УДК 517.9: 95

Р. М. Черніга, д-р фіз.-мат. наук, професор,
В. В. Давидович, аспірант
Інститут математики НАН України, м. Київ

НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ: ПОБУДОВА ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТА ЇХ БІОЛОГІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

Вивчаються точні розв'язки та їх застосування для класу двокомпонентної системи реакції-дифузії (РД) зі сталими коефіцієнтами дифузії. За допомогою нещодавно введеного поняття Q-умовної симетрії першого типу (R. Cherniha J. Phys. A: Math. Theor., 2010. vol. 43., 405207) отримано системи РД, які допускають вказану симетрію. Знайдену симетрію застосовано для проведення редукції систем РД до систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) та побудови точних розв'язків. Подано застосування отриманих розв'язків до розв'язання однієї моделі з математичної біології.

Ключові слова: *система реакції-дифузії, модель типу хижак-жертва, умовна симетрія, точний розв'язок.*

1. Вступ

Розглянемо клас систем рівнянь РД вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + F(u,v), \\ v_t &= dv_{xx} + G(u,v), \end{aligned} \tag{1}$$

де $u(t,x)$ та $v(t,x)$ — невідомі функції, що описують концентрації популяцій (густини клітин чи хімічних реагентів), F та G — деякі задані функції, d — коефіцієнт дифузії, який нижче припускається деякою додатною сталою, відмінною від нуля, тут і нижче індекси t та x означають диференціювання за цими змінними.

Система (1) широко застосовується при описі різноманітних процесів у біології [1] та екології [2]. Класичним представником класу РД систем (1) є дифузійна система Лотки—Вольтера дослідженням якої присвячено велику кількість праць (див. бібліографію в [1—2]).

Оскільки будь-яка нелінійна система вигляду (1) є неінтегровною (в сенсі, детально розглянутому в роботі [3]), то проблема побудови частинних розв'язків такої системи є актуальною. Зокрема, важливим є питання знаходження точних розв'язків, які мають біологічну інтерпретацію. При побудові точних розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) найбільш ефективними є сучасні теоретико-групові методи, які дозволяють знайти ті чи інші типи симетрії заданого ДРЧП (чи системи ДРЧП).

Наслідком цього є можливість побудови анзаців (підстановок спеціального вигляду), які зводять вихідне рівняння (систему) до системи рівнянь нижчої розмірності. Зокрема, при проведені редукції системи (1), отримується система ЗДР. На сьогоднішній день введено означення та розроблено відповідні алгоритми для знаходження різноманітних типів симетрій (симетрій Лі, умовних симетрій, симетрій Лі-Беклунда тощо). У випадку знаходження класичних симетрій Лі [4] відповідний алгоритм є простішим щодо реалізації, оскільки необхідно розв'язувати деяку перевизначену систему *лінійних* ДРЧП. У випадку системи рівнянь РД (1) цей алгоритм було реалізовано в роботах [5; 6], де отримано вичерпний опис симетрій Лі. Зауважимо, що алгоритм знаходження симетрій Лі диференціальних рівнянь з фіксованими коефіцієнтами можна запрограмувати (наприклад, відповідна програма є в сучасному пакеті програм Maple починаючи з 7 версії).

2. Точні розв'язки нелінійної системи РД та їх властивості

На відміну від випадку симетрій Лі, задача вичерпного опису умовних симетрій систем РД вигляду (1) є незрівнянно складнішою. Причини цього факту детально викладено в роботах [7—9]. В роботі [8] запропоновано конструктивний підхід (алгоритм) для часткового розв'язання такого типу задач шляхом введення поняття Q-умовної симетрії першого типу. Нам вдалося реалізувати цей алгоритм у випадку класу нелінійних систем РД (1). Тут ми подаємо лише частинний результат, який знайшов застосування для систем, які моделюють взаємодію двох біовидів.

Теорема. Нелінійна система РД з класу (1) вигляду

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + uf(\omega), \quad \omega = u^{-k}(v-u), \\ &v_t = dv_{xx} + u^k g(\omega) + u(d\,f(\omega) + \alpha(1-d)), \end{aligned} \tag{2}$$

де $f(\omega)$ та $g(\omega)$ — довільні гладкі функції, $\alpha \neq 0$ та $k \neq 1$ — довільні сталі, допускає оператор Q-умовної симетрії першого типу

$$Q = \partial_t + \alpha u \partial_u + \alpha((1-k)u + kv)\partial_v. \tag{3}$$

Доведення теореми здійснюється шляхом прямого застосування означення 1 з роботи [8].

Наголосимо, що диференціальний оператор першого порядку (3) не є оператором симетрії Лі, тому він є принципово новим порівняно з симетріями Лі, знайденими в роботі [5]. Розв'язавши відповідну систему характеристичних рівнянь $Q(u) = 0,\ Q(v) = 0$, породжену оператором (3), отримуємо анзац

$$\begin{aligned} &u = \varphi(x)e^{\alpha t}, \\ &v = \psi(x)e^{k\alpha t} + \varphi(x)e^{\alpha t}, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ — нові шукані функції. Підставивши (4) в систему (2) отримуємо редуковану систему ЗДР

$$\begin{aligned} &\varphi'' = \varphi(\alpha - f(\psi\varphi^{-k})), \\ &d\psi'' = \alpha k\psi - \varphi^k g(\psi\varphi^{-k}). \end{aligned} \tag{5}$$

Незважаючи на те, що задача інтегрування системи (5) є суттєво простішою, ніж вихідної системи РД (2), проте у випадку довільно вибраних функцій f та g вона розв'язується лише наближеними методами. Нам вдалося вибрати довільні функції f та g таким чином, щоб початкова система (2) залишалася нелінійною, але систему (5) можна було б проінтегрувати. Зокрема, ми поклали:

$$f(\omega) = -\gamma\omega^{\frac{1}{k}} + \alpha, g(\omega) = -d\beta\omega,$$

де β, γ — довільні сталі.

У цьому випадку для того, щоб знайти розв'язки нелінійної системи РД

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} - \gamma(v-u)^{\frac{1}{k}} + \alpha u, \\ &v_t = dv_{xx} - d\gamma(v-u)^{\frac{1}{k}} - d\beta v + (\alpha + d\beta)u, \end{aligned} \tag{6}$$

нам достатньо проінтегрувати систему ЗДР

$$\begin{aligned} &\varphi'' = \gamma\psi^{\frac{1}{k}}, \\ &\psi'' = (\beta + \frac{\alpha k}{d})\psi, \end{aligned} \tag{7}$$

та підставити знайдені функції φ та ψ в анзац (4).

Оскільки друге рівняння системи (7) є лінійним, то легко отримуємо її загальний розв'язок:

$$\varphi(x) = \gamma\int(\int\psi^{\frac{1}{k}}(x)dx)dx + c_1 x + c_2,$$

де функція $\psi(x)$ приймає одне з трьох значень:

$$\psi(x) = \begin{cases} c_3\exp(\mu x) + c_4\exp(-\mu x), & \mu^2 = \beta + \dfrac{\alpha k}{d} > 0, \\ c_3\cos(\nu x) + c_4\sin(\nu x), & \nu^2 = -(\beta + \dfrac{\alpha k}{d}) > 0, \\ c_3 x + c_4, & \beta + \dfrac{\alpha k}{d} = 0, \end{cases}$$

(тут і нижче c_i — довільні сталі, $i = 1, 2\ldots$).

Розглянемо детальніше отриманий розв'язок системи (6) при $k=\frac{1}{3}$, та $c_1=c_2=c_4=0, c_3=-c_0>0, \psi=-c_0\cos(\nu x)$. У цьому випадку відповідний розв'язок нелінійної системи РД (6) має вигляд

$$
\begin{aligned}
u &= \gamma\frac{c_0^3}{9\nu^2}(\cos^2(\nu x)+6)\cos(\nu x)e^{\alpha t},\\
v &= \gamma\frac{c_0^3}{9\nu^2}(\cos^2(\nu x)+6)\cos(\nu x)e^{\alpha t}-c_0\cos(\nu x)e^{\frac{\alpha}{3}t}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Неважко помітити, що розв'язок (8) задовольняє нульові умови Ноймана та Діріхле

$$
u_x|_{x=0}=0,\ v_x|_{x=0}=0, u|_{x=\frac{\pi}{2\nu}}=0,\ v|_{x=\frac{\pi}{2\nu}}=0 \tag{9}
$$

на просторовому інтервалі $[0,\frac{\pi}{2\nu}]$. Наголосимо, що крайові умови таких типів є найбільш типовими при математичному моделюванні взаємодії біовидів будь якого типу (хижак-жертва, змагання, мутуалізм тощо) [1]—[2]. Отже, якщо взаємодія двох видів з концентраціями u та v описується моделлю (6), (9) на відрізку $[0,\frac{\pi}{2\nu}]$, то знайдений розв'язок показує, що їх еволюція в часі може мати два різні сценарії: обидва види вимирають зі швидкістю спадання показникової функції (при $\alpha<0$) або необмежено зростають (при $\alpha>0$).

Покладімо тепер $f(\omega)=a_1+b\omega$, $g(\omega)=(\alpha(1-d)+a_1 d)\omega$, коли система (2) набуде вигляду

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx}+a_1u-bu^{2-k}+bvu^{1-k},\\
v_t &= dv_{xx}-a_2v-dbu^{2-k}+dbvu^{1-k},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

де a_1 та b — довільні сталі ($a_1b\neq 0$), $a_2=\alpha(d-1)-a_1d$ ($a_2\neq 0$). Тоді відповідна їй редукована система (5) набуває вигляду:

$$
\begin{aligned}
&\varphi''+b\psi\varphi^{1-k}+(a_1-\alpha)\varphi=0,\\
&\psi''=\frac{1}{d}(\alpha k+a_2)\psi.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Опускаючи процедуру знаходження загального розв'язку системи (11), можна легко помітити її частинні розв'язки при $\psi=-\delta$, де δ — довільна ненульова стала. Тоді з другого рівняння системи (11) отримуємо

$$
\alpha=\frac{a_1d}{k+d-1}. \tag{12}
$$

Понизивши порядок першого рівняння системи (11), ми отримали ЗДР першого порядку

$$\varphi' = \pm\sqrt{(\alpha - a_1)\varphi^2 + \frac{2b\delta}{2-k}\varphi^{2-k} + c_1}\,, \tag{13}$$

де c_1 — довільна стала, $k \neq 2$ (при $k = 2$ отримується рівняння $\varphi' = \pm\sqrt{(\alpha - a_1)\varphi^2 + 2b\delta \ln\varphi + c_1}$).

У випадку $c_1 \neq 0$, розв'язок рівняння (13) можна подати через гіпергеометричні функції. При $c_1 = 0, k \neq 0$ (випадок $k = 0$ веде до суперечності $a_2 = 0$) рівняння легко інтегрується та отримується функція

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\beta\left(\tan^2\left(\frac{k\sqrt{a_1 - \alpha}}{2}(x \pm c_2)\right) + 1\right)\right)^{-\frac{1}{k}}, & a_1 > \alpha, \\ \left(-\beta\left(\tanh^2\left(\frac{k\sqrt{\alpha - a_1}}{2}(x \pm c_2)\right) - 1\right)\right)^{-\frac{1}{k}}, & a_1 < \alpha, \end{cases}$$

де $\beta = \frac{(a_1 - \alpha)(2-k)}{2b\delta}$, c_2 — довільна стала, яку без зменшення загальності можна покласти нулю. Зауважимо, що випадок $a_1 = \alpha$, з урахуванням умови (12), веде до суперечності $k = 1$.

Для біологічної інтерпретації отриманих розв'язків, обмежимось розглядом випадку $a_1 > \alpha$, коли розв'язок системи РД (10) матиме вигляд

$$\begin{aligned} u &= \left(\beta\left(\tan^2\left(\frac{k\sqrt{a_1 - \alpha}}{2}x\right) + 1\right)\right)^{-\frac{1}{k}} e^{\alpha t}, \\ v &= -\delta e^{\alpha k t} + \left(\beta\left(\tan^2\left(\frac{k\sqrt{a_1 - \alpha}}{2}x\right) + 1\right)\right)^{-\frac{1}{k}} e^{\alpha t}. \end{aligned} \tag{14}$$

Застосувавши дискретну заміну $v \to -v$, систему (10) та її розв'язок (14) можна звести відповідно до вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(a_1 - bu^{1-k}) - bvu^{1-k}, \\ v_t &= dv_{xx} - a_2 v + bu^{2-k} + bvu^{1-k}; \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} u &= \left(\beta\left(\tan^2\left(\frac{k\sqrt{a_1 - \alpha}}{2}x\right) + 1\right)\right)^{-\frac{1}{k}} e^{\alpha t}, \\ v &= \delta e^{\alpha k t} - \left(\beta\left(\tan^2\left(\frac{k\sqrt{a_1 - \alpha}}{2}x\right) + 1\right)\right)^{-\frac{1}{k}} e^{\alpha t}. \end{aligned} \tag{16}$$

Розв'язок (16) задовольняє нульові умови Ноймана

$$u_x|_{x=0} = 0,\ v_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\varepsilon} = 0,\ v_x|_{x=\varepsilon} = 0 \tag{17}$$

на просторовому інтервалі $[0, \varepsilon]$, де $\varepsilon = \frac{2\pi j}{k\sqrt{a_1 - \alpha}}$, $j \in \mathbb{N}$. Модель (15) та (17) описує взаємодію видів типу хижак (популяція з концентрацією v) — жертва (популяція з концентрацією u), при умові, що коефіцієнти a_1, a_2, та b додатні. Розв'язок (16) показує, що еволюція в часі хижака і жертви може мати ті самі два сценарії, які наведено вище для розв'язку (8). Зокрема, обмеження:

$$0 < k < 1 - d, 0 < \delta \le (\frac{(2-k)(a_1 - \alpha)}{2b})^{\frac{1}{1-k}}$$

забезпечують невід'ємність концентрацій обох видів в будь-який момент часу $t > 0$ та їх швидке вимирання з плином часу.

3. Висновки

У цій роботі продемонстровано ефективність знаходження умовних симетрій для нелінійних систем рівнянь РД та їх застосування для побудови точних розв'язків у явному вигляді. Шляхом застосування нещодавно введеного поняття Q-умовної симетрії першого типу, знайдено таку симетрію для класу двокомпонентних систем рівнянь РД зі сталими коефіцієнтами дифузії. Використовуючи отриманий оператор Q-умовної симетрії, побудовано анзац та проведено редукцію системи РД до системи ЗДР. Це дозволило побудувати багатопараметричні сім'ї точних розв'язків відповідної системи РД та навести їх біологічну інтерпретацію. Зокрема встановлено, що при певних обмеженнях на коефіцієнти системи рівнянь РД та на параметри, які містяться в розв'язках, вони можуть описувати різні сценарії взаємодії популяцій двох біовидів, при цьому вони задовольняють біологічно вмотивовані додаткові умови: невід'ємність концентрацій обох видів в будь-який момент часу $t > 0$, обмеженість росту популяцій, відсутність дифузії популяцій через границю області.

Список використаних джерел:

1. Murray J. D. Mathematical Biology / J. D. Murray. — Berlin : Springer, 1989. — 767 p.
2. Okubo A. Diffusion and Ecological Problems. Modern Perspectives / A. Okubo, S. A. Levin. — Berlin : Springer, 2001. — 444 p.
3. Михайлов А. В. Условия интегрируемости систем двух уравнений. I / А. В. Михайлов, А. Б. Шабат // Теор. мат. физика. — 1985. — Т. 62. — С. 163–185.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
5. Cherniha R. Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: I / R. Cherniha, J. R. King // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — Vol. 33. — P. 267–282.
6. Cherniha R. Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: II / R. Cherniha, J. R. King // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36. — P. 405–425.
7. Cherniha R. New conditional symmetries and exact solutions of reaction–diffusion systems with power diffusivities / R. Cherniha, O. Pliukhin // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41. — P. 185–208.

8. Cherniha R. Conditional symmetries for systems of PDEs: new definition and its application for reaction-diffusion systems / R. Cherniha // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — Vol. 43.
9. Cherniha R. Conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion systems with non-constant diffusivities / R. Cherniha, V. Davydovych // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2012. — Vol. 17. — P. 3177–3188.

Exact solutions and their application for a class of two-component reaction-diffusion (RD) systems with constant diffusivities are studied. Using the recently introduced notion of Q-conditional symmetries of the first type (R. Cherniha J. Phys. A: Math. Theor., 2010. vol. 43., 405207), some RD systems admitting such symmetry are derived. The symmetries found for reducing RD systems to ODE systems and finding exact solutions are applied. The application of the solutions obtained for solving a model arising in mathematical biology is presented.

Key words: *reaction-diffusion system, predator-prey type model, conditional symmetry, exact solution.*

Отримано: 03.05.2012

УДК 519.217;519.718

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Б. В. Савчук, аспірант

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Отримано достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку задачі Коші для квазілінійного стохастичного диференціально-функціонального рівняння за допомогою усередненого рівняння.

Ключові слова: *задача Коші, квазілінійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння, метод усереднення, експоненціальна стійкість, стійкість в середньому квадратичному, малий параметр.*

Вступ

Багато математичних моделей реальних об'єктів описуються диференціальними рівняннями з випадковими параметрами. Якщо випадкові збурення такі, що динаміка поведінки об'єкта в майбутньому не зале-