\eta mp_{ij} = \eta p_{ij}(y_j) = f\left(h^{-1}(1 - g(y_j)) - 0, y_j + 0\right).$$

Введемо позначення:

$$\mu m_i\,(x) = f\left(x_i + 0, g^{-1}(1 - h(x)) - 0\right),\ \mu p_i\,(x) = f\left(x_i + 0, g^{-1}(1 - h(x)) + 0\right),$$

або

$$\mu p_j(y) = f\left(h^{-1}(1 - g(y)) + 0, y_j - 0\right),\ \mu m_j(y) = f\left(h^{-1}(1 - g(y)) - 0, y_j + 0\right).$$

Легко перевірити, що виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned} &\mu m_i\,(x_i) = \eta m_{ij}(x_i),\ \mu p_i\,(x_i) = \eta p_{ij}(y_j), \\ &\mu p_j(y_j) = \eta m_{ij}(y_j),\ \mu m_j(y_j) = \eta p_{ij}(y_j). \end{aligned} \qquad (1)$$

Для побудови оператора інтерлінації скористаємося результатами роботи Литвина О. М. [10].

Теорема 1. Якщо сліди функції $f(x, y)$ задовольняють умовам

$$\psi p_j(x_i) = \varphi p_i(y_j),\ \eta m_{ij}(x_i) = \varphi p_i\left(g^{-1}(1 - h(x_i))\right),$$
$$\eta m_{ij}\left(h^{-1}(1 - g(y_j))\right) = \psi p_j\left(h^{-1}(1 - g(y_j))\right),$$

то оператор

$$Lf(x, y) = L_1 f(x, y) + L_2(x, y) - L_{12}(x, y), \qquad (2)$$

де

$$L_1 f(x, y) = h(x) \cdot \eta m_{ij}(y) + g(y) \cdot \eta m_{ij}(x),$$
$$L_2 f(x, y) = \psi p_j(x) + \varphi p_i(y) - \varphi p_i(y_j),$$
$$L_1 L_2 f(x, y) = h(x)\left(\varphi p_i(y) + \mu p_j(y) - \varphi p_i(y_j)\right) +$$
$$+ g(y)\left(\eta m_{ij}(x_i) + \mu m_i\,(x) - \psi p_j(x)\right)$$

інтерлінує функцію $f(x, y)$ на трьох сторонах трикутника T_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, тобто

$$L f(x, y)\big|_{y = y_j} = \psi p_j(x),\ Lf(x, y)\big|_{x = x_i} = \varphi p_i(y), \qquad (3)$$
$$Lf(x, y) = f(x, y),\ \text{якщо}\ h(x) + g(y) = 1. \qquad (4)$$

Доведення. Перепишемо формулу (2) у вигляді

$$Lf(x,y)=(1-h(x)-g(y))(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j))+$$
$$+h(x)(\eta m_{ij}(y)-\mu p_j(y)+\psi p_j(x))+ \qquad (5)$$
$$+g(y)\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(y)\right).$$

Візьмемо у формулі (5) $y=y_j$, в результаті отримаємо

$$Lf(x,y)\big|_{y=y_j}=(1-h(x)-g(y_j))(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y_j)-\varphi p_i(y_j))+$$
$$+h(x)(\eta m_{ij}(y_j)-\mu p_j(y_j)+\psi p_j(x))+$$
$$+g(y_j)\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(y_j)\right).$$

Оскільки $g(y_j)=0$, то

$$Lf(x,y)\big|_{y=y_j}=(1-h(x))\cdot\psi p_j(x)+h(x)(\eta m_{ij}(y_j)-\mu p_j(y_j)+\psi p_j(x)).$$

Згідно формули (1), маємо

$$Lf(x,y)\big|_{y=y_j}=(1-h(x))\cdot\psi p_j(x)+$$
$$+h(x)(\eta m_{ij}(y_j)-\eta m_{ij}(y_j)+\psi p_j(x))=\psi p_j(x).$$

Аналогічно, підставивши формулі (5) $x=x_i$, отримаємо

$$Lf(x,y)\big|_{x=x_i}=(1-h(x_i)-g(y))(\psi p_j(x_i)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j))+$$
$$+h(x_i)(\eta m_{ij}(y)-\mu p_j(y)+\psi p_j(x_i))+$$
$$+g(y)\left(\eta m_{ij}(x_i)-\mu m_i(x_i)+\varphi p_i(y)\right)=\left|\begin{array}{l} h(x_i)=0 \\ \varphi p_i(y_j)=\psi p_j(x_i) \\ \mu m_i(x_i)=\eta m_{ij}(x_i)\end{array}\right|=$$
$$=(1-g(y))\cdot\varphi p_i(y)+g(y)\cdot\varphi p_i(y)=\varphi p_i(y).$$

Таким чином, умови (3) перевірені.

Підставивши $y=g^{-1}(1-h(x))$ у формулу (5), отримаємо

$$Lf(x,y)\big|_{y=g^{-1}(1-h(x))}=$$
$$=(1-h(x)-g(g^{-1}(1-h(x))))(\psi p_j(x)+\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x)))-\varphi p_i(y_j))+$$
$$+h(x)(\eta m_{ij}(g^{-1}(1-h(x)))-\mu p_j(g^{-1}(1-h(x)))+\psi p_j(x))+$$
$$+g(g^{-1}(1-h(x)))\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x)))\right)=$$
$$=h(x)(\eta m_{ij}(g^{-1}(1-h(x)))-\mu p_j(g^{-1}(1-h(x)))+\psi p_j(x))+$$
$$+g(g^{-1}(1-h(x)))\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x)))\right).$$

Згідно з введеними позначеннями, маємо

$$\eta m_{ij}(g^{-1}(1-h(x))) = f\left(h^{-1}(1-g(g^{-1}(1-h(x)))) + 0, g^{-1}(1-h(x))\right) =$$

$$= \left(h^{-1}(h(x))) + 0, g^{-1}(1-h(x))\right) = \left(x, g^{-1}(1-h(x)) - 0\right) = \eta m_{ij}(x);$$

$$\mu p_j(g^{-1}(1-h(x)) = f\left(h^{-1}(1-g(g^{-1}(1-h(x))) + 0, y_j - 0\right) =$$

$$= f\left(x, y_j + 0\right) = \psi p_j(x);$$

$$\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x))) = f(x_i + 0, g^{-1}(1-h(x))) = \mu m_i(x).$$

Тоді отримаємо

$$Lf(x,y)\Big|_{y=g^{-1}(1-h(x)))} = h(x)(\eta m_{ij}(x) - \psi p_j(x) + \psi p_j(x)) +$$

$$+(1-h(x))\left(\eta m_{ij}(x) - \mu m_i(x) + \mu m_i(x)\right) =$$

$$= h(x)\cdot \eta m_{ij}(x) + (1-h(x))\cdot \eta m_{ij}(x) = \eta m_{ij}(x).$$

Аналогічно доводиться, що $Lf(x,y)\Big|_{x=h^{-1}(1-g(x)))} = \eta m_{ij}(y)$.

І умова (4) доведена.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Якщо $f(x,y) \in C^{(1,1)}(\mathrm{T}_{ij})$, то для залишку $Rf(x,y) = = (I-L)f(x,y)$ виконуються співвідношення

$$Rf(x,y) = (1-h(x)-g(y))\int_0^x\int_0^y f^{(1,1)}(u,v)dudv +$$

$$+f(x)\int_x^{h^{-1}(1-g(y))}\int_0^y f^{(1,1)}(u,v)dudv + g(y)\int_0^x\int_y^{g^{-1}(1-h(x))} f^{(1,1)}(u,v)dudv.$$

Доведення. Запишемо тотожності

$$f(x,y) = \psi p_j(x) + \varphi p_i(y) + \int_{x_i}^x\int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u,v)dudv,$$

$$f(x,y) = \eta m_{ij}(x) - \mu p_j(y) + f(x,y_j) + \int_x^{h^{-1}(1-g(y))}\int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u,v)dudv,$$

$$f(x,y) = \eta m_{ij}(x) - \mu p_i(x) + \varphi p_i(y) + \int_{x_i}^x\int_{y_j}^{g^{-1}(1-h(x))} f^{(1,1)}(u,v)dudv.$$

За їх допомогою отримаємо тотожність

$$f(x,y) \equiv (1-h(x)-g(y))f(x,y) + h(x)f(x,y) + g(y)f(x,y) \equiv$$

$$\equiv Lf(x,y) + Rf(x,y).$$

Теорему 2 доведено.

Наслідок. Для довільних функцій $f(x,y)=u(x)+v(y)$, де $u(x),v(y)$ — довільні функції однієї змінної справедлива рівність

$$Lf(x,y)=f(x,y).$$

Доведення випливає з того, що $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(u(x)+v(y))=0$.

Зауваження. Якщо $\varphi p_i(y)=\varphi m_i(y)$, $\psi p_j(x)=\psi m_j(x)$, $\eta p_{ij}(x)=$ $=\eta m_{ij}(x)$, то побудований розривний сплайн вигляду (2) є неперервним інтерлінаційним сплайном на границях трикутного елементу T_{ij}.

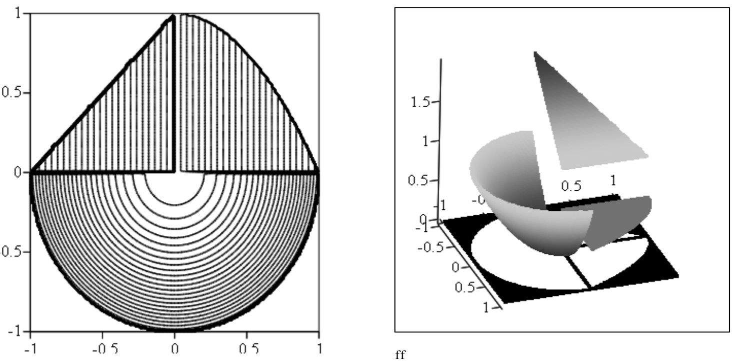
Приклад. Нехай функція $f(x,y)$ визначена в області $T=T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, представленій на рис. 2а). Катети цих трикутних елементів утворені прямими $x=0,\ y=0$, а гіпотенузи задані рівнянням вигляду $h(x)+g(y)=1$, де $h(x),\ g(y)$ задовольняють умовам $h(0)=0,\ g(0)=0$ та в кожному трикутному елементі задаються наступним чином

$$T_1:\ h(x)=x^2,\ g(y)=y, \qquad T_2: h(x)=-x,\ g(y)=y,$$

$$T_3:\ h(x)=x^2,\ g(y)=y^2, \qquad T_4:\ h(x)=x^2,\ g(y)=y^2.$$

Нехай у визначеній області задана функція $f(x,y)$ (рис. 2б))

$$f(x,y)=\begin{cases} 0.5, & 0<x<1,\ 0<y<1-x^2 \\ -x+1, & -1<x<0,\ 0<y<1+x \\ x^2+y^2, & -\sqrt{1-y^2}<x<\sqrt{1-y^2},\ -1<y<0 \end{cases}$$



а) б)

Рис. 2. *Графічне представлення: а) області визначення функції $f(x,y)$ та б) самої функції $f(x,y)$*

Тобто функція $f(x,y)$ на лініях тріангуляції має розриви першого роду, але не на всіх лініях.

За вихідні дані будемо використовувати сліди заданої функції на лініях трикутних елементів:

$$T_1: \ \varphi p(y) = f(+0,y) = 0.5, \ \psi p(x) = f(y,+0) = 0.5,$$
$$\eta m(x) = f(x, 1-x^2-0) = 0.5;$$
$$T_2: \ \varphi m(y) = f(-0,y) = 1, \quad \psi p(x) = f(x,+0) = -x+1,$$
$$\eta p(y) = f(x, 1+x+0) = -x+1;$$
$$T_3: \ \varphi m(y) = f(-0,y) = y^2, \quad \psi m(x) = f(x,-0) = x^2,$$
$$\eta p(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2}+0) = 1;$$
$$T_4: \ \varphi p(y) = f(+0,y) = y^2, \quad \psi m(x) = f(x,-0) = x^2,$$
$$\eta m(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2}-0) = 1.$$

Ці сліди задовольняють умовам теореми 1 у кожному з чотирьох трикутників, тому за формулою (2) будуємо розривний інтерлінаційний сплайн, який в точності співпадає із заданою функцією (рис. 2б)).

Висновки. У статті запропоновано метод побудови розривних сплайн-інтерлінантів, які як частинний випадок включають в себе розривні сплайни, для випадку, коли область визначення досліджуваної функції розбивається на прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою. Сформульована і доведена теорема про інтерлінаційні властивості таких розривних конструкцій. Визначений загальний вигляд похибки наближення побудованими сплайн-інтерлінантами. Визначені умови, при яких побудована розривна конструкція перетворюється в неперервний інтерлінаційний сплайн.

У подальшому автор планує застосувати розроблений метод до розв’язання двовимірної задачі комп’ютерної томографії, а саме до відновлення відомого фантома Шепа—Логана.

Список використаних джерел:

1. Гаврилюк І. П. Методи обчислень : підручник : у 2 ч. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. — К. : Вища школа, 1995.
2. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук. — М. : Наука, 1984. — 352 с.
3. Стечкин С. Б. Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. — М. : Наука, 1976.
4. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1976.
5. Литвин О. М. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами (прямокутні елементи) / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // «Тео-

рія прийняття рішень» : праці V міжнародної школи-семінару, 27 вересня — 1 жовтня 2010 р. — Ужгород, 2010. — С. 141–142.
6. Литвин О. М. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Таврічний вісник інформатики та математики. — Симферополь, 2011. — № 1. — С. 63–72.
7. Литвин О. Н. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) / О. Н. Литвин, Ю. И. Першина. — К., 2011. — № 1. — С. 96–105.
8. Литвин О. М. Наближення розривних функцій кусково-лінійними інтерполяційними розривними сплайнами на трикутній сітці вузлів / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Доповіді НАНУ. — 2012. — № 1. — С. 38–43
9. Литвин О. М. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Управляющие системы и машины. — К., 2011. — № 5. — С.34–47.
10. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи / О. М. Литвин. — К. : Наукова думка, 2005. — 333 с.

In work it is under construction and investigated discontinuous interlineation spline for approach of discontinuous function of two variables with a range of definition which breaks into rectangular triangles with a curvilinear hypotenuse. Theorems about interlineational properties and an error of the constructed discontinuous design are formulated and proved.

Key words: *discontinuous function, discontinuous spline-interlinant, a curvilinear rectangular triangle.*

Отримано: 17.04.2012