6. Simsen J. On attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows / J. Simsen, C. Gentile // Set-Valued Anal. — 2008. — Vol. 16. — P. 105–124
7. Kapustyan O. V. On global attractors of multivalued semiflows generated by the 3D Benard system / O. V. Kapustyan, A. V. Pankov, J. Valero // Set-Valued and Variational Analysis. — 2012. — Vol. 20, № 3. — P. 445–465.
8. Caraballo T. Unique strong solution and V-attractor of a three-dimensional system of globally modified Navier-Stokes equation / T. Caraballo, P. E. Kloeden, J. Real // Advanced Nonlinear Studies. — 2006. — Vol.6. — P. 411–436.
9. Cabral M. Existence and dimension of the attractor for the Benadr problem on chanel-like domains / M. Cabral, R. Rosa, R. Temam // DCDS. — 2004. — Vol.10, №1. — P. 89–116.

In this paper we prove the existence of global φ-attractor in the weak topology of the phase space for a multivalued semiflow generated by solutions of the modified 3D Benard system in an unbounded domain, for which the Poincarй inequality holds.

Key words: *modified* 3D *Benard system, multivalued semiflow, global φ-attractor.*

Отримано: 12.02.2013

УДК 517.947

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В ОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЯХ

Методом функції впливу та функції Гріна (головних розв'язків) побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру гіперболічних крайових задач в напівобмежених багатошарових (кусково-однорідних) просторових областях. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення Фур'є на декартових осі, півосі та сегменті, а також інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті з n точками спряження.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки та техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність в неї кутових точок, тощо) в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1—5].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6—9].

Окрім методу відокремлення змінних [10] одним з важливих і ефективних методів вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших лінійних крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породженні гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [11—16].

Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених (двоскладових і тришарових) та напівобмежених кусково-однорідних просторових областях одержано у працях автора [17—22].

У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в обмежених багатошарових (кусково-однорідних) просторових областях.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \{(t,x,y,z);\, t>0;\, (x,y)\in\Omega_2 = \langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle;$$

$$z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathrm{I}_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} \left(l_{j-1}; l_j\right), l_0 \geq 0; l_{j-1} < l_j; l_{n+1} \equiv l < \infty \left.\vphantom{\bigcup_{j=1}^{n+1}}\right\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь [10]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] u_j + \chi_j^2 u_j = \tag{1}$$
$$= f_j\left(t, x, y, z\right);\ z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0} = g_j^1\left(x, y, z\right);\ \frac{\partial u_j}{\partial t}\bigg|_{t=0} = g_j^2\ \left(x, y, z\right);\ z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1, n+1}; \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) u_1\bigg|_{z=l_0} = g_0\left(t, x, y\right); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) u_{n+1}\bigg|_{z=l} = g_l\left(t, x, y\right); \tag{3}$$

умовами спряження [16]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\bigg|_{z=l_k} = 0;\ j = 1, 2;\ k = \overline{1, n} \tag{4}$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2, де a_{xj}, a_{yj}, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k — деякі невід'ємні сталі; $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0;$

$$c_{1k} c_{2k} > 0; \left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \neq 0; \left|\alpha_{22}^{n+1}\right| + \left|\beta_{22}^{n+1}\right| \neq 0;$$

$$f\left(t, x, y, z\right) = \left\{f_1\left(t, x, y, z\right), f_2\left(t, x, y, z\right), \ldots, f_{n+1}\left(t, x, y, z\right)\right\};$$

$$g^1\left(x, y, z\right) = \left\{g_1^1\left(x, y, z\right), g_2^1\left(x, y, z\right), \ldots, g_{n+1}^1\left(x, y, z\right)\right\};$$

$$g^2\left(x, y, z\right) = \left\{g_1^2\left(x, y, z\right), g_2^2\left(x, y, z\right), \ldots, g_{n+1}^2\left(x, y, z\right)\right\};$$

$g_0\left(t, x, y\right), g_l\left(t, x, y\right)$ — задані обмежені досить гладкі функції; $u\left(t, x, y, z\right) = \left\{u_1\left(t, x, y, z\right),\ \ u_2\left(t, x, y, z\right), \ldots, u_{n+1}\left(t, x, y, z\right)\right\}$ — шукана функція.

Основна частина. Побудуємо розв'язок розглянутої задачі в залежності від структури області Ω_2.

1. $\Omega_2 = \left(-\infty; +\infty\right) \times \left(0; b\right)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial x^k}\bigg|_{x=\pm\infty} = 0;\ k = 0, 1;\ j = \overline{1, n+1} \tag{5}$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)u_j\bigg|_{y=0}=\omega_j^1\left(t,x,z\right);\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)u_j\bigg|_{y=b}=\omega_j^2\left(t,x,z\right);\, j=\overline{1,n+1} \quad (6)$$

щодо змінної y, де $h_k\ (k=1,2)$ — деякі невід'ємні сталі;

$$\omega^1\left(t,x,z\right)=\left\{\omega_1^1\left(t,x,z\right),\omega_2^1\left(t,x,z\right),\ldots,\omega_{n+1}^1\left(t,x,z\right)\right\};$$

$$\omega^2\left(t,x,z\right)=\left\{\omega_1^2\left(t,x,z\right),\omega_2^2\left(t,x,z\right),\ldots,\omega_{n+1}^2\left(t,x,z\right)\right\}$$

задані обмежені досить гладкі функції.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [23; 24; 16].

До задачі (1)—(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $\left(-\infty;+\infty\right)$ щодо змінної x [23]:

$$F_x\left[g\left(x\right)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right)e^{-i\sigma x}dx\equiv\tilde{g}\left(\sigma\right), \quad (7)$$

$$F_x^{-1}\left[\tilde{g}\left(\sigma\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}\left(\sigma\right)e^{i\sigma x}d\sigma\equiv g\left(x\right), \quad (8)$$

$$F_x\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2F_x\left[g\left(x\right)\right]\equiv-\sigma^2\tilde{g}\left(\sigma\right). \quad (9)$$

Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)—(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\left\{\left(t,y,z\right);\, t>0;\, y\in\left(0;b\right);\, z\in K_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_j}{\partial t^2}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{u}_j+\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_j=\tilde{f}_j\left(t,\sigma,y,z\right);\, z\in \mathrm{I}_j \quad (10)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_j\Big|_{t=0}=\tilde{g}_j^1\left(\sigma,y,z\right),\ \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\tilde{g}_j^2\left(\sigma,y,z\right);z\in\mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}; \quad (11)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde{u}_1\bigg|_{z=l_0}=\tilde{g}_0\left(t,\sigma,y\right);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{u}_{n+1}\bigg|_{z=l}=\tilde{g}_l\left(t,\sigma,y\right); \quad (12)$$

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)\tilde{u}_j\right|_{y=0}=\tilde{\omega}_j^1\left(t,\sigma,z\right);\left.\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)\tilde{u}_j\right|_{y=b}=\tilde{\omega}_j^2\left(t,\sigma,z\right) \quad (13)$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1}\right]\right|_{z=l_k}=0;\ j=1,2;k=\overline{1,n}. \quad (14)$$

До задачі (10)—(14) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $\left[0;b\right]$ щодо змінної y [24]:

$$\Lambda_{yk}\left[g\left(y\right)\right]=\int_0^b g\left(y\right)v_k\left(y\right)dy\equiv g_k, \quad (15)$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}\left[g_k\right]=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{v_k\left(y\right)}{\left\|v_k\right\|^2}\equiv g\left(y\right), \quad (16)$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-\gamma_k^2g_k+v_k\left(0\right)\left.\left(-\frac{dg}{dy}+h_1g\right)\right|_{y=0}+v_k\left(b\right)\left.\left(\frac{dg}{dy}+h_2g\right)\right|_{y=b}, \quad (17)$$

де ядро перетворення

$$v_k\left(y\right)=\frac{\gamma_k\cos\left(\gamma_ky\right)+h_1\sin\left(\gamma_ky\right)}{\sqrt{\gamma_k^2+h_1^2}},$$

$$\left\|v_k\right\|^2\equiv\int_0^b v_k^2\left(y\right)dy=\frac{b}{2}+\frac{\left(h_1+h_2\right)\left(\gamma_k^2+h_1h_2\right)}{2\left(\gamma_k^2+h_1^2\right)\left(\gamma_k^2+h_2^2\right)};$$

$\left\{\gamma_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg\left(\gamma b\right)=\frac{\gamma^2-h_1h_2}{\gamma\left(h_1+h_2\right)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайової задачі (10)—(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3''=\left\{\left(t,z\right);t>0;\ z\in K_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_{jk}}{\partial t^2}-a_{zj}^2\frac{\partial^2\tilde{u}_{jk}}{\partial z^2}+\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2\gamma_k^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_{jk}=\tilde{F}_{jk}\left(t,\sigma,z\right);\ j=\overline{1,n+1} \quad (18)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jk}\Big|_{t=0} = \tilde{g}^1_{jk}(\sigma,z);\ \frac{\partial \tilde{u}_{jk}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}^2_{jk}(\sigma,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}; \qquad (19)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha^0_{11}\frac{\partial}{\partial z}+\beta^0_{11}\right)\tilde{u}_{1k}\Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(t,\sigma);\left(\alpha^{n+1}_{22}\frac{\partial}{\partial z}+\beta^{n+1}_{22}\right)\tilde{u}_{n+1,k}\Big|_{z=l} = \tilde{g}_{lk}(t,\sigma) \qquad (20)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha^m_{j1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta^m_{j1}\right)\tilde{u}_{mk}-\left(\alpha^m_{j2}\frac{\partial}{\partial z}+\beta^m_{j2}\right)\tilde{u}_{m+1,k}\right]\Big|_{z=l_m} = 0;\ j=1,2;\ m=\overline{1,n}, \qquad (21)$$

де

$$\tilde{F}_{jk}(t,\sigma,z) = \tilde{f}_{jk}(t,\sigma,z)+a^2_{yj}v_k(0)\tilde{\omega}^1_j(t,\sigma,z)+a^2_{yj}v_k(b)\tilde{\omega}^2_j(t,\sigma,z).$$

До задачі (18)—(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0;l]$ з n точками спряження щодо змінної z [16]:

$$F_{jn}[g(z)] = \int_{l_0}^{l} g(z)V(z,\lambda_j)\sigma(z)dz \equiv g_j, \qquad (22)$$

$$F^{-1}_{jn}[g_j] = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{V(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2} \equiv g(z), \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} F_{jn}\left[\sum_{j=1}^{n+1} a^2_{zj}\theta(z-l_{j-1})\theta(l_j-z)\frac{d^2 g}{dz^2}\right] &= \\ = -\lambda^2_j g_j - \sum_{j=1}^{n+1} k^2_j \int_{l_{j-1}}^{l_j} g(z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_j dz &- \\ -a^2_{z1}\sigma_1\left(\alpha^0_{11}\right)^{-1}V_1(l_0,\lambda_j)\left(\alpha^0_{11}\frac{dg}{dz}+\beta^0_{11}g\right)\Big|_{z=l_0} &+ \\ +a^2_{z,n+1}\sigma_{n+1}\left(\alpha^{n+1}_{22}\right)^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_j)\left(\alpha^{n+1}_{22}\frac{dg}{dz}+\beta^{n+1}_{22}g\right)\Big|_{z=l} &. \end{aligned} \qquad (24)$$

У формулах (22)—(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\lambda_j) = \sum_{k=1}^{n+1} V_i(z,\lambda_j)\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z);$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z);$$

$$\sigma_k = \frac{a_{z,k+1}}{a_{zk}^2}\prod_{m=k}^{n} c_{1m}c_{2m};\sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{z,n+1}};$$

$$V_m\left(z,\lambda_j\right) = \prod_{i=m}^{n} c_{2i}q_{i+1,j}G_m\left(z,\lambda_j\right); n = \overline{1,n};$$

$$V_{n+1}\left(z,\lambda_j\right) = \omega_{n2}\left(\lambda_j\right)\cos\left(q_{n+1,j}z\right) - \omega_{n1}\left(\lambda_j\right)\sin\left(q_{n+1,j}z\right);$$

$$G_m\left(z,\lambda_j\right) = \omega_{m-1,2}\left(\lambda_j\right)\cos\left(q_{mj}z\right) - \omega_{m-1,1}\left(\lambda_j\right)\sin\left(q_{mj}z\right);$$

$$\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2 = \int_{l_0}^{l} V^2\left(z,\lambda_j\right)\sigma\left(z\right)dz = \sum_{k=1}^{n+1}\int_{l_{k-1}}^{l_k} V_k^2\left(z,\lambda_j\right)\sigma_k dz;$$

$$q_s \equiv q_s\left(\lambda\right) = a_{z,s}^{-1}\left(\lambda^2 + k_s^2\right)^{1/2}; q_{sj} = q_s\left(\lambda_j\right);$$

$$v_{ip}^{k1}\left(q_{sj}l_m\right) = -\alpha_{ip}^k q_{sj}\sin\left(q_{sj}l_m\right) + \beta_{ip}^k\cos\left(q_{sj}l_m\right);$$

$$v_{ip}^{k2}\left(q_{sj}l_m\right) = \alpha_{ip}^k q_{sj}\cos\left(q_{sj}l_m\right) + \beta_{ip}^k\sin\left(q_{sj}l_m\right);$$

$$\omega_{01}\left(\lambda_j\right) = v_{11}^{01}\left(q_{1j}l_0\right); \omega_{02}\left(\lambda_j\right) = v_{11}^{02}\left(q_{1j}l_0\right);$$

$$\psi_{pm}^k\left(xy\right) = v_{11}^{kp}\left(x\right)v_{22}^{km}\left(y\right) - v_{21}^{kp}\left(x\right)v_{12}^{km}\left(y\right);$$

$$\omega_{pm}\left(\lambda_j\right) = \omega_{p-1,2}\left(\lambda_j\right)\psi_{1m}^p\left(q_{pj}l_p, q_{p+1,j}l_p\right) - \omega_{p-1,1}\left(\lambda_j\right)\psi_{2m}^p\left(q_{pj}l_p, q_{p+1,j}l_p\right);$$

λ_j — корені трансцендентного рівняння

$$\Delta_n\left(\lambda\right) \equiv v_{22}^{n+1,2}\left(q_{n+1}l\right)\omega_{n1}\left(\lambda\right) - v_{22}^{n+1,1}\left(q_{n+1}l\right)\omega_{n2}\left(\lambda\right) = 0,$$

які утворюють дискретний спектр; $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1\left(\sigma,\gamma_k\right)\right)\tilde{u}_{1k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2\left(\sigma,\gamma_k\right)\right)\tilde{u}_{2k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z,n+1}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}\left(\sigma,\gamma_k\right)\right)\tilde{u}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \tilde{F}_{2k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{F}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1k}(t,\sigma,z) \\ \tilde{u}_{2k}(t,\sigma,z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,k}(t,\sigma,z) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^1_{1k}(\sigma,z) \\ \tilde{g}^1_{2k}(\sigma,z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{g}^1_{n+1,k}(\sigma,z) \end{bmatrix}; \frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1k}(t,\sigma,z) \\ \tilde{u}_{2k}(t,\sigma,z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,k}(t,\sigma,z) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^2_{1k}(\sigma,z) \\ \tilde{g}^2_{2k}(\sigma,z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{g}^2_{n+1,k}(\sigma,z) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де

$$q_j^2(\sigma,\gamma_k) = a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Інтегральний оператор F_{jn}, який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1}\dots V_1(z,\lambda_j)\sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2}\dots V_2(z,\lambda_j)\sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{l}\dots V_{n+1}(z,\lambda_j)\sigma_{n+1}dz\right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda_j^2+q_i^2(\sigma,\gamma_k)+k_i^2\right)\tilde{u}_{ikj}(t,\sigma) = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{F}_{ikj}(t,\sigma) - \sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}\times$$
$$\times V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma) + \sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}(t,\sigma), \quad (28)$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{u}_{ikj}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}^1_{ikj}(\sigma);\ \frac{d}{dt}\left.\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{u}_{ikj}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}^2_{ikj}(\sigma), \quad (29)$$

де

$$\tilde{u}_{ikj}(t,\sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{u}_{ik}(t,\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz;\ i=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{F}_{ikj}(t,\sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{F}_{jk}(t,\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_j dz;\ i=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{g}^1_{ikj}(\sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{g}^1_{ik}(\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz;\ i=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{g}^2_{ikj}(\sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{g}^2_{ik}(\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz;\ i=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2, q_2^2, \dots \dots q_{n+1}^2\right\} = q_1^2$ і покладемо всюди $k_i^2 = q_1^2 - q_i^2\ \left(i=\overline{1,n+1}\right)$. Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{u}_{kj}}{dt^2}+\Delta^2\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)\tilde{u}_{kj}=\tilde{F}_{kj}\left(t,\sigma\right)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}\times$$
$$\times V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\tilde{g}_{0k}\left(t,\sigma\right)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{g}_{jk}\left(t,\sigma\right), \tag{30}$$

$$\tilde{u}_{kj}\Big|_{t=0}=\tilde{g}_{kj}^1\left(\sigma\right),\ \frac{d\tilde{u}_{kj}}{dt}\Big|_{t=0}=\tilde{g}_{kj}^2\left(\sigma\right), \tag{31}$$

де $\tilde{u}_{kj}\left(t,\sigma\right)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\tilde{u}_{ikj}\left(t,\sigma\right)$; $\Delta^2\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)\lambda_j^2+a_{x1}\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_k^2\chi_1^2$;

$$\tilde{F}_{kj}\left(t,\sigma\right)=\sum_{i=1}^{n+1}F_{ikj}\left(t,\sigma\right),\ \tilde{g}_{kj}^1\left(\sigma\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{ikj}^1\left(\sigma\right),\ \tilde{g}_{kj}^2\left(\sigma\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{ikj}^2\left(\sigma\right).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв’язком задачі (30), (31) є функція

$$\tilde{u}_{kj}\left(t,\sigma\right)=\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)}\tilde{g}_{kj}^2\left(\sigma\right)+\frac{d}{dt}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)}\tilde{g}_{kj}^1\left(\sigma\right)+$$
$$+\int_0^t\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)\left(t-\tau\right)\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)}\Big[\tilde{F}_{kj}\left(\tau,\sigma\right)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\times \tag{32}$$
$$\times\tilde{g}_{0k}\left(\tau,\sigma\right)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{g}_{lk}\left(\tau,\sigma\right)\Big]d\tau.$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1}, зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}\left[\ldots\right]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\cdots\dfrac{V_1\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\cdots\dfrac{V_2\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\cdots\dfrac{V_{n+1}\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\end{bmatrix}. \tag{33}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_{kj}(t,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{u}_{kj}(t,\sigma)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний розв'язок початково-крайової задачі (18)—(21):

$$\tilde{u}_{ik}(t,\sigma,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)}\tilde{g}_{kj}^{2}(\sigma)+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)}\tilde{g}_{kj}^{1}(\sigma)+$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\beta\right)(t-\tau)\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\beta\right)}\times\left[\tilde{F}_{kj}(\tau,\sigma)-\sigma_1 a_{z1}^{2}\left(\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\times\right. \tag{34}$$

$$\left.\left.\times\tilde{g}_{0k}(\tau,\sigma)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^{2}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{g}_{lk}(\tau,\sigma)\right]d\tau\right\}\times$$

$$\times\frac{V_i\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2};i=\overline{1,n+1}.$$

До функцій $\tilde{u}_{ik}(t,\sigma,z)$, визначених формулами (34), послідовно застосуємо обернені оператори Λ_{yk}^{-1} за правилом (16) та F_x^{-1} за правилом (8). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j(t,x,y,z)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{b}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{b}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)g_k^{1}(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{b}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)g_k^{2}(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+ \tag{35}$$

$$+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{b}\left[W_i^{1}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)+\right.$$

$$\left.+W_i^{2}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_l(\tau,\xi,\eta)\right]d\xi d\eta d\tau+$$

$$+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}\Big[W_{yjk}^1\left(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta\right)\omega_k^1\left(\tau,\xi,\zeta\right)+$$

$$+W_{yik}^2\left(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta\right)\omega_k^2\left(\tau,\xi,\zeta\right)\Big]\sigma_k d\xi d\zeta d\tau; i=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1)—(6).

У формулах (35) застосовано компоненти

$$E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_r,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_r,\lambda_j\right)}\times$$

$$\times\frac{V_i\left(z,\lambda_j\right)V_k\left(\zeta,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\cos\left(\left|x-\xi\right|\sigma\right)\frac{v_r\left(y\right)v_r\left(\eta\right)}{\left\|v_r\right\|^2}d\sigma; i,k=\overline{1,n+1}$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти

$$W_i^1\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)=-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{i1}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0\right)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), компоненти

$$W_i^2\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)=\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{i,n+1}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,l\right)$$

верхньої аплікатної матриці Гріна, компоненти

$$W_{yik}^1\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,\xi,y,0,z,\zeta\right)$$

лівої ординатної матриці Гріна та компоненти

$$W_{yik}^2\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,\xi,y,b,z,\zeta\right)$$

правої ординатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_i^s\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)$, $W_{yik}^s\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right),\left(s=1,2\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_i\left(t,x,y,z\right)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [25].

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2=a_{yj}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2>0$ формули (35) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)—(6) в ізотропному (*n+1*) — шаровому обмеженому за координатою *z* просторовому середовищі.

Зауваження 2. Параметри α_{11}^0, $\beta_{11}^0;\alpha_{22}^{n+1}$, β_{22}^{n+1} дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $z = l_0, z = l$ крайової умови 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 3. Параметри $h_j\left(j = 1,2\right)$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $y = 0; y = b$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 4. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(t,x,y,z\right), g_j^1\left(x,y,z\right), g_j^2\left(x,y,z\right)$, $g_0\left(t,x,y\right)$, $g_l\left(t,x,y\right), \omega_j^1\left(t,x,z\right), \omega_j^2\left(t,x,z\right)$ проводиться безпосередньо.

2. $\Omega_2 = \left(0;+\infty\right)\times\left(0;+\infty\right)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)u_j\bigg|_{x=0} = \theta_j\left(t,y,z\right); \left.\frac{\partial^k u_j}{\partial x^k}\right|_{x=+\infty} = 0; k = 0,1 j = \overline{1,n+1} \quad (36)$$

щодо змінної *x* та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+h\right)u_j\bigg|_{y=0} = \omega_j\left(t,x,z\right); \left.\frac{\partial^k u_j}{\partial y^k}\right|_{y=+\infty} = 0; k = 0,1 j = \overline{1,n+1} \quad (37)$$

щодо змінної y, де p, h — деякі невід'ємні сталі;

$$\theta\left(t,y,z\right) = \left\{\theta_1\left(t,y,z\right), \theta_2\left(t,y,z\right), \ldots, \theta_{n+1}\left(t,y,z\right)\right\};$$

$$\omega\left(t,x,z\right) = \left\{\omega_1\left(t,x,z\right), \omega_2\left(t,x,z\right), \ldots, \omega_{n+1}\left(t,x,z\right)\right\}$$

задані обмежені неперервні функції.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(4), (36), (37) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень.

До задачі (1)—(4), (36), (37) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $\left(0;+\infty\right)$ щодо змінної x [24]:

$$F_{+x}\left[g\left(x\right)\right] = \int_0^{+\infty} g\left(x\right)K_x\left(x,\sigma\right)dx \equiv \tilde{g}\left(\sigma\right), \quad (38)$$

$$F_{+x}^{-1}\left[\tilde{g}\left(\sigma\right)\right] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}\left(\sigma\right)K_x\left(x,\sigma\right)d\sigma \equiv g\left(x\right), \quad (39)$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2 g}{dx^2}\right] = -\sigma^2\tilde{g}\left(\sigma\right) + K_x\left(0,\sigma\right)\left(-\frac{dg}{dx}+pg\right)\bigg|_{x=0}, \quad (40)$$

де ядро перетворення

$$K_x(x,\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma\cos(\sigma x)+p\sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2+p^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (38) внаслідок тотожності (40) початково-крайовій задачі (1)—(4), (36), (37) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \{(t,y,z);\, t>0;\, y\in(0;+\infty);$ $z\in \mathrm{I}_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_j}{\partial t^2}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{u}_j+\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_j= \\ =\tilde{F}_j(t,\sigma,y,z);\, z\in \mathrm{I}_j;\, j=\overline{1,n+1} \tag{41}$$

з початковими умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)\tilde{u}_j\Big|_{y=0}=\tilde{\omega}_j(t,\sigma,z);\quad \frac{\partial^k\tilde{u}_j}{\partial y^k}\Big|_{y=+\infty}=0;\, k=0,1;\, j=\overline{1,n+1} \tag{42}$$

та умовами спряження (14), де

$$\tilde{F}_j(t,\sigma,y,z)=\tilde{f}_j(t,\sigma,y,z)+a_{xj}^2K_x(0,\sigma)\theta_j(t,y,z);\, j=\overline{1,n+1}.$$

До задачі (41), (11), (12), (42), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0;+\infty)$ щодо змінної y [24]:

$$F_{+y}[g(y)]=\int_0^{+\infty} g(y)K_y(y,s)\,dy\equiv\tilde{g}(s), \tag{43}$$

$$F_{+y}^{-1}[\tilde{g}(s)]=\int_0^{+\infty}\tilde{g}(s)K_y(y,s)\,ds\equiv g(y), \tag{44}$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2\tilde{g}(s)+K_y(0,s)\left(-\frac{dg}{dy}+hg\right)\Big|_{y=0}, \tag{45}$$

де ядро перетворення

$$K_y(y,s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s\cos(sy)+h\sin(sy)}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (43) внаслідок тотожності (45) початково-крайовій задачі (41), (11), (12), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3''=\{(t,z);\, t>0;\, z\in\mathrm{I}_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{u}}_j}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{u}}_j}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2\right) \tilde{\tilde{u}}_j = \tilde{\tilde{G}}_j\left(t, \sigma, s, z\right); \, z \in \mathrm{I}_j \quad (46)$$

з початковими умовами

$$\tilde{\tilde{u}}_j\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_j^1\left(\sigma, s, z\right); \frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_j}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_j^2\left(\sigma, s, z\right); z \in \mathrm{I}_j; \, j = \overline{1, n+1} \qquad (47)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) \tilde{\tilde{u}}_1\Bigg|_{z=l_0} = \tilde{\tilde{g}}_0\left(t, \sigma, s\right); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) \tilde{\tilde{u}}_{n+1}\Bigg|_{z=l} = \tilde{\tilde{g}}_l\left(t, \sigma, s\right) \quad (48)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right) \tilde{\tilde{u}}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right) \tilde{\tilde{u}}_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k} = 0; \, k = \overline{1, n}; \; j = 1, 2, \qquad (49)$$

де

$$\tilde{\tilde{G}}_j\left(t, \sigma, s, z\right) = \tilde{\tilde{F}}_j\left(t, \sigma, s, z\right) + a_{yj}^2 K_y\left(0, s\right) \tilde{\omega}_j\left(t, \sigma, z\right); \, j = \overline{1, n+1}.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (46)—(49) збігається із задачею (18)—(21). Отже, відповідно до формул (34), єдиний розв’язок задачі (46)—(49) визначають функції

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{u}}_i\left(t, \sigma, s, z\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \Bigg\{ & \frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma, s, \lambda_j\right) t\right)}{\Delta\left(\sigma, s, \lambda_j\right)} \tilde{\tilde{g}}_j^2\left(\sigma, s\right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma, s, \lambda_j\right) t\right)}{\Delta\left(\sigma, s, \lambda_j\right)} \tilde{\tilde{g}}_j^1\left(\sigma, s\right) + \int_0^t \frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma, s, \lambda_j\right)\left(t - \tau\right)\right)}{\Delta\left(\sigma, s, \lambda_j\right)} \times \\
& \times \Big[\tilde{\tilde{G}}_j\left(\tau, \sigma, s\right) - \sigma_1 a_{z1}^2 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1\left(l_0, \lambda_j\right) \tilde{\tilde{g}}_0\left(\tau, \sigma, s\right) + \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 \times \\
& \times \left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}\left(l, \lambda_j\right) \tilde{\tilde{g}}_l\left(\tau, \sigma, s\right) \Big] d\tau \Bigg\} \frac{V_i\left(z, \lambda_j\right)}{\left\| V\left(z, \lambda_j\right) \right\|^2}; i = \overline{1, n+1}.
\end{aligned} \qquad (50)$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{u}}_i\left(t, \sigma, s, z\right)$, визначених формулами (50), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_{+x}^{-1}, одержуємо функції

$$u_j\left(t, x, y, z\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}\left(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta\right) f_k\left(\tau, \xi, \eta, \zeta\right) \sigma_k \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \, d\tau +$$

$$
\begin{gathered}
+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^1\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta +\\
+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^2\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta +\\
+\int_{0}^{t}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\Big[W_i^1\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z\right)g_0\left(\tau,\xi,\eta\right)+\\
+W_i^2\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z\right)g_l\left(\tau,\xi,\eta\right)\Big]d\xi d\eta d\tau +\\
+a_{xi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_{0}^{t}\int_{0}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{xik}\left(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta\right)\theta_k\left(\tau,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\eta d\zeta d\tau +\\
+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_{0}^{t}\int_{0}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yik}\left(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta\right)\omega_k\left(\tau,\xi,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\zeta d\tau; i=\overline{1,n+1},
\end{gathered}
\tag{51}
$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1)—(4), (36), (37).

У формулах (51) застосовано компоненти

$$
E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\lambda_j\right)}\times
$$

$$
\times\frac{V_i\left(z,\lambda_j\right)V_k\left(\xi,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}K_x\left(x,\sigma\right)K_x\left(\xi,\sigma\right)K_y\left(y,s\right)K_y\left(\eta,s\right)d\sigma ds; i,k=\overline{1,n+1}
$$

матриці впливу, компоненти $W_j^s\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right),\left(s=1,2\right)$ аплікатних матриць Гріна, компоненти

$$
W_{xik}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,0,y,\eta,z,\zeta\right)
$$

абсцисної матриці Гріна та компоненти

$$
W_{yik}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,\xi,y,0,z,\zeta\right)
$$

ординатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_i^s\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)$, $W_{xik}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right)$, $W_{yik}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_i\left(t,x,y,z\right)$, визначені формулами (51), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (36), (37) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [25].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1—2 поширюються на випадок розглянутої гіперболічної крайової задачі; 2) параметри p, h дають можливість виділяти із формул (51) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $x = 0; y = 0$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (51) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, x, y, z), g_j^1(x, y, z), g_j^2(x, y, z)$, $g_0(t, x, y), g_l(t, x, y), \theta_j(t, x, z), \omega_j(t, x, z)$ проводиться безпосередньо.

Висновки. Методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень Фур'є у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в обмежених кусково-однорідних просторових областях, які описуються декартовою системою координат. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

Список використаних джерел:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
2. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. — М. : ИЛ, 1957. — 256 с.
4. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1966. — 292 с.
6. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
7. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
9. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
10. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
11. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.

12. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
13. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
14. Громик А. П. Стаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка — Світ, 2008. — 120 с.
15. Громик А. П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2009. — 120 с.
16. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
17. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових просторових областях / І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2010. — Вип. 19, ч. 1. — С. 47–59.
18. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених двоскладових просторових областях / І. М. Конет // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 3. — С. 55–71.
19. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Львів, 2011. — 48 с. — (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11).
20. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях / І. М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 127–140.
21. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях / І. М. Конет // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 4. — С. 36–54.
22. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених багатошарових просторових областях / І. М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2012. — Вип. 6. — С. 130–143.
23. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
24. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 60 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
25. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

The method of influence functions and Green's function (key solutions), integral image of the exact analytical solutions of algorithmic nature of hyperbolic boundary value problems in multi napivobmezhenyh (piecewise-homogeneous) spatial regions. To build a major integrated solutions involving the appropriate Fourier transform to Cartesian axes, and pivosi segment and integral Fourier transformation to Cartesian segment with n points of conjugation.

Key words: *hyperbolic equations, initial and boundary conditions, coupling conditions, integral transformation, major interchanges.*

Отримано: 24.01.2013

УДК 517.532.2

М. П. Ленюк*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. І. Шинкарик**, канд. фіз.-мат. наук

*Чернівецький факультет національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці
**Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

СКІНЧЕННЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ФУР'Є-ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ НА КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СЕГМЕНТІ

На трискладовому сегменті $[R_0, R_3]$ полярної осі побудовано інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором Фур'є-Лежандра-Бесселя. Явно виписано власні елементи цього оператора.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, спектральна задача, фундаментальна система розв'язків, власні елементи.*

Вступ. Інтегральні перетворення Фур'є, Ганкеля першого та другого роду, Лежандра першого та другого роду, Мелліна та ін., запроваджені за власними елементами відповідних диференціальних операторів другого порядку, побудованих методом регулярної спектральної задачі Штурма-Ліувілля на однорідному сегменті, дозволили алгебраїзувати або параметризувати лінійні диференціальні оператори Ейлера, Бесселя, Фур'є, Лежандра та ін. в задачах математичної фізики однорідних середовищ. До середини XX-го століття був створений достатньо ефективний математичний апарат побудови інтегрального зображення аналітичних розв'язків основних задач математичної фізики однорідних середовищ. З інтенсивним впровадженням у виробництво в другій половині XX століття композитних матеріалів виникла необхідність у вивченні в першу чергу їх фізико-технічних характеристик. Це привело до задач