

УДК 519.6

М. Р. Петрик, канд. техн. наук,**М. М. Петрик**, магістр

Тернопільський національний технічний університет

імені Івана Пулюя, м. Тернопіль

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ В БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ВОЛОГОМІСТКИХ ПОРИСТИХ ЧАСТИНОК МЕТОДАМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Методами інтегральних перетворень Ганкеля 2-го роду і Фур'є побудовано аналітичний розв'язок узагальненої нами змішаної крайової задачі для фільтраційної консолідації в багатокомпонентних неоднорідних циліндричних середовищах вологомістких пористих частинок. Обґрунтована розв'язність крайової задачі. Досліджена обчислювальна збіжність розв'язку у вигляді вкладених сум за різними послідовностями спектральних значень. Здійснено комплексне чисельне моделювання і аналіз динаміки просторово-розподілених полів тисків в рідині в багатокомпонентному неоднорідному циліндричному середовищі мікропористих частинок.

Ключові слова: *фільтраційна консолідація, багатокомпонентні неоднорідні середовища, вологомісткі пористі частинки, початково-крайова задача, інтегральні перетворення, задача Коші, функції впливу, функції Гріна, числове моделювання.*

Вступ. Розглядаються процеси фільтраційної консолідації та фільтраційного відтиску (solid-liquid pressing) в багатокомпонентних неоднорідних циліндричних середовищах вологомістких пористих частинок біологічної природи. Структура таких середовищ рослинного походження містить розгалужену систему вологомістких клітин, міжклітинних порожнин, мікропор, через які здійснюється масоперенос [1—6]. При фільтраційному відтиску у попередньо сформованому пласті з тонких частинок біологічного матеріалу, що піддається механічному стискуванню, виникають внутрішні і зовнішні градієнти тисків відповідно в частинках і міжчастинковому просторі, які спричинюють відтоки рідини із пласту та частинок. При цьому внутрішні потоки рідини спрямовані від середини мікропор вологомістких частинок до їх поверхонь. Далі формуються проміжні (транзитні) потоки, спрямовані від зовнішніх поверхонь частинок у макропори міжчастинкового простору (extraparticle spaces). В макропорах міжчастинкового простору виникають зовнішні відтоки рідини назовні пласту

середовища. Відповідна феноменологічна модель такої фільтраційної консолідації та відтиску рідини з частинок в однорідній і одновимірній постановці для матеріалів клітинної структури розглянута в [1; 4]. Остання ґрунтується на рівняннях балансу маси у внутрічастинковому просторі (intraparticle spaces), включаючи внутрі- і міжклітинний простір, та міжчастинковому просторі. Згідно з цією моделлю, потік рідини з мікропорів частинок розглядається як такий, що є незначним у порівнянні з потоком з мікропорів частинок назовні (в макропори) та потоком назовні пласту фільтраційного середовища. Розглядувана в [2] модель включає припущення про псевдостатичність потоку між внутрічастинковим і міжчастинковим просторами, що визначає інтенсивність потоку з середини частинки назовні є прямо пропорціональна різниці тисків всередині і назовні частинки.

Нами виконано узагальнення вказаної моделі на неоднорідну багатоскладову циліндричну область фільтраційної консолідації, схематизація якої подана на рис. 1 Фільтрувальне середовище поступає вздовж вісі z на вхід робочої області (межа $z = l_0$), де через фільтрувальну мембрану (положення $r = R$) відбувається розділення твердої і рідинної фази. Рідинна фаза проходить крізь пори фільтрувальної перепони, а непроникна тверда фаза здійснює рух вздовж осі z в напрямі виходу із циліндричного робочого каналу (межа $z = l$).

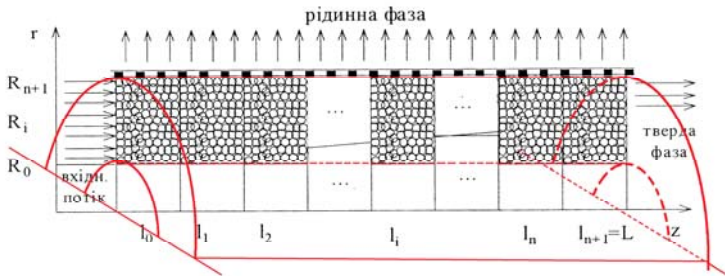


Рис. 1. Схематизація робочої області середовища фільтраційної консолідації

Математична постановка задачі. З врахуванням одержаного в [2—5] диференціального рівняння консолідації сформулюємо наступну задачу фільтрації та відтиску дисперсних середовищ з урахуванням неоднорідностей властивостей консолідації осаду вздовж напрямку руху фільтрувального середовища шляхом апроксимації неоднорідної області (l_0, l) кусково-однорідною: побудувати обмежений в області

$$D = \left\{ (t, r, z) : t > 0, r \in (R_0, R); z \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (l_{k-1}, l_k), 0 \leq l_0 < l_{n+1} < \infty \right\}$$

розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_1} \left(\frac{\partial^2 P_k(t, r, z)}{\partial t^2} \right) + (1 + \delta_1) \frac{\partial P_k}{\partial t} = \\ & = \left(\frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) b_{r_0}^2 \left[\frac{\partial^2 P_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_k}{\partial r} \right] + \left(\frac{1}{v_1} \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) b_k^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial z^2} + f(t, r), \\ & f_k(t, r) = \frac{1}{v_1} \frac{\partial^2 P_{l_0}(t, r)}{\partial t^2} + (1 + \delta_i) \frac{\partial P_{l_0}}{\partial t}, \quad k = \overline{1, n+1} \end{aligned} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$P_k(t, r, z)|_{t=0} = g_{1k}(r, z); \quad \frac{\partial P_k}{\partial r} \Big|_{t=0} = g_{2k}(r, z), \quad (2)$$

крайовими умовами за змінною r

$$\frac{\partial P_k}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0; \quad P_k(t, r, z)|_{r=R} = g_k(t, z), \quad (3)$$

крайовими та інтерфейсними умовами за змінною z

$$\begin{aligned} P_1(t, r, z)|_{z=l_0} &= P_{l_0}(t, r); \quad P_{n+1}(t, r, z)|_{z=l_{n+1}} = P_l(t, r); \\ & [P_k(t, r, z) - P_{k+1}(t, r, z)]|_{z=l_k} = 0, \\ & \left[\frac{\partial P_k}{\partial z} - \frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_k} \frac{\partial P_{k+1}}{\partial z} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $P_k(t, r, z)$, $k = \overline{1, n+1}$ — функції просторово-часових розподілів тисків у рідкій фазі неоднорідного фільтрувального середовища; (l_{k-1}, l_k) , $k = \overline{1, n+1}$ k -ий пласт (сегмент) середовища в вздовж осі z ; b_k^2 — складова коефіцієнта консолідації твердої фази вздовж осьового напрямку переносу (осі z) в k -му пласті неоднорідного фільтрувального середовища; $b_{r_0}^2$ — радіальна складова коефіцієнта консолідації твердої фази (вздовж осі r); $\zeta_k = \frac{1}{\mu r_k}$ — компоненти коефіцієнта фільтрації в k -му пласті середовища, μ , r_k — коефіцієнти динамічної в'язкості рідини і опору k -го пласта середовища, v_1 , δ_1 — експериментальні кінетичні параметри, визначені в [2; 4].

Схема алгоритму побудови розв'язку. Застосуємо спочатку до задачі (1)—(4) скінченне інтегральне перетворення Ганекля другого

роду [8; 9], встановивши конкретний вигляд його ядра (власної функції) шляхом розв'язання наступної спектральної крайової задачі Штурма—Ліувілля: побудувати в області $I_R = \{r : r \in (R_0, R)\}$ ненульовий розв'язок рівняння Бесселя

$$(B_0 + \lambda^2)V_0(r, \lambda) = 0 \quad (5)$$

з однорідними крайовими умовами

$$\left. \frac{d}{dr} V_0(r, \lambda) \right|_{r=R_0} = 0, \quad V_0(r, \lambda)|_{r=R} = 0, \quad (6)$$

де $B_0 = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)$ — диференціальний оператор Бесселя, $V_0(r, \lambda)$,

λ — власні функції та власні значення рівняння (5).

Загальним розв'язком рівняння (5) є функція $V_0(r, \lambda) = AJ_0(\lambda r) + BN_0(\lambda r)$, де $J_0(\lambda r)$, $N_0(\lambda r)$ — функції Бесселя першого та другого роду нульового порядку, що утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння.

Крайові умови (6) дають систему рівнянь для визначення сталих інтегрування A і B власної функції $V_0(r, \lambda)$

$$\left. \begin{aligned} AJ_1(\lambda R_0) + BN_1(\lambda R_0) &= 0 \\ AJ_0(\lambda R) + BN_0(\lambda R) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де $J_1(\lambda r)$, $N_1(\lambda r)$ — функції Бесселя першого та другого роду першого порядку.

Умовою розв'язності системи (7) є рівність її визначника нулю

$$\Delta(\lambda) \equiv N_0(\lambda R)J_1(\lambda R_0) - J_0(\lambda R)N_1(\lambda R_0) = 0. \quad (8)$$

Характеристичне трансцендентне рівняння (8) має зліченну множину коренів, що не мають скінченної граничної точки. Корені рівняння $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ утворюють монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою в нескінченності.

Визначивши λ_j та сталі інтегрування A і B та підставивши в останнє рівняння (7), остаточно визначимо вигляд власних функцій

$$V_0(r, \lambda_j) = N_0(\lambda_j R)J_0(\lambda_j r) - J_0(\lambda_j R)N_0(\lambda_j r). \quad (9)$$

Виходячи з [8], інтегральний оператор прямої дії скінченного інтегрального перетворення Ганкеля другого роду за змінною r буде визначений формулою

$$\mathcal{H}[P_k(t, r, z)] = \int_{R_0}^R P_k(t, r, z) V_0(r, \lambda_j) r dr \equiv P_{kj}(t, z). \quad (10)$$

Інтегральний оператор зворотної дії скінченного інтегрального перетворення Ганкеля другого роду має вигляд

$$\mathcal{H}^{-1}[P_{kj}(t, z)] = \sum_{j=1}^{\infty} P_{kj}(t, z) \frac{V_0(r, \lambda_j)}{\|V_0(r, \lambda_j)\|^2} \equiv P_k(t, r, z), \quad (11)$$

де квадрат норми $\|V_0(r, \lambda_j)\|^2 = \int_{R_0}^R [V_0(r, \lambda_j)]^2 r dr$.

Застосувавши до диференціальної компоненти $B_0[P_k]$, вираженої оператором Бесселя, інтегральний оператор прямої дії, визначений (10), отримаємо шляхом інтегрування двічі частинами основну тотожність інтегрального перетворення

$$\begin{aligned} H[B_0[P_k]] &\equiv H\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) P_k(t, r, z)\right] = \int_{R_0}^R \left(\frac{\partial^2 P_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_k}{\partial r}\right) V_0(r, \lambda_j) r dr = \\ &= -\lambda_j^2 P_{kj}(t, z) + r \left(\frac{\partial P_k}{\partial r} V_0(r, \lambda_j) - P_k \frac{\partial V_0(r, \lambda_j)}{\partial r}\right) \Big|_{R_0}^R = \\ &= -\lambda_j^2 P_{kj}(t, z) - \lambda_j R \cdot g_k(t, z) [N_0(\lambda_j R) J_1(\lambda_j R) - J_0(\lambda_j R) N_1(\lambda_j R)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Застосувавши до вихідної крайової задачі (1)–(4) інтегральний оператор (10) внаслідок тотожності (12) одержимо нову крайову задачу щодо побудови обмеженого в області $D_z = \{(t, z) : t > 0,$

$z \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (l_{k-1}, l_k), 0 \leq l_0 < l_{n+1} < \infty\}$ розв'язку системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_{kj}(t, z)}{\partial t^2} + \nu_1(1 + \delta_1) \frac{\partial P_{kj}}{\partial t} + b_{r_0}^2 \lambda_j^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_1\right) \frac{\partial^2 P_{kj}}{\partial z^2} = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_1\right) b_k^2 \frac{\partial^2 P_{kj}(t, z)}{\partial z^2} + \mathcal{F}_{kj}(t, z), \\ \mathcal{F}_{kj}(t, z) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_1\right) b_{r_0}^2 \lambda_j \cdot g_k(t, z) \times \\ \times [N_0(\lambda_j R) J_1(\lambda_j R) - J_0(\lambda_j R) N_1(\lambda_j R)] + \nu_1 f_{kj}(t, z) \end{aligned} \quad (13)$$

з початковими умовами

$$P_{kj}(t, z) \Big|_{t=0} = g_{1kj}(z); \quad \frac{\partial P_{kj}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{2kj}(z) \quad (14)$$

і крайовими та інтерфейсними умовами за змінною z

$$P_{1j}(t, z) \Big|_{z=l_0} = P_{l_0j}(t), \quad P_{n+1,j}(t, z) \Big|_{z=l} = P_{lj}(t),$$

$$\left[P_{kj}(t, z) - P_{k+1,j}(t, z) \right] \Big|_{z=l_k} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial P_{kj}}{\partial z} - \frac{\zeta_k}{\zeta_{k+1}} \frac{\partial P_{k+1,j}}{\partial z} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Застосовуємо до задачі (13)—(15) інтегральне перетворення Фур'є для багатокомпонентного обмеженого неоднорідного середовища [7—9]. Привівши крайові та інтерфейсні умови (15) до більш узагальненого вигляду

$$\left(\zeta_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \eta_{11}^0 \right) P_{1j}(t, z) \Big|_{z=l_0} = P_{l_0j}(t), \quad \left(\zeta_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \eta_{22}^{n+1} \right) P_{n+1,j}(t, z) \Big|_{z=l} = P_{lj}(t)$$

$$\left[\left(\zeta_{i1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \eta_{i1}^k \right) P_{kj}(t, z) - \left(\zeta_{i2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \eta_{i2}^k \right) P_{k+1,j}(t, z) \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \quad i = \overline{1, 2}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (16)$$

на основі розв'язання відповідної спектральної крайової задачі Штурма—Ліувілля, що відповідає вихідній крайовій задачі (13)—(15), отримуємо наступні вирази для власної вектор-функції $V(z, \beta_m)$ і її компонентів даного виду інтегрального перетворення:

$$V(z, \beta_m) = \sum_{k=1}^{n+1} V_k(z, \beta_m) \theta(z - l_{k-1}) \theta(l_k - z),$$

$$V_k(z, \beta_m) = \left(\prod_{i=k}^n c_{21, i} q_{i+1, m} \right) \left(\omega_{k-1, 2}(\beta_m) \cos q_{km} z - \omega_{k-1, 1}(\beta_m) \sin q_{km} z \right), \quad (17)$$

$$k = \overline{1, n},$$

$$V_{n+1}(z, \beta_m) = \omega_{n2}(\beta_m) \cos q_{n+1, m} z - \omega_{n1}(\beta_m) \sin q_{n+1, m} z,$$

де β_m , $m = \overline{0, \infty}$ — власні числа інтегрального перетворення, $\theta(x)$ —

одинична функція Гевісайда, $|\zeta_{11}^0| + |\eta_{11}^0| \neq 0$, $|\zeta_{22}^{n+1}| + |\eta_{22}^{n+1}| \neq 0$,

$$v_{ij}^{k1}(q_{sm} l_k) \equiv \left(\zeta_{ip}^k \frac{d}{dz} + \eta_{ip}^k \right) \cos q_{sm} z \Big|_{z=l_k} = -\zeta_{ip}^k q_{sm} \sin q_{sm} l_k + \eta_{ip}^k \cos q_{sm} l_k,$$

$$v_{ij}^{k2}(q_{sm} l_k) \equiv \left(\zeta_{ip}^k \frac{d}{dz} + \beta \eta_{ip}^k \right) \sin q_{sm} z \Big|_{z=l_k} =$$

$$= -\zeta_{ip}^k q_{sm} \cos q_{sm} l_k + \eta_{ip}^k \sin q_{sm} l_k; \quad i, p = \overline{1, 2}, \quad s \in \{k, k+1\}$$

$$\begin{aligned} \psi_{ip}^k(q_k l_k, q_{k+1} l_k) &= v_{11}^{ki}(q_k l_k) v_{22}^{kp}(q_{k+1} l_k) - v_{21}^{ki}(q_k l_k) v_{12}^{kp}(q_{k+1} l_k); \\ \omega_{01}(\beta_m) &= -v_{11}^{01}(q_1 l_0), \omega_{02}(\beta_m) = -v_{11}^{02}(q_1 l_0); \\ \omega_{kp}(\beta_m) &= \omega_{k-1,2}(\beta_m) \psi_{1p}^k(q_k l_k, q_{k+1} l_k) - \omega_{k-1,1}(\beta_m) \psi_{2p}^k(q_k l_k, q_{k+1} l_k), \\ q_{km} &= \frac{\beta_m}{b_k}; i, p = \overline{1, 2}, \quad k = \overline{1, \infty}; m = \overline{0, \infty} \end{aligned}$$

Власні числа β_m , $m = \overline{0, \infty}$ власної вектор-функції $V(z, \beta_m)$ є коренями характеристичного трансцендентного рівняння

$$\Delta_n(\beta) = v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1} l) \omega_{n,1}(\beta) - v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1} l) \omega_{n,2}(\beta),$$

корені якого утворюють монотонно зростаючу послідовність $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$ з єдиною граничною точкою в нескінченності.

Система власних функцій $\{V(z, \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$ є повною, замкнутою і ортогональною на множині $I_n = \left\{ z \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (l_{k-1}, l_k), \quad 0 \leq l_0 < l_{n+1} < \infty \right\}$ з квадратом норми [7; 8]

$$\|V(z, \beta_m)\|^2 = \int_{l_0}^l [V(z, \beta_m)]^2 \sigma(z) dz \equiv \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} [V_k(z, \beta_m)]^2 \sigma_k dz$$

та ваговою функцією

$$\sigma(z) = \sum_{k=1}^{n+1} \sigma_k \theta(z - l_{k-1}) \theta(l_k - z), \quad \sigma_k = \frac{1}{b_k^2} \prod_{m=k}^n \frac{c_{11,i}}{c_{21,i}}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}^2}, \quad c_{ik} = \zeta_{2i}^k \eta_{1i}^k - \zeta_{1i}^k \eta_{2i}^k \neq 0, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Теорема (типу Стеклова). Будь-яка двічі неперервно диференційовна на множині I_n вектор-функція $P(z)$, яка задовольняє крайові та інтерфейсні умови (15) крайової задачі (13)—(15), розгортається на I_n в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою власних вектор-функцій $\{V(z, \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$, визначених (17):

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{l_0}^l P(\xi) V(\xi, \beta_m) \sigma(\xi) d\xi \frac{V(z, \beta_j)}{\|V(z, \beta_j)\|^2} \equiv \\ &\equiv \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} P_k(\xi) V_k(\xi, \beta_m) \sigma_k d\xi \frac{V_k(z, \beta_m)}{\|V(z, \beta_m)\|^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Ряд Фур'є (18) породжує пряме F_n та обернене F_n^{-1} скінченні інтегральні перетворення Фур'є для неоднорідного обмеженого $(n + 1)$ — складового середовища переносу [7, 8]:

$$F_n [P(z)] = \int_{l_0}^l P(z) V(z, \beta_m) \sigma(z) dz = \tag{19}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} P_k(z) V_k(z, \beta_m) \sigma_k dz \equiv P_m,$$

$$F_n^{-1} [P_m] = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \frac{V(z, \beta_m)}{\|V(z, \beta_m)\|^2} \equiv P(z). \tag{20}$$

З метою застосування отриманих виразів інтегральних перетворень для побудови аналітичного розв'язку досліджуваної крайової задачі одержимо основну тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора Фур'є

$$\mathcal{L}_n = \sum_{k=1}^{n+1} b_k^2 \theta(z - l_{k-1}) \theta(l_k - z) \frac{d^2}{dz^2}.$$

Теорема (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $P(t, z) \in C^{(3)}(I_n)$, задовольняє за змінною z систему інтерфейсних умов (16) і крайові умови

$$\left(\zeta_{11}^0 \frac{d}{dz} + \eta_{11}^0 \right) P_1(t, z) \Big|_{z=l_0} = P_{l_0}(t), \tag{21}$$

$$\left(\zeta_{22}^{n+1} \frac{d}{dz} + \eta_{22}^{n+1} \right) P_{n+1}(t, z) \Big|_{z=l_{n+1}=l} = P_l(t),$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора \mathcal{L}_n :

$$F_n [\mathcal{L}_n [P(t, z)]] = -\beta_m^2 P_m(t) + b_{n+1}^2 \frac{\sigma_{n+1}}{\zeta_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \beta_m) \times \tag{22}$$

$$\times P_l(t) - b_1^2 \frac{\sigma_1}{\zeta_{11}^0} V_1(l, \beta_m) \cdot P_{l_0}(t).$$

Основна тотожність (22) встановлюється безпосередніми перетвореннями шляхом застосування інтегрального оператора прямої дії, визначеного (19) та інтегрування два рази частинами, використовуючи властивості відповідної спектральної крайової задачі Штурма—Ліувілля.

Запишемо систему (13) та початкові умови у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu_1(1 + \delta_1) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_1 \right) \left(b_{r_0}^2 \lambda_j^2 - b_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu_1(1 + \delta_1) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_1 \right) \left(b_{r_0}^2 \lambda_j^2 - b_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ \dots \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu_1(1 + \delta_1) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_1 \right) \left(b_{r_0}^2 \lambda_j^2 - b_{n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1j} \\ P_{2j} \\ \dots \\ P_{n+1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1j} \\ \mathcal{F}_{2j} \\ \dots \\ \mathcal{F}_{n+1,j} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} P_{kj}(t, z) \\ P_{kj}(t, z) \\ \dots \\ P_{kj}(t, z) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1,j}(z) \\ g_{1,j}(z) \\ \dots \\ g_{1,n+1,j}(z) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} P_{kj}(t, z) \\ \dots \\ P_{kj}(t, z) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{2,j}(z) \\ g_{2,j}(z) \\ \dots \\ g_{2,n+1,j}(z) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Застосуємо до задачі (23), (24) інтегральний оператор (19), зображений у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_n [\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \beta_m) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \beta_m) \sigma_2 dz \dots \int_{l_{n-1}}^{l_n} \dots V_n(z, \beta_m) \sigma_n dz \int_{l_n}^{l_{n+1}} \dots V_{n+1}(z, \beta_m) \sigma_{n+1} dz \right].$$

У результаті отримуємо задачу Коші

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \left[\nu_1(1 + \delta_i) + b_{r_0}^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right] \frac{d}{dt} + \nu_1 \left(b_{r_0}^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right) \right) P_{jm}(t) = \Psi_{jm}(t), \quad (25)$$

$$P_{jm}(t) \Big|_{t=0} = g_{1,jm}; \quad \frac{dP_{jm}}{dt} \Big|_{t=0} = g_{2,jm}, \quad (26)$$

де

$$P_{jm}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} P_{kj}(t, z) \equiv \sum_{k=1}^{n+1} P_{kj}(t, z) V_k(z, \beta_m) \sigma_k dz,$$

$$\Psi_{jm}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} \mathcal{F}_{kj}(t, z) V_k(z, \beta_m) \sigma_k dz + \left(\frac{d}{dt} + \nu_1 \right) \times$$

$$\times \left[b_{n+1}^2 \frac{\sigma_{n+1}}{\zeta_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \beta_m) \cdot P_l(t) - b_1^2 \frac{\sigma_1}{\zeta_{11}^0} V_1(l, \beta_m) \cdot P_0(t) \right].$$

Безпосередньо встановлюється, що єдиним розв'язком задачі Коші (25), (26) є функція [7]

$$P_{jm}(t) = -\frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\left(\gamma_2 g_{1_{jm}} - g_{2_{jm}} \right) e^{\gamma_1 t} - \left(g_{2_{jm}} - \gamma_1 g_{1_{jm}} \right) e^{\gamma_2 t} \right] + \int_0^t \frac{e^{\gamma_1(t-\tau)} - e^{\gamma_2(t-\tau)}}{\gamma_1 - \gamma_2} \Psi_{jm}(\tau) d\tau, \quad (27)$$

де

$$\gamma_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[\nu_1(1 + \delta_1) + b_0^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\nu_1(1 + \delta_1) + b_0^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right]^2 - \nu_1 \left(b_0^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right)} \equiv -\varphi_{jm} \pm \phi_{jm}$$

корені характеристичного рівняння, що відповідає диференціальному рівнянню задачі,

$$\gamma^2 + \left[\nu_1(1 + \delta_1) + b_0^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right] \gamma + \nu_1 \left(b_0^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right) = 0, \quad (28)$$

умова розв'язності якого безпосередньо встановлюється у вигляді нерівності

$$\frac{4\nu_1 \left(b_0^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right)}{\left[\nu_1(1 + \delta_1) + b_0^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right]^2} < 1.$$

Після перетворень розв'язок (27) набуває класичного вигляду

$$P_{jm}(t) = \left(\left[\nu_1(1 + \delta_1) + b_0^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right] + \frac{d}{dt} \right) \mathcal{K}_{jm}(t, \lambda_j, \beta_m) g_{1_{jm}} + \mathcal{K}_{jm}(t, \lambda_j, \beta_m) g_{2_{jm}} + \int_0^t \mathcal{K}_{jm}(t - \tau, \lambda_j, \beta_m) \Psi_{jm}(\tau) d\tau, \quad (29)$$

де $\mathcal{K}_{jm}(t - \tau, \beta_m)$ — фундаментальна функція Коші, яка будується у вигляді [10]:

$$\mathcal{K}_{jm}(t - \tau, \lambda_j, \beta_m) = e^{-\frac{1}{2} \left[\nu_1(1 + \delta_1) + b_0^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2 \right] (t - \tau)} \frac{2sh(\varphi_m(t - \tau))}{\varphi_m}, \quad (30)$$

$$\varphi_m = \frac{1}{2} \left[\left(\nu_1 - \beta_m^2 \right)^2 + \nu_1 \delta_1 \left(2\nu_1 + \nu_1 \delta_1 + 2\beta_m^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Застосувавши до матриці-елемента $[P_{jm}(t)]$, де $P_{jm}(t)$ визначено формулою (29), операторну матрицю-стовпець

$$F_n^{-1} [\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots V_1(z, \beta_{m_1}) \left(\|V(z, \beta_{m_1})\|_1^2 \right)^{-1} \\ \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots V_2(z, \beta_{m_1}) \left(\|V(z, \beta_{m_1})\|_1^2 \right)^{-1} \\ \dots \\ \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots V_{n+1}(z, \beta_{m_1}) \left(\|V(z, \beta_{m_1})\|_1^2 \right)^{-1} \end{bmatrix},$$

отримуємо розв'язок крайової задачі (13)—(15):

$$\begin{aligned} P_{kj}(t, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{jm}(t) \frac{V(z, \beta_m)}{\|V(z, \beta_m)\|^2} = \\ &= \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \left[\mathcal{H}_{k, k_1, j}(t, z, \xi) g_{2_{k_1}}(\xi) + \mathcal{H}_{k, k_1, j}^1(t, z, \xi) g_{1_{k_1, j}}(\xi) \right] \sigma_{k_1} d\xi + \\ &\quad + \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_0^t \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \mathcal{H}_{k, k_1, j}(t - \tau, z, \xi) \mathcal{F}_{k_1, j}(\tau, \xi) \sigma_{k_1} d\xi d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \left[W_{l_0, kj}(t - \tau, z) P_{0j}(\tau) + W_{l, kj}(t - \tau, z) P_{ij}(\tau) \right] d\tau, \quad k = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \tag{31}$$

Тут функції Гріна

$$\begin{aligned} W_{l_0, kj}(t - \tau, z) &= \\ &= -b_1^2 \frac{\sigma_1}{\zeta_{11} \zeta} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_{jm}(t - \tau, \beta_m) \frac{V_1(l_0, \beta_m) V_k(z, \beta_m)}{\|V(z, \beta_m)\|^2}, \quad k = \overline{1, n+1}, \\ W_{l, kj}(t - \tau, z) &= \\ &= -b_{n+1}^2 \frac{\sigma_{n+1}}{\zeta_{22}} \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_{jm}(t - \tau, \beta_m) \frac{V_k(z, \beta_m) V_{n+1}(l, \beta_m)}{\|V(z, \beta_m)\|^2}, \quad k = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

функції впливу

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{k, k_1, j}(t, z, \xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_{jm}(t, \beta_m) \frac{V_k(z, \beta_m) V_{k_1}(\xi, \beta_m)}{\|V(z, \beta_m)\|^2}, \quad k = \overline{1, n+1}, \\ \mathcal{H}_{k, k_1, j}^1(t, z, \xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left[v_1(1 + \delta_1) + \beta_m^2 + b_{r_0}^2 \lambda_j^2 \right] + \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{K}_{jm}(t, \beta_m) \times \\ &\quad \times \frac{V_k(z, \beta_m) V_{k_1}(\xi, \beta_m)}{\|V(z, \beta_m)\|^2}, \quad k = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Перейшовши в (31) до оригіналу згідно (22), отримуємо остаточно єдиний розв'язок вихідної змішаної крайової задачі фільтраційної консолидації (1)—(4):

$$\begin{aligned}
 P_k(t, r, z) = & \int_{R_0}^R \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \left[\mathcal{H}_{k, k_1}(t; r, \rho; z, \xi) g_{2_{k_1}}(\xi) + \mathcal{H}_{k, k_1}^1(t; r, \rho; z, \xi) g_{1_{k_1}}(\xi) \right] \sigma_{k_1} d\xi \rho d\rho + \\
 & + \int_0^t \int_{R_0}^R \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \mathcal{H}_{k, k_1}(t-\tau; r, \rho; z, \xi) \mathcal{F}_{k_1, j}(\tau, \xi) \sigma_{k_1} d\xi \rho d\rho d\tau + \\
 & + \int_0^t \int_{R_0}^R \left[W_{l_0, k}(t-\tau; r, \rho; z) \left(\frac{d}{d\tau} + \nu_1 \right) P_0(\tau, \rho) + \right. \\
 & \left. + W_{l, k}(t-\tau; r, \rho; z) \left(\frac{d}{d\tau} + \nu_1 \right) P_l(\tau, \rho) \right] \rho d\rho d\tau, \quad k = \overline{1, n+1}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{k, k_1}(t; r, \rho; z, \xi) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{k, k_1, j}(t, z, \xi) \frac{V_0(\rho, \lambda_j) V_0(r, \lambda_j)}{\|V_0(r, \lambda_j)\|^2}, \\
 \mathcal{H}_{k, k_1}^1(t; r, \rho; z, \xi) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{k, k_1, j}^1(t, z, \xi) \frac{V_0(\rho, \lambda_j) V_0(r, \lambda_j)}{\|V_0(r, \lambda_j)\|^2}, \\
 W_{l_0, k}(t-\tau; r, \rho; z) &= \sum_{j=1}^{\infty} W_{l_0, k, j}(t-\tau, z) \frac{V_0(\rho, \lambda_j) V_0(r, \lambda_j)}{\|V_0(r, \lambda_j)\|^2}, \\
 W_{l, k}(t-\tau; r, \rho; z) &= \sum_{j=1}^{\infty} W_{l, k, j}(t-\tau, z) \frac{V_0(\rho, \lambda_j) V_0(r, \lambda_j)}{\|V_0(r, \lambda_j)\|^2}.
 \end{aligned}$$

Теорема (про розв'язність). Якщо виконується умова однозначної розв'язності змішаної крайової задачі (1)—(4) і задані та шукані функції як оригінали задовольняють умовам застосування інтегральних перетворень Ганкеля 2-го роду за геометричною змінною r , визначених формулами (10)—(12) та Фур'є для неоднорідного обмеженого $(n + 1)$ — складового середовища за змінною z , визначеного (19), (20), (22), то розв'язок змішаної крайової задачі (1)—(4) існує, єдиний та визначається формулою (32).

Числове моделювання і аналіз. Вихідними даними для числового моделювання та аналізу процесу фільтраційної консолідації використовуються дані фізичних експериментів [2; 3]. Початкові і крайові умови задачі (1)—(4), виходячи із специфіки протікання реальних процесів, визначені таким чином:

а) перша початкова умова

$$P_k(t, r, z)|_{t=0} = \left[\Delta P_{s_0} \sqrt{\frac{l-z}{l-l_0}} \right] \left(\frac{R-r}{R-R_0} \right)^2 \equiv g(r, z); \quad (2_1)$$

б) друга початкова умова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_k(t, r, z)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= b_k^2 \nabla^2 P_k(0, r, z) \equiv \\ &\equiv b_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_k}{\partial r} \right) \Big|_{t=0} + b_k^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} P_k(0, r, z); \end{aligned} \quad (2_2)$$

в) крайові умови за змінною r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_k(\tau, r, z)}{\partial r} \Big|_{r=R_0} &= 0, \\ P_k(t, r, z)|_{r=R} &= P_l \left(\frac{l-z}{l-l_0} \right) e^{\alpha_l t} \equiv g_k(t, z); \end{aligned} \quad (3_1)$$

г) крайові умови за змінною z :

$$P_1(t, r, z)|_{z=l_0} = (P_{o_p} - P_{s_0}) \left(\frac{R-r}{R-R_0} \right)^2 e^{\alpha_{l_0} t} \equiv P_0(t, r), \quad (4_1)$$

$$P_{n+1}(t, r, z)|_{z=l} = P_l^0 \left(\frac{R-r}{R-R_0} \right) e^{\alpha_l t} \equiv P_l(t, r). \quad (4_2)$$

Друга початкова умова (2₂) випливає із фізичної постановки задачі: розв'язок задачі у початковий момент задовольняє рівняння Дарсі [1; 2]. У цій постановці умова (2₂) приведена до наступної:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_k(t, r, z)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g_{2k}(t, z) = - \frac{b_k^2 \Delta P_{s_0}}{\sqrt{l-l_0}} (l-z)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{R-r}{R-R_0} \right)^2 + \\ &+ \frac{4b_0^2}{(R-R_0)^2} \left[\Delta P_{s_0} \sqrt{\frac{l-z}{l-l_0}} \right] \left(1 - \frac{R}{r} \right). \end{aligned} \quad (2_3)$$

Коефіцієнти консолідації b_k^2 та питомого опору неоднорідного фільтрувального середовища r_k , що враховують реальні властивості досліджуваних середовищ, описані наступними функціональними залежностями [1; 2]:

$$b_k^2 = b_{10} \left(1 + \varepsilon_b \left(P_{0p} - \Delta P_{s_0} \left(\frac{l-l_k}{l-l_0} \right)^2 \right) \right),$$

$$r_k = r_0 \left(1 + \varepsilon_r \left(P_{0p} - \exp \left(s \cdot \ln \left(P_{0p} \left(\frac{l-l_k}{l-l_0} \right)^2 \right) \right) \right) \right),$$

де $P_{0p}, P_{l_0}^0, P_l^0, P_{s_0}, P_r, b_{10}, r_0$ — опорні значення тисків, коефіцієнту консолідації та питомого опору середовища; $\varepsilon_b, \varepsilon_r, s$ — емпіричні константи, $\Delta P_{s_0} = P_{op} - P_{s_0}, P_{op} = 1.6e05 \text{ Па}, \Delta P_{s_0} = 0.1 \div 1.0 \text{ e}04 \text{ Па}$ [2].

Чисельні значення використовуваних при моделюванні коефіцієнтів консолідації b_k^2 та питомого опору r_k подані на рис. 2.

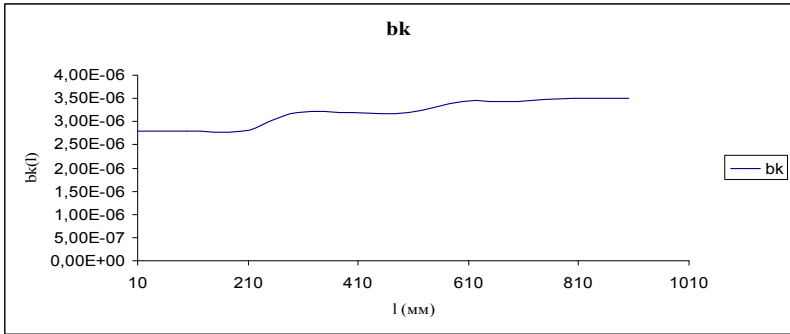


Рис. 2. Чисельні значення коефіцієнтів консолідації b_k^2 та питомого опору r_k

Після підстановки визначених згідно формул (2₁)—(4₂) початкових і крайових умов у (3₂) та необхідних операцій інтегрування, розв’язок (3₂) приводиться до вигляду, зручному і ефективному для чисельного моделювання, забезпечуючи значну економію обчислювальних ресурсів

$$P_k(t, r, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{n+1} \left[(v_1 [1 + \delta_1] + b_{r_0}^2 \lambda_j^2 + \beta_m^2) [\gamma_1 e^{\gamma_1 t} - \gamma_2 e^{\gamma_2 t}] \times \right.$$

$$\times \bar{V}_s(\lambda_j) \bar{g}_{1, k_1 m} + [e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}] \bar{V}_s(\lambda_j) \bar{g}_{2, k_1 m} - \frac{v_1 b_{10} R}{l - l_0} \lambda_j V_1(R, \lambda_j) \times$$

$$\left. \times (\gamma_2 [1 - e^{\gamma_2 t}] - \gamma_1 [1 - e^{\gamma_1 t}]) \bar{g}_{k_1 m} \right] + \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + v_1 \sigma_{n+1} b_{n+1}^2 \frac{dV_{n+1}(l, \beta_m)}{dz} P_j - v_1 \sigma_1 b_1^2 \frac{dV_1(l_0, \beta_m)}{dz} P_0 \right] \times \\
 & \times \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{\sigma_k V_k(z, \beta_m)}{\|V(z, \beta_m)\|^2} \frac{V_0(r, \lambda_j)}{\|V_0(r, \lambda_j)\|^2}.
 \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_{k, k_1 m} &= \frac{P_l}{l - l_0} \frac{b_{k_1}}{\beta_m} \left[A_{k_1} \left((l - z) \sin \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z + \frac{b_{k_1}}{\beta_m} \cos \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z \right) - \right. \\
 & \left. - B_{k_1} \left((l - z) \cos \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z + \frac{b_{k_1}}{\beta_m} \sin \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z \right) \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} \\
 \bar{g}_{1, k_1 m} &= A_{k_1} \left[\frac{b_{k_1}}{\beta_m} \frac{\Delta P_{s_0}}{\sqrt{l - l_0}} \left\{ \sqrt{l - z} \sin \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{\frac{\pi b_{k_1}}{2 \beta_m}} \cos \frac{\beta_m l}{b_{k_1}} \left(C \left[\sqrt{\frac{2 \beta_m}{\pi b_{k_1}}} (l - z) \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin \frac{\beta_m l}{b_{k_1}} \left(S \left[\sqrt{\frac{2 \beta_m}{\pi b_{k_1}}} (l - z) \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} \right) \right\} + \right. \\
 & \left. + \frac{P_l^0}{l - l_0} \left[(z - l_0) \sin \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z + \frac{b_{k_1}}{\beta_m} \cos \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} \right] + \\
 & + B_{k_1} \left[\frac{b_{k_1}}{\beta_m} \frac{\Delta P_{s_0}}{\sqrt{l - l_0}} \left\{ \sqrt{l - z} \cos \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} + \sqrt{\frac{\pi b_{k_1}}{2 \beta_m}} \cos \frac{\beta_m l}{b_{k_1}} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times C \left[\sqrt{\frac{2 \beta_m}{\pi b_{k_1}}} (l - z) \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} - \sin \frac{\beta_m l}{b_{k_1}} \left(S \left[\sqrt{\frac{2 \beta_m}{\pi b_{k_1}}} (l - z) \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} \right) \right\} + \right. \\
 & \left. + \frac{P_l^0}{l - l_0} \left[(l_0 - z) \cos \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z + \frac{b_{k_1}}{\beta_m} \sin \frac{\beta_m}{b_{k_1}} z \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} \right] \\
 \bar{g}_{2, k_1 m} &= -\frac{1}{4} \frac{\Delta P_{s_0}}{\sqrt{l - l_0}} \frac{b_k^2}{(R - R_0)^2} \bar{g}_{-\frac{3}{2}}(k, \beta_m) + \frac{4b_{r_0}^2}{(R - R_0)^2} \bar{g}_{\frac{1}{2}}(k, \beta_m);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\frac{3}{2}}(k, \beta_m) &= \left(A_k \cos \frac{\beta_m}{b_k} l + B_k \sin \frac{\beta_m}{b_k} l \right) \times \\ &\times \left[\frac{2}{\sqrt{z}} \cos \frac{\beta_m}{b_k} z + 4 \frac{b_k}{\beta_m} \sqrt{z} \sin \frac{\beta_m}{b_k} z \Big|_{l-l_{k-1}}^{l-l_k} + \right. \\ &+ 4 \left(\frac{b_k}{\beta_m} \right)^2 \left[\sqrt{z} \sin \frac{\beta_m}{b_k} z \Big|_{l-l_{k-1}}^{l-l_k} + \sqrt{\frac{\pi b_k}{2 \beta_m}} \left(S \left[\sqrt{\frac{2 \beta_m}{\pi b_k}} (l-z) \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} \right) \right] \Bigg] + \\ &+ \left(A_k \sin \frac{\beta_m}{b_k} l + B_k \cos \frac{\beta_m}{b_k} l \right) \times \\ &\times \left[-\frac{2}{\sqrt{z}} \sin \frac{\beta_m}{b_k} z + 4 \frac{b_k}{\beta_m} \sqrt{z} \cos \frac{\beta_m}{b_k} z \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} - \right. \\ &\left. - 4 \left(\frac{b_k}{\beta_m} \right)^2 \left[\sqrt{z} \cos \frac{\beta_m}{b_k} z \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} - \sqrt{\frac{\pi b_k}{2 \beta_m}} \left(C \left[\sqrt{\frac{2 \beta_m}{\pi b_k}} (l-z) \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} \right) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\frac{1}{2}}(k, \beta_m) &= \frac{P_{l_0}}{l-l_0} \frac{b_k}{\beta_m} \left\{ A_k \left[(z-l_0) \sin \frac{\beta_m}{b_k} z + \frac{b_k}{\beta_m} \cos \frac{\beta_m}{b_k} z \right] - \right. \\ &\left. - B_k \left[(z-l_0) \cos \frac{\beta_m}{b_k} z + \frac{b_k}{\beta_m} \sin \frac{\beta_m}{b_k} z \right] \Big|_{l_{k-1}}^{l_k} \right\} \end{aligned}$$

$$P_{0j} = \frac{\Delta P_{s_0}}{(R-R_0)^2} \bar{V}_s(\lambda_j); \quad P_{lj}^0 = \frac{P_l^0}{(R-R_0)^2} \bar{V}_s(\lambda_j);$$

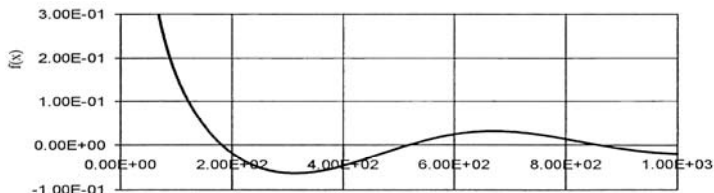
$$\bar{V}_s(\lambda_j) = \left[r V_1(r, \lambda_j) - \frac{R}{2} V_0(r, \lambda_j) \right]_{R_0}^R$$

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt; \quad S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt \quad \text{—}$$

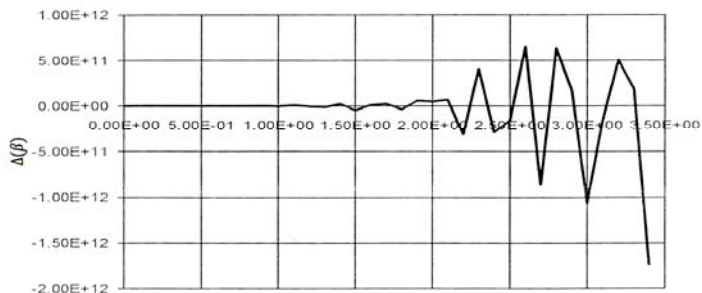
інтеграли Френеля [11];

$$A_k = \prod_{i=k}^n \left(\frac{\beta_m}{b_{i+1}} \right) \omega_{k-1,2}(\beta_m); \quad B_k = \prod_{i=k}^n \left(\frac{\beta_m}{b_{i+1}} \right) \omega_{k-1,1}(\beta_m).$$

Рис. 3 а) і б) демонструють обчислені монотонно зростаючі послідовності власних значень $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ і $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$, що є коренями трансцендентних рівнянь (8), (18) відповідно, що забезпечують чисельну реалізацію та збіжність розв'язку моделі.



а)



б)

Рис. 3. Монотонно зростаючі послідовності чисельних власних значень $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ і $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$

Рис. 4 демонструє процес збіжності розв'язку моделі (32₁) відносно обох послідовностей власних значень $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ і $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$, відповідно для двох верхніх вкладень сум ряду: Сума 1 (по j) і Сума 2 (по m). Як видно із поданої ілюстрації, за двома координатами z і r при використанні 6-10 членів ряду практично досягається збіжність розв'язку.

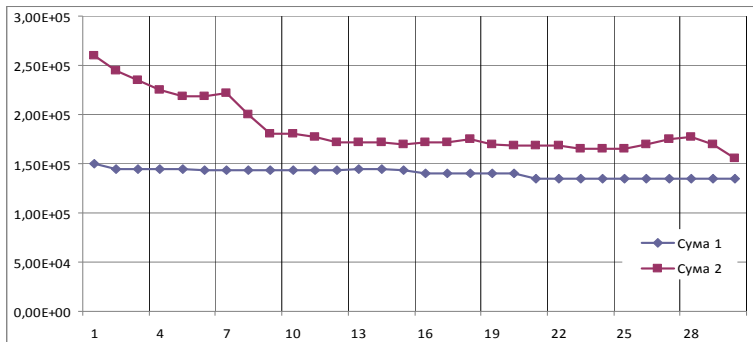


Рис. 4. Процес збіжності розв'язку моделі (32₁) відносно двох послідовностей чисельних власних значень $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ і $\{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}$

На рис. 5, (а-з) подані просторово розподілені модельні безрозмірні розподіли тисків в рідинній фазі $\bar{P}_k(t, r, z)$ для фільтраційної консолидації в неоднорідному циліндричному каналі дисперсійного вологовмісткого середовища (рис. 1), побудованих згідно розв'язку (32₁) в залежності від часу t , координати довжини каналу z та радіусу r . Діаграма на рис. 5, а) описує кінетику зміни тиску $\bar{P}_k(t, r, z)$ по всій довжині каналу ($l - l_0 = 1$ м) та від часу тривалістю 100 с для радіального зрізу в безпосередній близькості від непроникної внутрішньої циліндричної поверхні $0.1(R - R_0)$. На цій діаграмі спостерігаємо криві найбільших значень тиску у рідинній фазі (волозі) в початкові моменти фільтраційної консолидації. Максимальні пікові значення тисків на цих кривих знаходяться у безпосередньо поблизу входу і мінімальні на виході, що лімітується відповідними значеннями тисків (та їх градієнтів), заданими вхідними та вихідними крайовими умовами. Зокрема, піки візуалізують деяку залишкову консолидаційну релаксацію, пов'язану з надлишком тиску в каналі, у тому числі за рахунок попередніх фаз тощо. Мінімум тиску на вологу у положеннях, близьких до вихідної межі пояснюється найбільшим відтоком вологи через напівпроникну зовнішню циліндричну поверхню середовища ($r = R$). З ростом часу фільтраційної консолидації до 100с спостерігаємо картину поступового падіння значень тиску (у тому числі надлишкового) по всій довжині каналу, знову ж таки, пов'язану з стрімким виходом вологи через зовнішню циліндричну фільтрувальну поверхню. В момент часу $= 40$ с спостерігається деякий процес стабілізації, пов'язаний з падінням надлишкового тиску до нуля та подальшим зменшенням прикладеного тиску на вологу у зв'язку з продовженням зменшення її кількості в каналі та перерозподілом зовнішнього прикладеного тиску на тверду фазу, ступінь консолидації якої збільшується в об'ємі. При подальшому збільшенні тривалості консолидації (від 40 до 100 с) криві розподілу тиску $\bar{P}_k(t, r, z)$ з вигляду випуклої набувають вигляду дещо зворотної трансформації: змінюють вигляд випуклості на вигляд опуклості, але водночас прямуючи до нуля. Аналогічні картині кінетики волого переносу спостерігаємо і на наступних поданих діаграмах (б-з) при інших зрізах радіальної координати ($0.3(R - R_0)$, $0.7(R - R_0)$, $0.9(R - R_0)$).

Окремого пояснення на рис. 5 заслуговує діаграма з), що описує фільтраційну консолидацію для радіальних, зрізів у безпосередній близькості до фільтраційної проникної циліндричної діаграми. Тут уже практично, як видно з поданих графіків, ніякого впливу немає зі сторони залишкового тиску (за відсутністю останнього) і тому всі криві мають різко спадний характер у вхідній зоні каналу (до 50-60 мм) і далі мають відносно плавний спад до нуля.

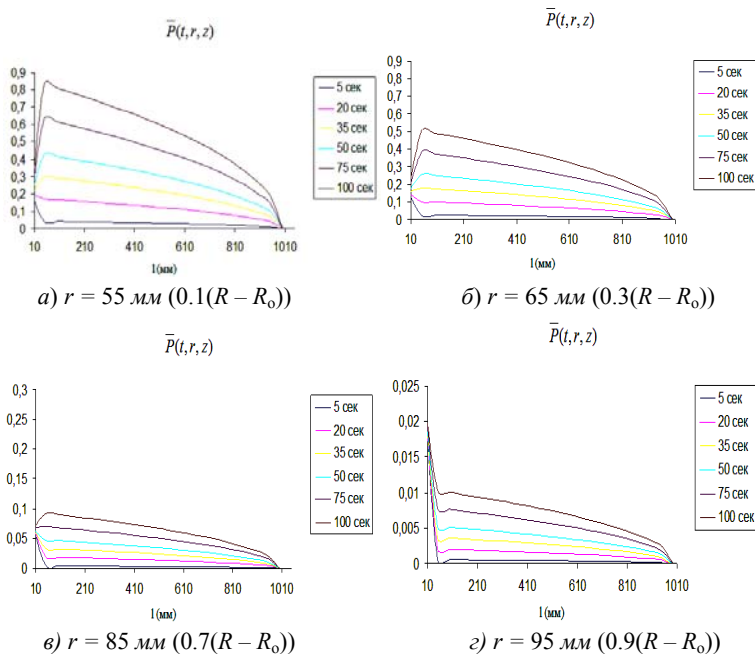


Рис. 5. Просторово розподілені розподіли тисків фільтраційної консолідації в рідинній фазі $\bar{P}_k(t, r, z)$ для в неоднорідному циліндричному каналі

Висновки. Методами інтегральних перетворень Ганкеля 2-го роду і Фур'є побудовано аналітичний розв'язок узагальненої нами змішаної крайової задачі для фільтраційної консолідації в багатокомпонентних неоднорідних циліндричних середовищах вологомістких пористих частинок. Обґрунтована розв'язність крайової задачі. Здійснено числове моделювання фільтраційної консолідації в багатокомпонентних циліндричних середовищах, що дало змогу побудувати уточнені просторово-розподілені залежності тисків на рідину, що є визначальними параметрами вказаного виду переносу, візуалізувати кінетику консолідації та вологопереносу, оцінювати ефективність для різних просторово-часових зрізів.

Список використаних джерел:

1. Barenblatt G. I. Theory of Fluids Flow Through Natural Rocks / G. I. Barenblatt, V. M. Etnov, V. Ryzhyk. — Dordrecht : Kluwer, 1990. — 303 p.
2. Lanoiselle I. L. Modelisation du Pressage o Pression Constante. Cas des Produits a Structure Cellulaire / I. L. Lanoiselle, E. Vorobyov, I. M. Bouvier. — Entropie, 1994. № 30 (186). — P. 39–50.
3. Variable Pressure. Variable-Rate Expression of Semisolid Materials / T. Murase, M. Iwata, M. Wakita, and other // J. Chem. Eng. Jap. — 1987. — Vol 20 (6). — 603 p.

4. Petryk M. Liquid Flowing from Porous particles During the Pressing of Biological Materials / M. Petryk, E. Vorobiev // Computer & Chem. Eng. Elsevier Irland. — 2007. — Issue 31. — P. 1336–1345.
5. Petryk M. Mass transfer from liquid containing spherical particles during the pressing of biological porous materials / M. Petryk, E. Vorobiev // Proceeding of the 2nd European Conference on Filtration and Separation, Université de Technologie de Compiègne. — Compiègne (France), 2006. — P. 266–273.
6. Петрик М. Р. Нелинейная математическая модель двухуровневого переноса типа «фильтрация-консолидация» / М. Р. Петрик // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 2. — С. 74–85.
7. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
8. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах / М. П. Ленюк, М. Р. Петрик. — К. : Наук. думка, 2000. — 372 с.
9. Ленюк М. П. Одновимірна задача фільтрації та відтиску кусково-однорідному дисперсному фільтраційному середовищі / М. П. Ленюк, М. Р. Петрик // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. пр. — К. : Ін-т. математики НАН України, 1997. — Вип. 14. — С.151–157.
10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
11. Table of Integrals, Series and Products. 7th ed / I. S. Gradshteyn, S. M. Ryzhik, A. Jeffrey, D. Zwillinger. — Amsterdam, Boston, Paris : Elsevier. Academic Press, 2009. — 1100 p.

Methods Hankel integral transformations of the 2nd kind and Fourier An analytical solution of the generalized us mixed boundary value problem for the filtration consolidation in the heterogeneous environments volohomistkyh cylindrical porous particles. Grounded swagger boundary problem. Investigated computational convergence develelmntion in the form of deposit money in different sequences spectralrational values. For the complex numerical modeling and analysis of the dynamics of spatially distributed pressure fields in the fluid in multicomponent heterogeneous environments cylindrical microporous particles.

Key words: *filtration consolidation heterogeneous environment volohomistki porous particle, the initial value problem, integral transformation, the caravan Cauchy influence function, the Green's function.*

Отримано: 14.09.2012