УДК 519.217;519.718

А. М. Калинюк[*]**,** канд. фіз.-мат. наук,
Т. О. Лукашів[**]**,** канд. фіз.-мат. наук

[*] Подільський державний аграрно-технічний університет,
м. Кам'янець-Подільський,
[**] Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

СТІЙКІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ІТО-СКОРОХОДА ІЗ ЗОВНІШНІМИ МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

Використано метод функцій Ляпунова для дослідження асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в цілому, експоненціальної стійкості в середньому квадратичному в цілому сильного розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь з пуассоновими збуреннями з урахуванням внутрішніх марковських параметрів і зовнішніх перемикань типу ланцюга Маркова.

Ключові слова: *метод функцій Ляпунова, рівняння Іто-Скорохода, марковські перемикання, стійкість в середньому квадратичному.*

Вступ. Із найбільш розповсюджених методів дослідження стохастичних систем можна виділити методи усереднення, дифузійної апроксимації та різні модифікації другого методу Ляпунова для встановлення поведінки розв'язку стохастичних диференціальних систем. Зокрема, метод функцій Ляпунова дозволяє дослідити асимптотичну поведінку розв'язку без відшукання його у явному вигляді.

Системи з імпульсною дією вивчалися у працях багатьох відомих вчених, таких як Митропольський Ю. О., Перестюк М. О., Плотников В. А., Самойленко А. М., Коренівський Д. Г., Кац І. Я., Хасьмінський Р. З., Царков Є. Ф., Pozner A. Зокрема, Кацом І. Я. вперше введено поняття системи випадкової структури як системи, залежної від марковського параметра [6], а Царковим Є.Ф. обґрунтовано методику дослідження стохастичних систем, які перебувають під впливом зовнішніх імпульсних збурень [9].

Праці [7; 8] присвячені проблемі вивчення стійкості стохастичних динамічних систем Іто з використанням методики врахування внутрішніх параметричних збурень за І. Я. Кацом у перерізі з методикою врахування зовнішніх імпульсних впливів за Є. Ф. Царковим.

У даній праці методику [7] застосовано для дослідження стійкості в середньому квадратичному стохастичних динамічних систем випадкової структури з пуассоновими збуреннями, які перебувають під впливом зовнішніх імпульсних марковських перемикань.

Постановка задачі. На ймовірнісному базисі [1; 5]

$$(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F} := \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\ t \ge 0\}, \boldsymbol{P})$$

розглядається стохастичне диференціальне рівняння

$$dx(t) = a(t,\ \xi(t),\ x(t))dt + b(t,\ \xi(t),\ x(t))dw(t) + \\ + \int_U c\left(t,\ \xi(t),\ u,\ x(t)\right)\tilde{\nu}\left(du,\ dt\right) \tag{1}$$

із зовнішніми марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\big|_{t=t_k} = g(t_k-,\ \xi\left(t_k-\right),\ \eta_k,\ x(t_k-)), \\ t_k \in S := \{t_n \Uparrow,\ n = 0, 1, 2, \ldots\},\ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \tag{2}$$

і початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \boldsymbol{Y},\ x(t_0) = x_0 \in \boldsymbol{R}^m,\ \eta_{k_0} = h \in \boldsymbol{H}\ . \tag{3}$$

Тут $\xi\left(t\right)$ — марковський процес із значеннями в метричному просторі $\boldsymbol{Y}$; $\left(\eta_k, k \ge 0\right)$ — ланцюг Маркова із значеннями в метричному просторі $\boldsymbol{H}$ [4]; $x(t) \equiv x(t,\omega)\ :\ [0,+\infty)\times\Omega \to \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}$; $w(t) \equiv w(t,\omega)$ — одновимірний стандартний вінерів процес [2]; $\tilde{\nu}\left(du,\ dt\right)$ — центрована пуассонова міра [1; 5]; $u \in U \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}$.

Систему (1)—(3) трактуватимемо як систему випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями [6; 9] і пуассоновими збуреннями.

Вимірні за сукупністю змінних відображення $a : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, $b : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, $c : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ та $g : \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ задовольняють за останнім аргументом умову Ліпшиця

$$\left|a(t,y,x^{(1)}) - a(t,y,x^{(2)})\right| + \left|b(t,y,x^{(1)}) - b(t,y,x^{(2)})\right| + \\ + \left|c(t,y,u,x^{(1)}) - c(t,y,u,x^{(2)})\right| + \left|g(t,y,h,x^{(1)}) - g(t,y,h,x^{(2)})\right| \le \\ \le L\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right|, L > 0, \tag{4}$$

при $\forall t \ge 0,\ y \in \boldsymbol{Y},\ h \in \boldsymbol{H}$, і умову

$$\left|a(t,y,0)\right| + \left|b(t,y,0)\right| + \int_U \left|c(t,y,u,0)\right| \Pi\left(du\right) + \left|g(t,y,h,0)\right| = L_1 < \infty\ . \tag{5}$$

Вказані умови щодо a, b, c та g гарантують існування сильного розв'язку задачі (1)—(3) з точністю до стохастичної еквівалентності при будь-яких $t_0 \ge 0, x \in \boldsymbol{R}^m$ і заданих реалізаціях марковського процесу $\left\{\xi\left(t\right), t \ge t_0\right\} \in \boldsymbol{Y}$ і ланцюга Маркова $\left\{\eta_k, k \ge k_0\right\}$ [10].

Основні означення. Вважаючи, що $\boldsymbol{P}_k\left(\left(y,h\right),\,\Gamma\times G\right)$ — перехідна ймовірність ланцюга Маркова $\left\{\xi\left(t\right),\eta_k\right\}$ на k-му кроці, введемо позначення

$$\boldsymbol{P}_{y,h}^{t_k}\left(\xi\left(t_{k+1}\right)\in\Gamma,\,\eta_{k+1}\in G\right)\equiv\boldsymbol{P}_k\left(\left(y,h\right),\,\Gamma\times G\right),$$

при всіх $t_k\geq t_0$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$ і борелевих $\Gamma\in\boldsymbol{Y}$ та $G\in\boldsymbol{H}$.

Тепер введемо функцію

$$\boldsymbol{P}_k\left(\left(y,h,x\right),\,\Gamma\times G\times C\right)\equiv$$

$$\equiv\boldsymbol{P}_{y,h}^{t_k}\left(x\left(t_{k+1},t_k,\,y,\,h\right)\in C,\,\xi\left(t_{k+1}\right)\in\Gamma,\,\eta_{k+1}\in G\right),$$

при всіх $t_k\in S\bigcup\left\{t_0\right\}$, $k\in\boldsymbol{N}\bigcup\left\{0\right\}$, $x\in\boldsymbol{R}^m$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$ і борелевих $C\subset\boldsymbol{R}^m$, $\Gamma\subset\boldsymbol{Y}$, $G\subset\boldsymbol{H}$.

Означення 1. Послідовністю дискретних операторів Ляпунова $\left(l\,v_k\right)\left(y,h,x\right)$ на послідовності вимірних скалярних функцій $v_k\left(y,h,x\right):\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^1$, $k\in\boldsymbol{N}\bigcup\left\{0\right\}$, для СДР (1) із зовнішніми марковськими перемиканнями (2) визначаємо рівністю [1; 5]

$$\left(l\,v_k\right)\left(y,h,x\right)\equiv\int\limits_{\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{R}^m}\boldsymbol{P}_k\left(y,h,x\right)\left(du\times dz\times d\chi\right)v_{k+1}\left(u,z,\chi\right)-v_k\left(y,h,x\right).\quad(6)$$

Означення 2. Функцією Ляпунова для системи випадкової структури (1)—(3) назвемо послідовність невід'ємних функцій $\left\{v_k\left(y,h,x\right),\,k\geq 0\right\}$ таких, що виконуються умови:

1) при всіх $k\geq 0$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $x\in\boldsymbol{R}^m$ визначено дискретний оператор Ляпунова $\left(l\,v_k\right)\left(y,h,x\right)$ (6);
2) при $r\to+\infty$

$$\underline{v}\left(r\right)\equiv\inf_{\substack{k\in\boldsymbol{N},\,y\in\boldsymbol{Y},\\ h\in\boldsymbol{H},\,\left|x\right|\geq r}}v_k\left(y,h,x\right)\to+\infty\,;\quad(7)$$

3) при $r\to 0$

$$\overline{v}\left(r\right)\equiv\sup_{\substack{k\in\boldsymbol{N},\,y\in\boldsymbol{Y},\\ h\in\boldsymbol{H},\,\left|x\right|\leq r}}v_k\left(y,h,x\right)\to 0\,;\quad(8)$$

причому $\underline{v}\left(r\right)$ і $\overline{v}\left(r\right)$ неперервні і монотонні.

Зауваження. Дискретний оператор Ляпунова (6) на розв'язках системи (1)—(3) має вигляд [8]

$$\left(l\,v_k\right)\left(y,h,x\right)=\left(\mathscr{L}\,v_k\right)\left(t,y,h,x\right)=\frac{\partial v_k\left(t,y,h,x\right)}{\partial t}+$$

$$+\left(\frac{\partial v_k\left(t,y,h,x\right)}{\partial x}\right)a\left(t,y,h,x\right)+$$

$$+\frac{1}{2}Sp\left(\left(\nabla^2_{xx}v_k\left(t,y,h,x\right)b\left(t,y,h,x\right)b^T\left(t,y,h,x\right)\right)\right)+$$

$$+\int_U[v_k\left(t,y,h,x+c\left(t,y,h,x,u\right)\right)-v_k\left(t,y,h,x\right)-$$

$$-\left(\left(\nabla_x v_k\left(t,y,h,x\right)\right),c\left(t,y,h,x,u\right)\right)]\Pi\left(du\right)+$$

$$+\sum_{j\neq i}[v_k\left(t,y_j,h,x\right)-v_k\left(t,y_i,h,x\right)]q_{ij},$$

де $Sp(\cdot)$ — слід матриці, q_{ij} — ймовірність переходу $h_i\to h_j$.

Розглядатимемо стійкість тривіального розв'язку $x\equiv 0$ системи (1)—(3), тобто виконання (5) при $L_1=0$.

Оскільки сильний розв'язок $x\left(t\right)\equiv x\left(t,\omega\right)\in \boldsymbol{R}^m$ СДР (1) однозначно визначається за допомогою початкових даних $x(t_0)=x_0$, $\xi(t_0)=y$, $\eta_{k_0}=h$, то й надалі його позначатимемо $x(t,t_0,y,h,x_0)$.

Означення 3. Систему випадкової структури (1)—(3) назвемо:

- стійкою в середньому квадратичному в цілому, якщо для $\forall\varepsilon>0$ можна вказати таке $\delta_1>0$, що з нерівності $\left|x\right|<\delta_1$ випливає нерівність

$$\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t,t_0,y,h,x\right)\right|^2\right\}<\varepsilon,$$

при всіх $t>t_0$, $t_0\geq 0$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $x\in\boldsymbol{R}^m$;

- асимптотично стійкою в середньому квадратичному в цілому, якщо вона стійка в середньому квадратичному в цілому та існує таке $\delta_2>0$, що з нерівності $\left|x\right|<\delta_2$ випливає

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{y\in\boldsymbol{Y},h\in\boldsymbol{H}}\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t,t_0,y,h,x\right)\right|^2\right\}<\varepsilon,$$

при всіх $t_0\geq 0$;

- експоненціально стійкою в середньому квадратичному в цілому, якщо існує таке $\delta_3>0$, що з нерівності $\left|x\right|<\delta_3$ випливає нерівність

$$\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t,t_0,y,h,x\right)\right|^2\right\}\leq Me^{-\gamma\left(t-t_0\right)}\left|x\right|^2,$$

при деяких $M>0,\gamma>0$ і будь-яких $t>t_0$, $t_0\geq 0$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $x\in\boldsymbol{R}^m$.

Стійкість в середньому квадратичному. Встановимо достатні умови стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку динамічної системи випадкової структури.

Для розв'язку системи (1)—(3) на інтервалах $\left[t_k, t_{k+1}\right)$ має місце така оцінка.

Лема. При виконанні умов (4), (5) при всіх $k \geq 0$ для сильного розв'язку задачі Коші (1)—(3) справедлива нерівність

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} \left|x(t)\right|^2\right\} \leq 21(1+2L)e^{9L^2\left(t_{k+1}-t_k\right)^2}\left(\boldsymbol{E}\left\{x^2\left(t_k\right)\right\}+3L_1^2\left(t_{k+1}-t_k\right)\right). \quad (9)$$

Доведення. При всіх $t \in \left[t_k, t_{k+1}\right), k \geq 0,$ використовуючи інтегральну форму запису для процесу $x(t)$, легко записати нерівність

$$x(t) \leq \left|x\left(t_k\right)\right| + \int_{t_k}^{t}\left|a\left(\tau, y, x(\tau)\right) - a\left(\tau, y, 0\right)\right| d\tau + \int_{t_k}^{t}\left|a\left(\tau, y, 0\right)\right| d\tau +$$

$$+\int_{t_k}^{t}\left|b\left(\tau, y, x(\tau)\right) - b\left(\tau, y, 0\right)\right| dw(\tau) + \int_{t_k}^{t}\left|b\left(\tau, y, 0\right)\right| dw(\tau) +$$

$$+\int_{t_k}^{t}\int_{U}\left|c\left(\tau, y, u, x(\tau)\right) - c\left(\tau, y, u, 0\right)\right|\tilde{\nu}\left(du, d\tau\right) + \int_{t_k}^{t}\left|c\left(\tau, y, h, 0\right)\right|\tilde{\nu}\left(du, d\tau\right).$$

Піднісши до квадрату ліву і праву частини отриманої нерівності, обчисливши sup від отриманого виразу, використовуючи нерівність Коші-Буняковського і нерівність для оцінки умовного математичного сподівання від квадрату супремуму інтеграла Вінера-Іто та інтеграла за центрованою пуассоновою мірою, враховуючи (4), (5), отримаємо

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} \left|x(t)\right|^2\right\} \leq 7\left[\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t_k\right)\right|^2\right\} + 2L_1^2\left(t_{k+1}-t_k\right) + \right.$$

$$\left. +9L^2\left(t_{k+1}-t_k\right)\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|x(\tau)\right|^2 d\tau\right\}\right].$$

Далі, застосовуючи нерівність Гронуола [9], легко побачити, що

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} \left|x(t)\right|^2 / \mathcal{F}_{t_k}\right\} \leq 7\left(\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t_k\right)\right|^2\right\} + 3L_1^2\left(t_{k+1}-t_k\right)\right)e^{9L^2\left(t_{k+1}-t_k\right)^2}.$$

Для $t = t_{k+1}$ сильний розв'язок системи (1)—(3), очевидно, повинен задовольняти нерівність

$$\boldsymbol{E}\left\{\left|x^2\left(t_{k+1}\right) / \mathcal{F}_{t_k}\right|\right\} \leq 3[\boldsymbol{E}\left\{\left|x^2\left(t_{k+1}-\right) / \mathcal{F}_{t_k}\right|\right\} +$$

$$+2\boldsymbol{E}\left\{\left|g\left(t_{k+1},\xi\left(t_{k+1}-\right),\eta_{k+1},x_{k+1}\right)-g\left(t_{k+1},\xi\left(t_{k+1}-\right),\eta_{k+1},0\right)\right|^2/\mathcal{F}_{t_k}\right\}+$$

$$+2\boldsymbol{E}\left\{\left|g\left(t_{k+1},\xi\left(t_{k+1}-\right),\eta_{k+1},0\right)\right|^2/\mathcal{F}_{t_k}\right\}\le$$

$$\le 3\left[\left(1+2L\right)\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k\le t\le t_{k+1}}\left|x\left(t\right)\right|^2/\mathcal{F}_{t_k}\right\}+2L_1^2\right].$$

Об’єднуючи дві останні нерівності, отримаємо потрібну нерівність (9) леми.

Теорема 1. Нехай для системи (1)—(3) виконуються умови:

1) $0<\left|t_{k+1}-t_k\right|<\Delta,\ k\ge 0,\ \Delta>0$;
2) умова Ліпшиця (4);
3) існують послідовності функцій Ляпунова $v_k\left(y,h,x\right)$ і $a_k\left(y,h,x\right)$, $k\ge 0$ такі, що на підставі системи справедлива нерівність

$$\left(l\,v_k\right)\left(y,h,x\right)\le -a_k\left(y,h,x\right) \qquad (10)$$

і $\forall x\in\boldsymbol{R}^m$

$$c_1\left|x\right|^2\le v_k\left(y,h,x\right)\le c_2\left|x\right|^2, \qquad (11)$$

$$c_3\left|x\right|^2\le a_k\left(y,h,x\right)\le c_4\left|x\right|^2, \qquad (12)$$

при деяких $c_i>0,\ i=\overline{1,4}$, для всіх $k\ge 0,\ y\in\boldsymbol{Y},\ h\in\boldsymbol{H}$. Тоді система випадкової структури (1)—(3) асимптотично стійка в середньому квадратичному в цілому.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{F}_{t_k}$ мінімальну σ-алгебру, відносно якої вимірні $\xi(t)$ при всіх $t\in\left[t_0,t_k\right]$ і η_n при $n\le k$. Тоді умовне математичне сподівання можна обчислити за формулою [4]

$$\boldsymbol{E}\left\{v_{k+1}\left(\xi\left(t_{k+1}\right),\eta_{k+1},x\left(t_{k+1}\right)\right)/\mathcal{F}_{t_k}\right\}=$$
$$=\int\limits_{\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{R}^m}\boldsymbol{P}_k\left(y,h,x\right)\left(dux\,dzx\,d\chi\right)v_{k+1}\left(u,z,\chi\right)\Bigg|_{y=\xi\left(t_k\right),h=\eta_k,x=x\left(t_k\right)} \qquad (13)$$

У цьому випадку за означенням дискретного оператора Ляпунова $\left(l\,v_k\right)\left(y,h,x\right)$ з рівності (13) отримаємо, враховуючи (10), нерівність

$$\boldsymbol{E}\left\{v_{k+1}\left(\xi\left(t_{k+1}\right),\eta_{k+1},x\left(t_{k+1}\right)\right)/\mathcal{F}_{t_k}\right\}=v_k\left(\xi\left(t_k\right),\eta_k,x\left(t_k\right)\right)+$$
$$+\left(l\,v_k\right)\left(\xi\left(t_k\right),\eta_k,x\left(t_k\right)\right)\le\overline{v}\left(\left|x\left(t_k\right)\right|\right). \qquad (14)$$

З нерівності (9) (за нерівністю Ляпунова для моментів [4; 5] — з існування другого моменту випливає існування першого моменту) і властивостей функції $\overline{v}$ випливає існування умовного математичного сподівання лівої частини нерівності (14).

Тепер, на основі (13), запишемо дискретний оператор Ляпунова $\left(l\, v_k\right)\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right)$ вздовж розв'язків (1)—(3):

$$\begin{aligned}\left(l\, v_k\right)\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right) = \boldsymbol{E}\left\{ v_{k+1}\left(\xi\left(t_{k+1}\right), \eta_{k+1}, x\left(t_{k+1}\right)\right) / \mathcal{F}_{t_k} \right\} - \\ -v_k\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right) \le -a_k\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right) \le 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Тоді при $k \ge 0$ виконується нерівність

$$\boldsymbol{E}\left\{ v_{k+1}\left(\xi\left(t_{k+1}\right), \eta_{k+1}, x\left(t_{k+1}\right)\right) / \mathcal{F}_{t_k} \right\} \le v_k\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right).$$

Тоді, за означенням супермартингала [5], послідовність випадкових величин $\left\{v_k\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right)\right\}$ при $k \in \boldsymbol{N}$ утворює супермартингал відносно $\mathcal{F}_{t_k}$ [9].

Використовуючи нерівність (15) для $n = k_0$, на основі (11) легко отримати нерівність

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t_{N+1}\right)\right|^2\right\} \le \frac{1}{c_1}\boldsymbol{E}\left\{ v_{N+1}\left(\xi\left(t_{N+1}\right), \eta_{N+1}, x\left(t_{N+1}\right)\right)\right\} \le \\ \le \frac{1}{c_1}\left\{ v_{k_0}\left(\xi\left(t_{k_0}\right), \eta_{k_0}, x\right)\right\} \le \frac{c_2}{c_1}|x|^2\end{aligned}$$

для всіх $N \ge k_0, k_0 \in \boldsymbol{N}, x \in \boldsymbol{R}^m$ і початкових розподілів вектора $\left\{\xi\left(t_{k_0}\right), \eta_{k_0}\right\}$.

Тому можна стверджувати, що виконується нерівність

$$\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t, t_0, y, h, x\right)\right|^2\right\} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$$

а це означає, що система (1)—(3) стійка в середньому квадратичному в цілому.

Далі, взявши математичне сподівання від обох частин нерівності (15) і просумувавши за k від $n \ge k_0$ до N, отримаємо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\left\{ v_{N+1}\left(\xi\left(t_{N+1}\right), \eta_{N+1}, x\left(t_{N+1}\right)\right)\right\} - \boldsymbol{E}\left\{ v_n\left(\xi\left(t_n\right), \eta_n, x\left(t_n\right)\right)\right\} = \\ = \sum_{k=n}^{N}\boldsymbol{E}\left\{\left(l\, v_k\right)\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right)\right\} \le -\sum_{k=n}^{N}\boldsymbol{E}\left\{ a_k\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right)\right\} \le 0.\end{aligned} \tag{16}$$

З нерівності (16) випливає оцінка

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}\left\{ v_{N+1}\left(\xi\left(t_{N+1}\right),\eta_{N+1},x\left(t_{N+1}\right)\right)\right\} \le v_{k_0}\left(y,h,x\right)- \\ &-\sum_{k=k_0}^{N}\boldsymbol{E}\left\{ a_k\left(\xi\left(t_k\right),\eta_k,x\left(t_k\right)\right)\right\} \le v_{k_0}\left(y,h,x\right) \end{aligned} \tag{17}$$

при всіх $N \ge k_0$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$, $x \in \boldsymbol{R}^m$.

Використовуючи нерівності (17), (11), (12), можемо отримати нерівність

$$\begin{aligned} &\sum_{k=k_0}^{N}\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t_{N+1}\right)\right|^2\right\} \le \frac{1}{c_3}\sum_{k=k_0}^{N}\boldsymbol{E}\left\{ a_k\left(\xi\left(t_k\right),\eta_k,x\left(t_k\right)\right)\right\} \le \\ &\le \frac{1}{c_3}\boldsymbol{E}\left\{ v_{k_0}\left(\xi\left(t_{k_0}\right),\eta_{k_0},x\right)\right\} \le \frac{c_2}{c_3}\left|x\right|^2. \end{aligned}$$

Ця нерівність гарантує збіжність ряду, членами якого виступають $\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t_{N+1}\right)\right|^2\right\}$, для будь-яких початкових даних $x\left(t_{k_0}\right)=x$ і для початкових розподілів вектора $\left\{\xi\left(t_{k_0}\right),\eta_{k_0}\right\}$.

Отже,

$$\lim_{k\to\infty}\ \sup_{y\in\boldsymbol{Y},h\in\boldsymbol{H}}\boldsymbol{E}\left\{\left|x\left(t_k,t_0,y,h,x\right)\right|^2\right\}=0$$

при всіх $t_0 \ge 0$, що і доводить теорему 1.

Наслідок. Якщо виконуються умови 1), 2) теореми 1 і нерівності (10), (11), тоді тривіальний розв’язок динамічної системи випадкової структури (1)—(3) стійкий в середньому квадратичному в цілому.

Теорема 2. Нехай для системи (1)—(3) виконуються умови теореми 1 та існує таке число $\Delta_1 > 0$, що

$$\left|t_{k+1}-t_k\right| \ge \Delta_1, \tag{18}$$

при всіх $k \in \boldsymbol{N}$. Тоді система випадкової структури (1)—(3) експоненціально стійка в середньому квадратичному в цілому.

Доведення. Оскільки випадкова величина $\sup\limits_{t_k\le t\le t_{k+1}}\left|x\left(t\right)\right|^2$ не залежить від подій σ-алгебри $\mathcal{F}_{t_k}$ [5], то

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k\le t\le t_{k+1}}\left|x\left(t\right)\right|^2/\mathcal{F}_{t_k}\right\}=\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k\le t\le t_{k+1}}\left|x\left(t\right)\right|^2\right\},$$

то нерівність (9) можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k\le t\le t_{k+1}}\left|x\left(t\right)\right|^2\right\} \le 21\left(1+2L\right)e^{9L^2\left(t_{k+1}-t_k\right)^2}\left(\boldsymbol{E}\left|x\right|^2+3L_1^2\left(t_{k+1}-t_k\right)\right), \tag{9*}$$

при $L_1 = 0$, вважаючи, що досліджуємо стійкість тривіального розв’язку.

Оскільки для $t \in \left[t_k, t_{k+1}\right)$ з означення k_0 випливає нерівність

$$e^{-\gamma\left(t_k - t_{k_0}\right)} \le e^{-\gamma\left(t_k - t_0\right)} e^{\gamma\Delta},$$

то досить довести, що на підставі (9*) виконується нерівність

$$\boldsymbol{E}\left\{ \left|x\left(t, t_0, y, h, x\right)\right|^2 \right\} < Me^{-\gamma\left(t - t_0\right)} \left|x\right|^2$$

для деяких $M > 0, \gamma > 0$ і для будь-яких $y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}, x \in \boldsymbol{R}^m$, $t_0 \ge 0, t \ge t_0$.

Скористаємось позначеннями з доведення теореми 1 і доведеною раніше рівністю

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E}\left\{ v_{k+1}\left(\xi\left(t_{k+1}\right), \eta_{k+1}, x\left(t_{k+1}\right)\right) / \mathcal{F}_{t_k} \right\} = \\ = v_k\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right) + \left(l\, v_k\right)\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right) \end{gathered} \tag{19}$$

для довільних $k \in \boldsymbol{N}, t \ge 0$ і початкових значень $x\left(t_0\right), \xi\left(t_0\right), \eta_{k_0}$. Оскільки з умов теореми випливає нерівність

$$\left(l\, v_k\right)\left(y, h, x\right) \le -a_k\left(y, h, x\right) \le -c_3\left|x\right|^2 \le -\frac{c_2}{c_1} v_k\left(y, h, x\right),$$

то із (19) маємо

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E}\left\{\boldsymbol{E}\left\{ v_{k+1}\left(\xi\left(t_{k+1}\right), \eta_{k+1}, x\left(t_{k+1}\right)\right) / \mathcal{F}_{t_k} \right\}\right\} \le \\ \le \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right) \boldsymbol{E}\left\{ v_k\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right)\right\}. \end{gathered}$$

Якщо $k_0 \ge 1$, то з останньої оцінки для довільного $k \ge k_0$ можна записати нерівність

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E}\left\{\boldsymbol{E}\left\{ v_k\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k\right)\right) / \mathcal{F}_{t_k} \right\}\right\} \le \\ \le \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0} \boldsymbol{E}\left\{ v_{k_0}\left(\xi\left(t_{k_0}\right), \eta_{k_0}, x\left(t_{k_0}\right)\right)\right\}. \end{gathered}$$

Звідси, використовуючи умови теореми 1, отримуємо:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E}\left\{ \left|x\left(t_k, t_0, y, h, x\right)\right|^2 \right\} \le \\ \le \frac{1}{c_1} \boldsymbol{E}\left\{v_k\left(\xi\left(t_k\right), \eta_k, x\left(t_k, t_0, y, h, x\right)\right)\right\} \le \frac{c_2}{c_1}\left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0} \left|x\right|^2. \end{gathered}$$

Загалом, можна вважати, що $c_2 > c_3$, і тоді $\left(1-\frac{c_3}{c_2}\right) \in (0,1)$. Залишається скористатися нерівністю (18), що й доводить теорему.

Висновки. Встановлено достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в цілому, експоненціальної стійкості в середньому квадратичному в цілому розв'язків стохастичних динамічних систем випадкової структури з пуассоновими збуреннями і зовнішніми марковськими перемиканнями.

Список використаних джерел:

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М. : Наука, 1977. — 361 с.
2. Булинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Р. Ширяев. — М. : Физматлит, 2005. — 408 с.
3. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1982. — 612 с.
4. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1969. — 859 с.
5. Дуб Дж. Вероятностные процессы / Дж. Дуб. — М. : Физматгиз, 1963. — 605 с.
6. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеринбург : УГАПС, 1998. — 222 с.
7. Лукашив Т. О. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. I. Общие теоремы об устойчивости импульсных стохастических систем / Т. О. Лукашив, И. В. Юрченко, В. К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 2. — С. 135–145.
8. Лукашив Т. О. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. II. Устойчивость по первому приближению импульсных стохастических систем с марковскими параметрами / Т. О. Лукашив, И. В. Юрченко, В. К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 3. — С. 146–158.
9. Свердан М. Л. Устойчивость приближению импульсных стохастических систем / М. Л. Свердан, Е. Ф. Царьков. — Рига : РТУ, 1994. — 300 с.
10. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1987. — 328 с.

The asymptotic stability in the main square on the whole, exponential stability in the main square on the whole are investigated for the strong solution of stochastic differential equations with Poisson perturbances and internal Markov parameters and external switchings of the type of Markov chain with the help of Lyapunov functions method.

Key words: *Lyapunov functions method, Ito-Skorohod equation, Markov switchings, stability in the main square.*

Отримано: 17.04.2013