8. Cherniha R. Conditional symmetries for systems of PDEs: new definition and its application for reaction-diffusion systems / R. Cherniha // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — Vol. 43.
9. Cherniha R. Conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion systems with non-constant diffusivities / R. Cherniha, V. Davydovych // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2012. — Vol. 17. — P. 3177–3188.

Exact solutions and their application for a class of two-component reaction-diffusion (RD) systems with constant diffusivities are studied. Using the recently introduced notion of Q-conditional symmetries of the first type (R. Cherniha J. Phys. A: Math. Theor., 2010. vol. 43., 405207), some RD systems admitting such symmetry are derived. The symmetries found for reducing RD systems to ODE systems and finding exact solutions are applied. The application of the solutions obtained for solving a model arising in mathematical biology is presented.

Key words: *reaction-diffusion system, predator-prey type model, conditional symmetry, exact solution.*

Отримано: 03.05.2012

УДК 519.217;519.718

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Б. В. Савчук, аспірант

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Отримано достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному тривіального розв’язку задачі Коші для квазілінійного стохастичного диференціально-функціонального рівняння за допомогою усередненого рівняння.

Ключові слова: *задача Коші, квазілінійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння, метод усереднення, експоненціальна стійкість, стійкість в середньому квадратичному, малий параметр.*

Вступ

Багато математичних моделей реальних об’єктів описуються диференціальними рівняннями з випадковими параметрами. Якщо випадкові збурення такі, що динаміка поведінки об’єкта в майбутньому не залежить від його поведінки до теперішнього моменту часу, то для аналізу математичної моделі можна застосувати добре розвинений апарат теорії марковських процесів. Але в більшості реальних систем динамічні характеристики містять узагальнені координати об'єкта в попередні моменти часу. В цьому випадку розв'язок рівняння, яке описує поведінку системи уже не є марковським процесом і якісний аналіз об'єкта значно ускладнюється. Однією з найбільш простих математичних моделей таких об'єктів є диференціально-функціональне рівняння [19—21]. Якщо випадковими збуреннями можна знехтувати, то для якісного аналізу диференціально-функціональних рівнянь можна використати результати робіт Азбелева С. В., Колесова Ю. С., Красовского Н. Н., Мишкіса А. Д., Наймарка Ю. И., Носова В. Р., Рубаника В. П., Фодчука В. И., Шиманова С. Н., Хейла Дж. та ін. Цими авторами розвинений зручний для застосування математичний апарат аналізу стійкості розв'язку, пошуку періодичних розв'язків і т. д. Диференціально-функціональним рівнянням з випадковими параметрами присвячено значно менше робіт. Тут можна згадати монографії [13; 20; 21]. У цих роботах основна увага приділяється аналізу стійкості розв'язку, питанням поведінки розв'язку на скінченному інтервалі часу, питанням існування обмежених та стаціонарних розв'язків і т. д. Разом з цим для опису поведінки реальних об'єктів потрібні методи, які можна застосувати для аналізу асимптотики розв'язків по параметру на безмежності.

Для прикладних задач актуально об'єднати граничні теореми випадкових процесів [4; 5; 10; 11] для нормованих відхилень на скінченному інтервалі часу та дослідження стійкості розв'язків за допомогою асимптотичного методу усереднення Крилова – Боголюбова – Митропольського для квазілінійних диференціальних рівнянь з випадковими параметрами [3; 14; 23].

Розвитку цього методу присвячена ця стаття.

1. Усереднення в стохастичних диференціальних рівняннях без післядії

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \Im, F, \mathrm{P})$ ($F = \{\Im_t, t \ge 0\}$ — потік σ — алгебр), розглядається стохастичне диференціальне рівняння з малим параметром вигляду [20]

$$dx = \varepsilon \left\{ a(t,x)dt + b(t,x)dw(t) + \int_U c(t,x,u)\tilde{\nu}(dt,du) \right\}, \qquad (1)$$

де $t \ge 0$, $x \in R^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $w(t) \in R^n$ — стандартний n — вимірний вінерівський процес [11; 14], $\tilde{\nu}$ — центрована пуассонова випадкова міра [4], яка не залежить від $w(t)$ і задовольняє умовам [2; 21]

$$\mathrm{E}\{\tilde{\nu}(dt,du)\}=0\ ,\ \ \mathrm{E}\{|\,\tilde{\nu}(dt,du)\,|^2\}=\Pi(du)dt\ .$$

Рівняння (1) назвемо рівнянням у стандартній формі [5; 17].

Спочатку скористаємося деякими результатами з монографії [5]. Припустимо, що функції $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x,u)$ вимірні за сукупністю змінних, задовольняють глобальну умову Ліпшиця у формі:

$$\begin{aligned}&|\,a(t,x)-a(t,y)\,|^2+|\,b(t,x)-b(t,y)\,|^2+\\&+\int\limits_U|\,c(t,x,u)-c(t,y,u)\,|^2\,\Pi(dy)\le L\,|\,x-y\,|^2\end{aligned}\tag{2}$$

і умові рівномірної обмеженості в нулі

$$|\,a(t,0)\,|^2+|\,b(t,0)\,|^2+\int\limits_U|\,c(t,0,u)\,|^2\,\Pi(du)\le\alpha^2\,,\tag{3}$$

для всіх $x,y\in R^n$ и $t\ge 0$. Сильний розв'язок (1) за початковими даними $x(s)=x$ позначимо $x(t,s,x)$. В якості початкових даних можна брати випадкові величини, вимірні відносно σ — алгебри $\Im_0$, для яких існує другий момент, які не залежать від $w(t)$ і $\tilde{\nu}(t,A),\ A\in U$. Позначимо $\Im_t$ мінімальну σ — алгебру, відносно якої вимірні прирости процесу $w(t)$ і випадкової пуассонової міри $\tilde{\nu}(t,A)$ на відрізку $[0,T]$, і яка містить $\Im_0$. Легко переконатися, що процес $x(t,s,x)$ погоджений з потом $\Im_t$ при всіх $\Im_0$ – вимірних x і $t\ge s\ge 0$. Припустимо, що рівномірно по $s\ge 0$ і x із довільної кулі фіксованого радіуса існує границя

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_s^{s+T}a(t,x)dt=\overline{a}(x)\ .\tag{4}$$

Звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\overline{a}(\overline{x})\tag{5}$$

називається рівнянням усередненого руху для (1). Наступний результат є в §14 розділу 3 частини II монографії [5].

Теорема 1. Нехай виконуються наведені вище умови і крім того:

1) Функція $a(t,x)$ двічі неперервно диференційована по x, при чому друга похідна задовольняє глобальну умову Ліпшиця по $t\ge 0$;

2) для довільного розв'язку $\overline{x}(t)$ (5) при всіх $t\in[0,T]$ виконуються співвідношення:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^t\left[a\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\overline{x}(\tau)\right)-a\left(\overline{x}(\tau)\right)\right]d\tau=0\,;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \nabla a\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\overline{x}(\tau)\right)d\tau=\int_0^t g(\tau)d\tau\,;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\left[B\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\overline{x}(\tau)\right)B^T\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\overline{x}(\tau)\right)+\right.$$

$$\left.+\int_U c\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\overline{x}(\tau),u\right)c^T\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\overline{x}(\tau),u\right)\Pi(du)\right]d\tau=\int_0^t f(\tau)f^T(\tau)d\tau;$$

$$\left|c\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\overline{x}(\tau),u\right)\right|\le r(u)\,;$$

$$\int_U r^2(u)\Pi(du)<\infty\,,$$

де $g(t)$ и $f(t)$ — неперервні матричні функції, індекс "T" означає транспонування.

Тоді при $\varepsilon\to 0$ нормована різниця

$$\eta_\varepsilon(t)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[x\left(\frac{t}{\varepsilon},0,\overline{x}(0)\right)-\overline{x}(t)\right] \tag{6}$$

слабко збігається до розв'язку $\eta(t)$ лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння Іто [5]

$$d\eta=g(t)\eta dt+f(t)dW(t)\,, \tag{7}$$

де $W(t)$ — стандартний n — вимірний вінерівский процес.

Наступний результат носить допоміжний характер.

Теорема 2. Нехай для $a(t,x)$, $b(t,x)$ і $c(t,x,u)$ виконується глобальна умова Ліпшиця (2), (3), існує границя (4), для всіх досить малих $\varepsilon>0$ і всіх $t\ge 0$ виконується нерівність

$$\left|\int_U a\left(\frac{s}{\varepsilon},\overline{x}(s)\right)ds-\int_0^t a(\overline{x}(s))ds\right|^2\le c_1(\varepsilon,t)(|\,\overline{x}(0)\,|^2+\alpha^2)\,, \tag{8}$$

$$\forall t>0\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}c_1(\varepsilon,t)=0\,.$$

Тоді існує така функція $g(\varepsilon,T)$, що при деякому $\varepsilon_0>0$ та довільних $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ і $T\ge 0$ виконується нерівність:

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le t\le T/\varepsilon}|\,x(t,0,\overline{x}(0))-\overline{x}(\varepsilon t)\,|^2\right\}\le g_1(\varepsilon,T)(|\,x(0)\,|^2+\alpha^2)\,, \tag{9}$$

при чому, $\forall T>0$ виконується співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_1(\varepsilon, T) = 0 .$$

Для **доведення** цього твердження, використовуючи мартингальну властивість стохастичних інтегралів [9; 11], можна записати нерівність

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left\{ \sup_{0\le\tau\le t} |\, x(\tau, 0, \bar{x}(0)) - \bar{x}(\varepsilon t)\,|^2 \right\} \le \\
&\le 4\varepsilon^2 \left\{ \sup_{0\le\tau\le t} \left| \int_0^t \left[a(s, \bar{x}(\varepsilon s)) - \bar{a}(\bar{x}(\varepsilon s)) \right] ds \right|^2 \right\} + \\
&+16\varepsilon^2 \int_0^t \mathrm{E}\left\{ |\, b\left(s, x(s, 0, \bar{x}(0))\right) |^2 \right\} ds + \qquad (10) \\
&+16\varepsilon^2 \int_0^t \int_U \mathrm{E}\left\{ |\, c\left(s, x(s, 0, \bar{x}(0))\right) |^2 \right\} \Pi(du)\, ds + \\
&+4\varepsilon^2 LT \int_0^t \mathrm{E}\left\{ \sup_{0\le S\le t} |\, x(s, 0, \bar{x}(0)) - \bar{x}(\varepsilon s)\,|^2 \right\} ds.
\end{aligned}
$$

Для розв’язків (1) нескладно отримати оцінку [21]

$$\sup_{0\le S\le t} \mathrm{E}\{|\, x(s,0,\bar{x}(0))\,|^2\} \le g_2(\varepsilon, t)(|\, x(0)\,|^2 + \alpha^2) ,$$

при чому $\forall T > 0$ для деякого $C(T) > 0$ виконується співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_2\left(\varepsilon, \frac{T}{\varepsilon}\right) = C(T) .$$

Тому для деякого $Q > 0$, $\forall T > 0$ і досить малих $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \int_0^{T/\varepsilon} \left[\mathrm{E}\{|\, b(s, x(s,0,\bar{x}(0)))\,|^2\} + \int_U \mathrm{E}\{|\, c(s, x(s,0,\bar{x}(0)))\,|^2\}\Pi(du) \right] ds \le \\
&\le QT(|\,\bar{x}(0)\,|^2 + \alpha^2).
\end{aligned}
$$

Залишилося застосувати до (10) лему Гронуолла [1] і результат теореми 2 випливає з нерівності (8), якщо поставити в (10) $t = \dfrac{T}{\varepsilon}$.

Наслідок 1. Нехай $a(t,x) \equiv A(t)x$, матриці рівномірно обмежені, задовольняють умову Ліпшиця по t і

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{s\ge 0} \left\| \frac{1}{T} \int_s^{s+T} A(t)dt - \bar{A} \right\| = 0 . \qquad (11)$$

Якщо для $b(t,x)$ і $c(t,x,u)$ виконані умови теореми 2 з $\alpha = 0$, тоді при кожному $T > 0$ і для всіх досить малих $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le t\le T/\varepsilon} |\, x(t,0,\overline{x}(0)) - \overline{x}(\varepsilon t)\,|^2\right\} \le g_1(\varepsilon T)\,|\,\overline{x}(0)\,|^2 ,$$

при чому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_1(\varepsilon, T) = 0 .$$

Доведення. Нерівність (8), в цьому випадку, випливатиме із співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \left(A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) - \overline{A}\right) e^{\overline{A}s}\, ds\right| = 0 . \qquad (12)$$

Для кожного фіксованого $T > 0$, $\forall \delta > 0$ можна підібрати таке число $\Delta > 0$, що матрична функція $e^{\overline{A}s}$ буде відрізнятися від кусково-сталої функції $F(t) = e^{\overline{A}s}$ при $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]$, $k = 0,1,2,\ldots$ не більш, ніж на δ, причому $\|F(t)\| \le e^{\overline{A}T}$. Тоді

$$\int_s^t \left\| A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) - \overline{A}\right\| \left\| e^{\overline{A}s} - F(s)\right\| ds \le ct\delta$$

для довільного $t \in [0,T]$. Далі, в силу довільності $\delta > 0$ досить отримати рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\le t\le T}\left\|\int_0^t \left(A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) - \overline{A}\right) F(s)\, ds\right\| = 0 .$$

Оскільки, при фіксованому $T > 0$ і довільному $\Delta > 0$

$$\sup_{\substack{0\le t\le \Delta \\ 0\le \tau\le T}} \int_\tau^{\tau+t} \left\| A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) - \overline{A}\right\| \|\, F(s)\,\|\, ds \le c_1\Delta$$

при деякій сталі $c_1 > 0$, тоді твердження наслідку 1 буде доведено, якщо покажемо, що при фіксованих $T > 0$ і $\Delta > 0$ має місце співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{[T/\varepsilon]}\left\|\int_{k\Delta}^{k\Delta+\Delta} \left(A\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) - \overline{A}\right) ds\right\| \|\, F(k\Delta)\,\| = 0 .$$

Але

$$\left\| \int_{k\Delta}^{k\Delta+\Delta} \left(A\left(\frac{s}{\varepsilon} \right) - \overline{A} \right) ds \right\| = \left\| \varepsilon \int_{k\Delta/\varepsilon}^{k\Delta/\varepsilon+\Delta/\varepsilon} (A(\tau) - \overline{A}) d\tau \right\| \le$$

$$\le \Delta \sup_{s\ge 0} \left\| \frac{\Delta}{\varepsilon} \int_{\tau}^{s+\Delta/\varepsilon} (A(\tau) - \overline{A}) d\tau \right\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$ і $\forall \Delta > 0$ за умовою (11).

Тому

$$\sum_{k=0}^{[T/\Delta]} \left\| \int_{k\Delta}^{k\Delta+\Delta} \left(A\left(\frac{s}{\varepsilon} \right) - \overline{A} \right) ds \right\| \le T \sup_{s\ge 0} \left\| \frac{\varepsilon}{\Delta} \int_{s}^{s+\Delta/\varepsilon} (A(\tau) - \overline{A}) d\tau \right\| \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Наслідок 1 доведено.

2. Усереднення в стохастичних диференціально-функціональних рівняннях з вінерівськими і пуассонівськими збуреннями

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \Im, F, \mathrm{P})$ розглянемо стохастичне диференціально-функціональне рівняння (СДФР) з малим параметром $\varepsilon > 0$

$$dx(t) = \varepsilon \left\{ a(t, x_t) dt + a(t, x_t) dw(t) + \int_U c(t, x_t, u) \tilde{\nu}(dt, du) \right\}, \qquad (13)$$

де $x_t = \left\{ x(t+\theta), \theta \in [-h, 0] \right\}$; $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot)$ — вимірні відображення з $R_+ \times D_n([-h, 0])$ в R^n, $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ — вимірні відображення з $R_+ \times D_n([-h, 0]) \times U$ в R^n, які задовольняють умову рівномірної обмеженості в нулі $\forall t \ge 0$, а саме

$$| a(t,0) |^2 + | b(t,0) |^2 + \int_U | c(t,0), u |^2 \, \Pi(du) \le \alpha^2 , \qquad (14)$$

і глобальну умову Ліпшиця

$$\begin{gathered} | a(t,\varphi) - a(t,\psi) |^2 + | b(t,\varphi) - b(t,\psi) |^2 + \\ + \int_U | c(t,\varphi,u) - c(t,\psi,u) |^2 \, \Pi(du) \le L \, \| \varphi - \psi \|^2, \end{gathered} \qquad (15)$$

де $\varphi, \psi \in D_n([-h, 0])$ — простір Скорохода неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі [2; 12; 20]. Решта позначень взяті з пункту 1.

Для $\varphi \in D_n([-h,0])$ позначимо $\overset{\wedge}{\varphi}$ — функцію на $[-h,0]$, тотожно рівну $\varphi(0)$. Для x_t в (13) $\overset{\wedge}{x_t}$ означає елемент з $D_n([-h,0])$, тотожно по $\theta \in [-h,0]$ рівний $x(t)$. Разом з (13) розглянемо рівняння

$$dy(t) = \varepsilon \left\{ \hat{a}(t, y(t))dt + \hat{b}(t, y(t))dw(t) + \int_U \hat{c}(t, y(t), u)\tilde{\nu}(dt, du) \right\}, \quad (16)$$

де $\hat{a}(t, y(t)) = a(t, \hat{y}(t))$, $\hat{b}(t, y(t)) = b(t, \hat{y}(t))$, $\hat{c}(t, y(t), u) = c(t, \hat{y}(t), u)$.

Припустимо, що $\forall x \in R^n$ рівномірно по $s \geq 0$ існує

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} \hat{a}(t, x)dt = \overline{a}(x), \quad (17)$$

і разом (13) розглянемо рівняння усередненого руху

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{a}(\overline{x}). \quad (18)$$

Оцінимо нормовану різницю

$$\eta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[x\left(\frac{t}{\varepsilon}, 0, \varphi \right) - x\big(t, 0, \varphi(0)\big) \right]. \quad (19)$$

Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Теорема 3. Якщо виконані умови (14) і (15), то $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varphi \in D_n([-h,0])$ і $T \geq 0$ для різниці розв'язків (13) і (16) має місце нерівність

$$\mathrm{E}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T/\varepsilon} | x(t, 0, \varphi) - y(t, 0, \varphi(0)) |^2 \right\} \leq g(\varepsilon, T)\varepsilon^2 (\| \varphi \|^2 + \alpha^2), \quad (20)$$

де $g(\varepsilon, T)$ $\forall T > 0$ задовольняє співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon, T) = C(T) < \infty. \quad (21)$$

Доведення. Для скорочення запису позначимо

$$x(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t), & \forall t \in [-h, 0), \\ x(t, 0, \varphi), \forall t \geq 0; \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \forall t \in [-h, 0), \\ y(t, 0, \varphi(0)), \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Із мартингальної властивості стохастичних інтегралів [4; 8], умови Ліпшиця і рівномірної обмеженості можна отримати нерівність

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le t\le\tau}|y(t)|^2\right\}\le 4|\varphi(0)|^2+8\varepsilon^2\tau(\tau+4)\alpha^2+$$

$$+8\varepsilon^2L(\tau+4)\int_0^{\tau}\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le t\le s}|y(t)|^2\right\}ds,$$

із якої за лемою Гронуолла [1]

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{-h\le t\le\tau}|y(t)|^2\right\}\le c_1(\varepsilon,\tau)(\|\varphi\|^2+\alpha^2),$$

де

$$c_1(\varepsilon,\tau)=4(1+2\varepsilon^2\tau(\tau+4))\exp\{8L\varepsilon^2\tau(\tau+4)\}.$$

Тому $\forall t\in[0,\tau]$ виконується нерівність

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le\theta\le h}|y(t+\theta)-y(t)|^2\right\}\le\varepsilon^2\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le\theta\le h}\left(\int_t^{t+\theta}|a(s,y_s)|ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\int_t^{t+\theta}b(s,y_s)dw(s)\right|+\left|\int_t^{t+\theta}c(s,y_s,u)\tilde{\nu}(dt,du)\right|\right)^2\right\}\le\varepsilon^2c_2(\varepsilon,\tau),$$

де

$$c_2(\varepsilon,\tau)=6(h+4)[Lc_1(\varepsilon,\tau)(\|y\|^2+\alpha^2)+\alpha^2h].$$

Відповідно, $\forall T\ge 0$ і $\tau\in\left[0,\dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ можна записати

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le t\le h}|x(t)-y(t)|^2\right\}\le 6\varepsilon^2\mathrm{E}\left\{\left(\int_0^{\tau}|a(s,y_s)-a(s,\hat{y}_s)|ds\right)^2+\right.$$

$$\left.+4\int_0^{\tau}|b(s,y_s)-b(s,\hat{y}_s)|^2ds+4\int_0^{\tau}\int_U|c(s,y_s,u)-c(s,\hat{y}_s,u)|^2\Pi(du)ds\right\}+$$

$$+c\varepsilon^2\left(\frac{T}{\varepsilon}+4\right)\int_0^{\tau}\left[\mathrm{E}\left\{|a(s,y_s)-a(s,x_s)|^2\right\}+\mathrm{E}\left\{|b(s,y_s)-b(s,x_s)|^2\right\}+\right.$$

$$\left.+\int_U\mathrm{E}\left\{|c(s,y_s,u)-c(s,x_s,u)|^2\right\}\Pi(du)\right]ds\le$$

$$\le 6\varepsilon^2\left\{8h(h+2)Lc_1(\varepsilon,h)(\|y\|^2+\alpha^2)+2L(T+2\varepsilon)Tc_2\left(\varepsilon,\frac{T}{\varepsilon}\right)+\right.$$

$$\left.+6\varepsilon^2\left(\frac{T}{\varepsilon}+4\right)L\int_0^{\tau}\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le\theta\le h}|y(t)-x(t)|^2\right\}\right\}ds,$$

звідки за лемою Гронуолла випливає (20), (21).

Із цієї теореми 3 на основі результатів [5], сформульованих в §1, має місце наступне твердження.

Теорема 4. Нехай виконані умови теореми 3 і крім того:

1) відображення $a(t,\varphi)$ двічі неперервно диференційоване по другому аргументу за Фреше, при чому друга похідна задовольняє глобальну умову Ліпшиця по другому аргументу рівномірно по t;

2) для довільного розв'язку усередненого рівняння (18) $\forall t \in [0,T]$ виконуються співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\left[a\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{x}_\tau\right)-\bar{a}(\bar{x}(\tau))\right]d\tau=0\,;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\hat{a}\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\bar{x}(\tau)\right)d\tau=\int_0^t g(\tau)d\tau\,;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\left[b\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{x}_\tau\right)b^{\mathrm{T}}\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{x}_\tau\right)d\tau+\int_0^t c\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{x}_\tau,u\right)c^{\mathrm{T}}\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{x}_\tau,u\right)\Pi(du)\right]d\tau=$$

$$=\int_0^t f(\tau)f^{\mathrm{T}}(\tau);$$

$$c\left(\frac{\tau}{\varepsilon},\hat{x}_\tau,u\right)\le r(u),\ \int_U r^2(u)\Pi(du)<\infty\,,$$

де $g(t)$ и $f(t)$ — неперервні матричні функції, індекс "T" означає транспонування, $\hat{\alpha}(t,\varphi(0))=\alpha(t,\hat{\varphi})$.

Тоді при $\varepsilon\to 0$ нормована різниця (19) збігається на відрізку $[0,T]$ до розв'язку неоднорідного стохастичного рівняння Іто (7).

3. Усереднення в квазілінійних стохастичних диференціально-функціональних рівняннях

Розглянемо квазілінійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння (КСДФР) на ймовірнісному базисі $(\Omega,\Im,F,\mathrm{P})$ у вигляді

$$dx(t)=f(x_t)dt+\varepsilon\{a(t,x_t)dt+b(t,x_t)dw(t)+\int_U c(t,x_t,u)\tilde{\nu}(dt,du)\}\,, \qquad (22)$$

з початковою умовою

$$x(t)\,|_{h\le t\le 0}=\varphi(\omega)\,, \qquad (22^*)$$

де f — лінійне неперервне відображення з $D_n([-h,0])$ в R^n. Далі, нам буде потрібний генератор A_0 напівгрупи [20] для (22) у випадку $\varepsilon = 0$. Припустимо, що

$$\sigma(\mathrm{A}_0) = \sigma^0 \cup \sigma^\rho,\ \sigma^0 \subset \{z \in C : \operatorname{Re} z = 0\},$$
$$\sigma^\rho = \{z \in C : \operatorname{Re} z < -\rho < 0\}. \tag{23}$$

Зауважимо, що алгебраїчна кратність σ^0 співпадає з геометричною [9; 20]. Позначимо P — проекцію в корінний підпростір оператора A_0, який відповідає σ^0. Позначимо:

$$\mathrm{H}_0(t) \equiv \Pi_0 e^{t\mathrm{A}_0}\mathrm{P}1;\ \mathrm{H}_1(t) \equiv \Pi_0 e^{t\mathrm{A}_0}(\mathrm{I}-\mathrm{P})1;$$
$$u(t) \equiv \Pi_0 e^{t\mathrm{A}_0}\mathrm{P};$$
$$y_0(t) \equiv \Pi_0 e^{t\mathrm{A}_0}\mathrm{P}\varphi;\ \ y_1(t) \equiv \Pi_0 e^{t\mathrm{A}_0}(\mathrm{I}-\mathrm{P})\varphi;$$
$$1 \in C([-h,0]) \to M_n(R) : 1(\theta) \equiv \begin{cases} 0, & \forall\theta \in [-h,0), \\ 1, & \theta = 0. \end{cases}$$

а оператор Π_0 діє на векторні (або матричні) функції на відрізку $[-h,0]$ за правилом $\Pi_0\varphi = \varphi(0)$. Тоді КСДФР (22) можна, очевидно, переписати у вигляді системи інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} u(t) = y_0(t) &+ \varepsilon\int_0^t \mathrm{H}_0(t-\tau)a(\tau,u_\tau+v_\tau)d\tau + \\ &+\varepsilon\int_0^t \mathrm{H}_0(t-\tau)b(\tau,u_\tau+v_\tau)dw(\tau) + \\ &+\varepsilon\int_0^t\int_U \mathrm{H}_0(t-\tau)c(\tau,u_\tau+v_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} v(t) = y_1(t) &+ \varepsilon\int_0^t \mathrm{H}_1(t-\tau)a(\tau,u_\tau+v_\tau)d\tau + \\ &+\varepsilon\int_0^t \mathrm{H}_1(t-\tau)b(\tau,u_\tau+v_\tau)dw(\tau) + \\ &+\varepsilon\int_0^t\int_U \mathrm{H}_1(t-\tau)c(\tau,u_\tau+v_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du) \end{aligned} \tag{25}$$

з початковою умовою

$$u(\theta) = (\mathrm{P}\varphi)(\theta),\ \ v(\theta) = \varphi(\theta) - u(\theta),\ \theta \in [-h,0].$$

Разом з (24)—(25) розглянемо "спрощену" систему рівнянь:

$$\breve{u}(t) = y_0(t) + \varepsilon\int_0^t \mathrm{H}_0(t-\tau)a(\tau,\breve{u}_\tau)d\tau +$$
$$+\varepsilon\int_0^t \mathrm{H}_0(t-\tau)b(\tau,\breve{u}_\tau)dw(\tau) + \varepsilon\int_0^t\int_U \mathrm{H}_0(t-\tau)c(\tau,\breve{u}_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du), \tag{26}$$

$$\breve{v}(t) = y_1(t) + \varepsilon\int_0^t \mathrm{H}_0(t-\tau)a(\tau,\breve{u}_\tau+\breve{v}_\tau)d\tau +$$
$$+\varepsilon\int_0^t \mathrm{H}_0(t-\tau)b(\tau,\breve{u}_\tau+\breve{v}_\tau)dw(\tau) + \varepsilon\int_0^t\int_U \mathrm{H}_0(t-\tau)c(\tau,\breve{u}_\tau+\breve{v}_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du), \tag{27}$$

з початковими умовами (22*).

Означення 1. Тривіальний розв'язок (22) назвемо експоненціально стійким в середньому квадратичному з показником $\varepsilon\gamma > 0$, якщо $\forall\varphi \in D_n([-h,0])$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ і $t \ge 0$ виконується нерівність

$$\mathrm{E}\{\| x_t(s,\varphi)\|^2\} \le Me^{-\varepsilon\gamma(t-s)}\|\varphi\|^2 \tag{28}$$

при деякій сталі $M > 0$. Відповідне означення для (26) має вигляд:

$$\mathrm{E}\{\| \breve{u}_t(s,\varphi)\|^2\} \le Me^{-\varepsilon\gamma(t-s)}\|\varphi\|^2 . \tag{29}$$

Лема 1. Якщо виконується (23), глобальна умова Ліпшиця (15), умова (14) при $\alpha = 0$ і розв'язок (26) має оцінку (29).

Тоді розв'язки (27) мають оцінку

$$\mathrm{E}\{\| \breve{v}_t(s,\varphi) - y_{1t}(s,\varphi)\|^2\} \le M_1 e^{-\varepsilon\gamma_1(t-s)}\|\varphi\|^2\ \varepsilon^2 \tag{30}$$

$\forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $t \ge s \ge 0$, $\varphi \in D_n([-h,0])$ і деяких $M_1 > 0,\ \ \gamma_1 > 0,\ \ \varepsilon_0 > 0$.

Доведення. Легко переконатися в тому, що мають місце нерівності

$$\| y_{1t}(s,\varphi)\|^2 \le ce^{-2\rho_1(t-s)}\|\varphi\|^2,\ \|\mathrm{H}_1(t)\| \le ce^{-2\rho_1 t} \tag{31}$$

при деяких $c > 0,\ \rho_1 > 0$ і всіх $t \ge s \ge 0$, $\varphi \in D_n([-h,0])$. Крім того, з умов леми і нерівності Шварца [7] легко отримати нерівність:

$$\left|\int_s^t \mathrm{H}_1(t-s)F_1(\xi)a(t,\varphi)d\tau\right|^2 \le \left|\int_s^t e^{\frac{-\rho_1}{2}(t-\tau)}e^{\frac{\rho_1}{2}(t-\tau)}\mathrm{H}_1(t-s)a(t,\varphi)d\tau\right|^2 \le$$
$$\le c\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}d\tau\int_s^t e^{\rho_1(t-\tau)}|a(t,\varphi)|^2\ d\tau \le \frac{c}{\rho_1}L\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}\|\varphi\|^2 d\tau$$

$\forall t \ge s \ge 0$, $\varphi \in D_n([-h,0])$. За означенням $\mathrm{H}_1(t) = 0\ \ \forall t < 0$, тому із нерівності Ліпшиця і мартингальної властивості стохастичних інтегралів [8], випливає нерівність:

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|\int_s^{t+\theta}\mathrm{H}_1(t+\theta-\tau)b(\tau,z_\tau)dw(\tau)\right|^2\right\}+$$

$$+\mathrm{E}\left\{\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|\int_s^{t+\theta}\int_U\mathrm{H}_1(t+\theta-\tau)c(\tau,z_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du)\right|^2\right\}=$$

$$=\mathrm{E}\left\{\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|\int_s^{t+\theta}\mathrm{H}_1(t-\tau)b(\tau,z_\tau)dw(\tau)\right|^2\right\}+$$

$$+\mathrm{E}\left\{\sup_{-h\le\theta\le 0}\left|\int_s^{t+\theta}\int_U\mathrm{H}_1(t-\tau)c(\tau,z_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du)\right|^2\right\}\le 4LC\int_0^t\mathrm{E}\{\|z_\tau\|^2\,d\tau$$

для довільного випадкового процесу $z(t)$, погодженого з потоком $\Im_t$. Тому

$$\mathrm{E}\{\|\breve{v}_t(s,\varphi)-y_{1t}(s,\varphi)\|^2\}\le$$

$$\le\varepsilon^2\left\{\frac{16c}{\rho_1}L\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}e^{-2\rho_1(t-\tau)}d\tau\,\|\varphi\|^2+\right.$$

$$+\frac{8C}{\rho_1}L\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}\mathrm{E}\{\|\breve{u}_s(s,\varphi)\|^2\}d\tau+$$

$$+64CL\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}\mathrm{E}\{\|\breve{u}_s(s,\varphi)-y_{1\tau}(s,\varphi)\|^2\}d\tau+$$

$$+64C^2L\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}e^{-2\rho_1(t-s)}ds+32CL\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}\mathrm{E}\{\|\breve{u}_\tau(s,\varphi)\|^2\}d\tau\le$$

$$\le\varepsilon^2C_2\left(\|\varphi\|^2+\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}\mathrm{E}\{\|\breve{u}_\tau(s,\varphi)\|^2\}d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_s^t e^{-\rho_1(t-\tau)}\mathrm{E}\{\|\breve{v}_\tau(s,\varphi)-y_{1\tau}(s,\varphi)\|^2\}d\tau\right)$$

при деякій сталі $C_2>0$. В силу оцінки (29) запишемо нерівність

$$\int_s^t e^{-\rho_1(t-s)}\mathrm{E}\{\|\breve{u}_\tau(s,\varphi)\|^2\}d\tau\le\frac{M_2\|\varphi\|^2}{\rho_1-\varepsilon\gamma}e^{-\varepsilon\gamma(t-s)}\,.$$

Звідси випливає, що

$$e^{\varepsilon\gamma(t-s)}\mathrm{E}\left\{\|\breve{v}_t(s,\varphi)-y_{1t}(s,\varphi)\|^2\right\}\le$$

$$\le\varepsilon^2C_3\left(\|\varphi\|^2\,e^{-(\rho_1-\varepsilon\gamma)(t-s)}+\int\limits_0^{t-s}e^{\varepsilon\gamma\tau}\mathrm{E}\{\|\breve{v}_{\tau+s}(s,\varphi)-y_{1(\tau+s)}(s,\varphi)\|^2\}d\tau\right)$$

при деякій сталі $C_3>0$. Звідси, із нерівності Гронуолла, на основі (31) маємо оцінку

$$\mathrm{E}\{\|\breve{v}_t(s,\varphi)-y_{1t}(s,\varphi)\|^2\}\le M_3e^{(-\varepsilon\gamma+\varepsilon^2C_2)(t-s)}\varepsilon^2\,\|\varphi\|^2,$$

$\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $t\ge s\ge0$, $\varphi\in D_n([-h,0])$ і деякій сталі $M_3>0$, яка еквівалентна (30) при досить малому $\varepsilon_0>0$. Лема 1 доведена.

Позначимо

$$\breve{x}(t,s,\varphi)=\breve{u}(t,s,\varphi)+\breve{v}(t,s,\varphi)$$

і оцінимо різницю

$$m(t,\varphi)=\mathrm{E}\left\{\|x_{t+s}(s,\varphi)-\breve{x}_{t+s}(s,\varphi)\|^2\right\}.$$

Лема 2. В умовах леми 1 існує таке $\varepsilon_0>0$, що для довільних $T>0$, $\varphi\in D_n([-h,0])$, $s\ge0$, $t\in\left[0,\dfrac{T}{\varepsilon}\right]$ виконується нерівність

$$\mathrm{E}\left\{\|x_{t+s}(s,\varphi)-\breve{x}_{t+s}(s,\varphi)\|^2\right\}\le\varepsilon g(\varepsilon,T)\,\|\varphi\|^2, \tag{32}$$

причому

$$\lim_{\varepsilon\to0}g(\varepsilon,T)=C(T)<\infty.$$

Доведення. З (22), (26) і (27), використовуючи умову Ліпшиця, властивості функцій $\mathrm{H}_0(t)$, $\mathrm{H}_1(t)$ і мартингальну властивість стохастичних інтегралів, легко для $m(t,\varphi)$ отримати наступну оцінку

$$m(t,\varphi)\le6\varepsilon^2L\breve{\mathrm{H}}(t+4)\left\{\int\limits_0^t\mathrm{E}\left\{\|\breve{v}_{\tau+s}(s,\varphi)\right\}d\tau+\int\limits_0^t m(\tau,\varphi)d\tau\right\},$$

де $\breve{\mathrm{H}}\equiv\sup\limits_{t\ge0}\{\|\mathrm{H}(t)\|^2,\|\mathrm{H}_0(t)\|^2\}$. Далі, із (30) має місце нерівність

$$\int\limits_0^t\mathrm{E}\{\|\breve{v}_{\tau+s}(s,\varphi)\|^2\}d\tau\le2\int\limits_0^t\mathrm{E}\{\|\breve{v}_{\tau+s}(s,\varphi)-y_{1(\tau+s)}(s,\varphi)\|^2\,d\tau+$$

$$+2\int\limits_0^t\|y_{1(\tau+s)}(s,\varphi)\|^2\,d\tau\le\varepsilon^2M_1\int\limits_0^t e^{-\varepsilon\gamma_1\tau}d\tau\,\|\varphi\|^2+\int\limits_0^t e^{-2\rho_1\tau}d\tau\,\|\varphi\|^2\le$$

$$\leq \left(\varepsilon M_1 \frac{1}{\gamma_1} + \frac{C}{2\rho_1} \right) \| \varphi \|^2 .$$

Тому за нерівністю Гронуолла

$$m\left(\frac{T}{\varepsilon},\varphi\right) \leq 6\varepsilon^2 \breve{\mathrm{H}} \left(\frac{T}{\varepsilon}+4\right)\left(\varepsilon M_1 \frac{1}{\gamma_1} + \frac{C}{2\rho_1} \right) \| \varphi \|^2 \, e^{6\varepsilon L \breve{\mathrm{H}}} .$$

Звідки випливає (32). Лема 2 Доведена.

Перепишемо (26) в базисі $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ простору $\mathrm{P}C_n([-h,0])$. Оскільки σ^0 є симетричним відносно $\operatorname{Im} z = 0$, то можна вибрати елементи базису $f_j, j = 1, \ldots, m$ дійсними. Тоді існують такі матриці $D \in M_m(R)$, $\Psi \in M_m^n(R)$ і вектори $X(t) \in R^m$, $\Phi \in R^m$, що

$$\mathrm{A}_0 F = FD; \ \mathrm{P}1 = F\,\Psi; \ \breve{u}_t = FX(t);$$

$$\mathrm{P}\varphi = F\Phi; \ y_{0t} F e^{tD}\Phi; \ \mathrm{H}_{0t} = Fe^{tD}\Psi .$$

Рівняння (26) породжує стохастичне диференціальне рівняння для $X(t) \equiv X(t,\omega)$:

$$\frac{dX(t)}{dt} = DXdt + \varepsilon\,\Psi \Big\{ a(t, FX(t))dt + b(t, FX(t))dw(t) +$$

$$+ \int_U c(t, FX(t), u)\,\breve{\nu}(dt, du) \Big\},$$

яке заміною $X(t) = e^{tD} Y(t)$ можна привести до стандартної форми (1):

$$\frac{dY}{dt} = \varepsilon e^{-tD}\,\Psi \Big\{ a(t, Fe^{tD}Y)dt + b(t, e^{tD}Y)dw(t) + \int_U c(t, Fe^{tD}Y, u)\,\breve{\nu}(dt, du) \Big\}, \quad (33)$$

Початкові умови можна знайти з рівності $\mathrm{P}\varphi = FY(0)$.

Позначимо

$$\overline{a}(Y) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_s^{s+t} e^{-\tau D}\Psi a(\tau, Fe^{\tau D}Y)d\tau . \quad (34)$$

Якщо ця границя існує рівномірно по s, тоді для (33) використаємо теорему 2 і запишемо нерівність:

$$\mathrm{E}\left\{ \sup_{0\leq t\leq T/\varepsilon} \left| Y(t) - \overline{Y}(\varepsilon t) \right|^2 \right\} \leq g_1(\varepsilon, T)\,|\,Y(0)\,|^2 , \quad (35)$$

де $\overline{Y}(t)$ — розв'язок повністю спрощеного рівняння:

$$\frac{d\overline{Y}}{dt} = a(\overline{Y}),\ \overline{Y}(0) = Y(0) . \quad (36)$$

Використовуючи спряжений базис і обмеженість операторів P і e^{tD} замість (35) можна записати нерівність:

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le t\le T/\varepsilon}\left|X(t)-e^{tD}\overline{Y}(\varepsilon t)\right|^2\right\}\le g_1(\varepsilon,T)\,|\,Y(0)\,|^2, \tag{37}$$

де $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g_1(\varepsilon,T)=0 \quad \forall T\ge 0$, крім того $|\,Y(0)\,|^2\le C\,\|\,\varphi\,\|^2$ при деякій сталі $C>0$.

Теорема 5. Якщо існує рівномірно по $s\ge 0$ границя (34), виконані (22), (32), глобальна умова Ліпшиця (15), умова (14) при $\alpha=0$ і спектр матриці $A=(\nabla\overline{a})(0)$ міститься в півплощині $\{z\in C:\operatorname{Re} z<0\}$, тоді тривіальний розв'язок (22) експоненціально стійкий в середньому квадратичному з показником $\varepsilon\gamma>0 \quad \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ і досить малому $\varepsilon_0>0$.

Доведення. Потрібно переконатися в тому, що в умовах теореми 5 виконується нерівність (28). Припустимо, що

$$\mathrm{E}\{\|\,x_{t+s}(s,\varphi)\,\|^2\}\le 2\mathrm{E}\{\|\,x_{t+s}(s,\varphi)-\breve{x}_{t+s}(s,\varphi)\,\|^2\}+2\mathrm{E}\{\|\,\breve{x}_{t+s}(s,\varphi)\,\|^2\}$$

і оцінимо окремо обидва доданки з правої частини цієї нерівності. Оскільки тривіальний розв'язок (36) експоненціально стійкий, тоді для всіх $\Im_s$ — вимірних $Y(0),\ T>0,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ і досить малому $\varepsilon_0>0$ можна отримати для умовного математичного сподівання нерівності

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{T/\varepsilon-h\le t\le T/\varepsilon}|\,Y(t+s,s,Y(0))\,|^2\big/\Im_s\right\}\le 2\sup_{T/\varepsilon-h\le t\le T/\varepsilon}|\,\overline{Y}(\varepsilon t)\,|^2+$$

$$+2\mathrm{E}\left\{\sup_{0\le t\le T/\varepsilon}|\,Y(t+s,s,Y(0))\,|^2-|\,\overline{Y}(\varepsilon t)\,|^2\big/\Im_s\right\}\le 2(Me^{-\gamma(T-h\varepsilon)}+g_1(\varepsilon,T))\,|\,Y(0)\,|^2$$

при деяких $\gamma>0$ и $M>0$. Тепер можна вибрати $T>0$ настільки великим, а потім $\varepsilon_0>0$ настільки малим, щоб при даному $T>0$ і всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ виконувалась нерівність

$$Me^{-\gamma(T-h\varepsilon)}+g_1(\varepsilon,T)<\frac{1}{4}.$$

Для довільного розв'язку (33) при $\tau\ge s+h$ і вибраних $T>0$ і $\varepsilon_0>0$ запишемо нерівність:

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{T/\varepsilon-h\le t\le T/\varepsilon}|\,Y(t+\tau,\tau,Y(\tau,s,Y(0)))\,|^2\Big/\Im_s\right\}=$$

$$=\mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left\{\sup_{T/\varepsilon-h\le t\le T/\varepsilon}|\,Y(t+\tau,\tau,Y(\tau,s,Y(0)))\,|^2\Big/\Im_\tau\right\}\Big/\Im_s\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\mathrm{E}\{|\,Y(\tau,s,Y(0))\,|^2\big/\Im_s\}\le\frac{1}{2}\mathrm{E}\left\{\sup_{-h\le\tau\le 0}|\,Y(\tau,s,Y(0))\,|^2\big/\Im_s\right\}$$

$\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Тому, позначивши

$$\mu_k \equiv \mathrm{E}\left\{ \sup_{kT/\varepsilon \le t \le (k+1)T/\varepsilon} |Y(t+s,s,Y(0))|^2 \Big/ \Im_s \right\},$$

можна записати $\forall k \in N$ рекурентну нерівність $\mu_k \le \frac{1}{2}\mu_{k-1}$, а потім підібрати такі числа $M_1 > 0$ и $\gamma_1 > 0$, що при даному $T > 0$ и $\forall k \in N$ виконувалась нерівність $\mu_k \le M_1 e^{-\gamma T k} |Y(0)|^2$. Із цієї нерівності випливає оцінка (29), оскільки, $T > 0$ можна завжди вибрати великим. Відповідно, на основі леми 1

$$\mathrm{E}\left\{ \| \breve{v}_{t+s}(s,\varphi) \|^2 \right\} \le 2M_1 e^{-\varepsilon\gamma_1 t}\varepsilon^2 \|\varphi\|^2 + M_2 e^{-\rho_2 t}\varepsilon^2 \|\varphi\|^2, \qquad (38)$$

$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varphi \in C_n([-h,0])$, $t \ge 0$ та деяких додатних M_1, M_2, γ_2 і ρ_2.

Тут використана рівність $FX(t) = Fe^{tD}Y(t)$ і нерівність

$$\mathrm{E}\left\{ \| \breve{x}_{s+t/\varepsilon}(s,\varphi) \|^2 \right\} \le 2\mathrm{E}\left\{ \| \breve{u}_{s+t/\varepsilon}(s,\varphi) \|^2 \right\} +$$

$$+2\mathrm{E}\left\{ \| \breve{v}_{s+t/\varepsilon}(s,\varphi) \|^2 \right\} \le M_3 (e^{-\gamma_3 T} + e^{-\rho_2 T/\varepsilon}) \|\varphi\|^2$$

$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\varphi \in C_n([-h,0])$ і деяких $M_3 > 0$, $\gamma_3 > 0$, $\rho_2 > 0$. Крім того, з леми 1 при тих самих значеннях параметрів маємо оцінку (32). Тому

$$\mathrm{E}\left\{ \| \breve{x}_{s+t/\varepsilon}(s,\varphi) \|^2 \right\} \le \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 \qquad (39)$$

$\forall s \ge 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ і $\varphi \in D_n([-h,0])$. Поставивши в нерівності (39) $s = \tau + kT/\varepsilon$ $\forall \tau \ge 0$ і $k \in N$, маємо:

$$\mathrm{E}\left\{ \| \breve{x}_{\tau+kT/\varepsilon}(\tau,\varphi) \|^2 \right\} \le \left(\frac{1}{2}\right)^k \|\varphi\|^2 .$$

Тепер, використовуючи $\Im_t$ — погодженість розв'язків (26), (27), можна $\forall \tau \ge s \ge 0$ з нерівностей (35) і (38) довести оцінку

$$\sup_{0 \le t \le T/\varepsilon} \mathrm{E}\left\{ \| \breve{x}_{t+\tau}(\tau, \breve{x}_\tau(s,\varphi)) \|^2 \right\} \le$$

$$\le \sup_{0 \le t \le T/\varepsilon} \mathrm{E}\left\{ \mathrm{E}\{ \| \breve{x}_{t+\tau}(\tau,\psi)) \|^2 \} \Big|_{\psi = x_\tau(s,\varphi)} \right\} \le \mathrm{E}\{ \| \breve{x}_\tau(s,\varphi) \|^2 \} M_4(T).$$

Звідси із нерівності (39) $\forall k \in N$ випливає нерівність

$$\sup_{kT/\varepsilon \le t \le (k+1)T/\varepsilon} \mathrm{E}\left\{ \| \breve{x}_{t+s}(s,\varphi) \|^2 \right\} \le$$

$$\le \mathrm{E}\left\{ \| \breve{x}_{kT/\varepsilon+s}(s,\varphi) \|^2 \right\} M_4(T) \le \left(\frac{1}{2}\right)^k M_4(T) \|\varphi\|^2,$$

яка гарантує оцінку

$$\mathrm{E}\{ \| \breve{x}_{t+s}(s,\varphi) \|^2 \} \le C_1 e^{-\varepsilon\alpha_1 t} \|\varphi\|^2$$

$\forall t \geq 0$, $s \geq 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varphi \in C_n([-h, 0])$ і деяких $C_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$. З леми 2 і доведених вище нерівностей випливає нерівність

$$\mathrm{E}\{\| \breve{x}_{s+T/\varepsilon}(s,\varphi) \|^2\} \leq C_2 (e^{-\alpha_1 T} + \varepsilon g(\varepsilon, T/\varepsilon)) \| \varphi \|^2 \leq \frac{1}{2} \| \varphi \|^2$$

при досить великому $T > 0$, малому $\varepsilon_0 > 0$ та $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $s \geq 0$, і $\varphi \in D_n([-h, 0])$. Використовуючи $\mathfrak{I}_t$ — погодженість розв'язків і описану методику оцінок, аналогічно попередньому, можна отримати нерівності:

$$\sup_{kT/\varepsilon \leq t \leq (k+1)T/\varepsilon} \mathrm{E}\{\| x_{t+s}(s,\varphi) \|^2\} \leq M_5(T) \mathrm{E}\{\| x_{s+kT/\varepsilon}(s,\varphi) \|^2\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} M_5(T) \mathrm{E}\{\| x_{s+(k-1)T/\varepsilon}(s,\varphi) \|^2\},$$

тобто, для деякої сталої $M_3 > 0$ вірна нерівність

$$\sup_{kT/\varepsilon \leq t \leq (k+1)T/\varepsilon} \mathrm{E}\{\| x_{t+s}(s,\varphi) \|^2\} \leq M_3 e^{k \ln 2} \| \varphi \|^2 .$$

Тому $\forall\ t \geq 0$ правильною є нерівність

$$\mathrm{E}\{\| x_{t+s}(s,\varphi) \|^2\} \leq M_3 e^{-\ln 2 \left[\frac{t\varepsilon}{T}\right]} \| \varphi \|^2 \leq M e^{-\varepsilon \gamma t} \| \varphi \|^2$$

для деякої $M > 0$ і $\gamma = \dfrac{\ln 2}{T}$, що і треба було довести.

Висновки. З використанням граничних теорем для випадкових процесів та методу усереднення встановлено достатні умови експоненціальної стійкості у середньому квадратичному тривіального розв'язку квазілінійного стохастичного диференціально-функціонального рівняння.

Список використаних джерел:

1. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.
2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М. : Наука, 1977. — 352 с.
3. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Физматгиз, 1962. — 412 с.
4. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наукова думка,1982. — 612 с.
5. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук.думка,1968. — 354 с.
6. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 536 с.
7. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М., 1962. — Ч.1. — 895 с.

8. Дуб Дж. Вероятносные процессы / Дж. Дуб. — М. : Физматгиз, 1963. — 605 с.
9. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1963. — 859 с.
10. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с .
11. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1995. — Т. 2. — 621 с.
12. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеринбург : изд-во Уральской госакадемии путей сообщения , 1998. — 222 с.
13. Колмановский В. Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
14. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси : в 3-х томах / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2009. — Т. 3. Випадкові процеси. Комп’ютерне моделювання. — 798 с.
15. Пинни Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздывающем аргументом / Э. Пинни. — М. : Наука, 1961. — 248 с.
16. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / В. П. Рубаник. — М. : Наука, 1969. — 287 с.
17. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К. : Наук.думка, 1987. — 328 с.
18. Хасьминский Р. З. Устойчивость ситем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 367 с.
19. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М. : Мир, 1984. — 421 с.
20. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально — функциональных уравнений / Е. Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1989. — 421 с.
21. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский. — Рига : Ориентир, 1992. — 328 с.
22. Шахгилдян В. В. Фазовая автоподстройка частоты / В. В. Шахгилдян, Л. А. Ляховский. — М. : Изд-во "Связь", 1972. — 447 с.
23. Самойленко А. М. Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями / А. М. Самойленко, О. М. Станжицький. — К. : Наук. думка, 2009. — 336 с.
24. Korolyuk V. S. Stochastic Systems in merging Phase Space / V. S. Korolyuk, N. Limnios. — London : World Scientific, 2006. — 331 p.

Sufficient conditions for exponential stability in mean square trivial solution of the Cauchy problem for almost linear stochastic differential-functional equation using the averaged equations.

Key words: *Cauchy problem, almost linear stochastic differential-functional equation, averaging method, exponential stability, stability in mean square, small parameter.*

Отримано: 20.07.2012