

In this work we are investigated convergence of the finite element method of on lattices with cells in the form of octahedra and approximation's qualities of the piecewise linear coordinate functions on this carrier.

Key words: *octahedron, tetrahedron, piece wise linear coordinate functions, order of approximation, convergence in the mean-square.*

Отримано: 19.04.2013

УДК 004.942:519.876.5

Б. Б. Нестеренко^{*}, д-р техн. наук, професор,

М. А. Новотарський[†], д-р техн. наук, с.н.с.,

О. Б. Нестеренко^{**}, канд. фіз.-мат. наук

^{*}Інститут математики НАН України, м. Київ,

^{**}Національний університет технологій і дизайну, м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ ПРИ ПЕРИСТАЛЬТИЧНИХ КОЛИВАННЯХ

Наведено основні принципи побудови нестационарної математичної моделі руху рідини під дією перистальтичних коливань. Для реалізації моделі на паралельних обчислювальних системах запропоновано використання паралельного локально-асинхронного методу. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: *математична модель, локально-асинхронний метод, перистальтичний процес, триплекс.*

Вступ. Рух рідин в живих організмах найчастіше відбувається за рахунок руху обмежуючих поверхонь. Такі рухи поверхонь називають перистальтичними коливаннями. Головними системами організму людини, що використовують цей механізм переміщення рідин, є серцево-судинна та травна системи. Перистальтичні коливання також широко використовуються в техніці при створенні систем перекачування хімічно-активних речовин та у медицині для перекачування крові.

Дослідження фізичних процесів, що відбуваються при перистальтичних коливаннях мають велику актуальність. Адже знання властивостей біологічних систем дає можливість пояснити причини та попередити виникнення тих чи інших патологічних станів цих систем. Результати таких досліджень також можуть бути використані як рекомендації при оперативних втручаннях з метою забезпечення правильного функціонування систем організму шляхом модифікації фізичних параметрів.

Математичне моделювання сьогодні є одним із найбільш ефективних та економічно обґрунтованих способів дослідження перистальтичних процесів, які відбуваються в організмі людини. Цим пояс-

нюється наявність великої кількості математичних моделей, в основі яких лежать різні математичні підходи. Перші математичні моделі описували рух рідин у двовимірному просторі засобами класичної механіки рідин [1]. Сучасний рівень розвитку обчислювальної техніки дозволив значно підвищити точність результатів моделювання шляхом дослідження тривимірних моделей зі скінченною довжиною трубочато-го об'єкта. Такі моделі є нестационарними і об'єкт їх дослідження може характеризуватись як складний фізичний процес. У цій статті дано короткий огляд методів та засобів математичного моделювання, що дозволили створити та дослідити тривимірні математичні моделі трубочатих об'єктів з різними видами перистальтичних коливань.

Постановка задачі. Математична модель перистальтичного процесу описує рух рідини в порожнистому об'єкті як ламінарний потік в'язкої нестисливої рідини з обмеженнями у часі $t \in [0, T]$ та просторі $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Метою моделювання є визначення поля швидкостей $\vec{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ та тиску $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ у заданій області Ω , для яких взаємна залежність та залежність від граничних умов визначається системою рівнянь, що складається з рівняння Нав'є-Стокса та рівняння неперервності потоку:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_y, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} + F_z, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де ρ — густина, η — динамічна в'язкість, \vec{F} — поле об'ємних сил.

Також задамо початкові значення швидкостей при $t = 0$:

$$u = u_0(x, y, z) = 0; v = v_0(x, y, z) = 0; w = w_0(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

Граничні умови задають значення шуканої змінної в безпосередній близькості до поверхні при відсутності ковзання уздовж поверхні. Стінки поверхні форми рухаються зі швидкістю, напрямком вектора якої збігається з нормаллю n до осі z , а величина модуля U_n визначається функцією:

$$U_n(t, z, \delta, \varphi, \lambda, \gamma) = U_{\max} \cdot U_t(t, \lambda) \cdot U_z(z, \delta, \varphi, \gamma), \quad (3)$$

де U_{\max} — максимальне значення модуля швидкості, λ — період зміни у часі швидкості деформації, δ — порядковий номер просторового кроку, γ — величина кроку зсуву деформації уздовж осі, φ — період деформації уздовж осі.

Складова функції, що описує зміну модуля швидкості у часі, визначається з виразу:

$$U_t(t, \lambda) = \sin^2\left(\frac{\pi t}{\lambda}\right). \quad (4)$$

Два періоди функції U_t утворюють повний цикл коливання поверхні. Перший період відповідає росту деформації обмежувальної поверхні порожнистого об'єкта, а другий період описує процес повернення деформованої поверхні до первісного стану. Графік складової функції зміни у часі модуля швидкості U_t показаний на рис. 1.

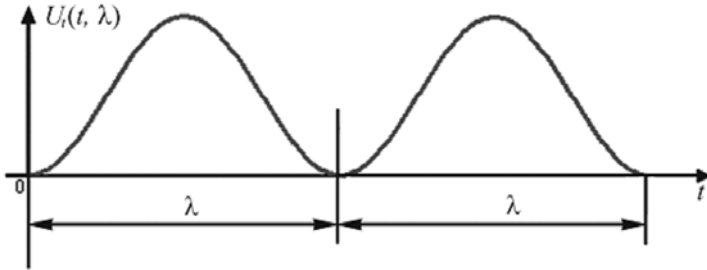


Рис. 1. Складова зміни у часі швидкості деформації поверхні при перистальтичних коливаннях

Просторовий крок δ змінюється в часі у відповідності з виразом $\delta = \left\lfloor \frac{t}{\lambda} \right\rfloor$.

Просторова складова $U_z(z, \delta, \varphi, \gamma)$ описує форму перистальтичних коливань. При переміщенні рідини за рахунок просування уздовж осі z зон стиску й розширення, просторова складова $U_z(z, \delta, \varphi, \gamma)$ має вигляд:

$$U_z(z, \delta, \varphi, \gamma) = \begin{cases} U_z(z, \varphi, \gamma), & \delta = 0, \\ U_z(z, \delta, \varphi, \gamma), & 0 < \delta < \delta_{\max}, \\ U_z(z, \delta_{\max}, \varphi, \gamma), & \delta_3 = \delta_{\max}. \end{cases} \quad (5)$$

Запишемо вираз просторової складової функції $U_n(t, z, \delta, \varphi, \lambda, \gamma)$ для початкової стадії коливань при $\delta = 0$:

$$U_z(z, \delta_1, \varphi, \gamma) = \begin{cases} -\sin^2\left(\frac{\pi z}{\varphi}\right) \text{ при } 0 \leq z < \frac{\varphi}{2}, \\ -\sin\left(\frac{\pi z}{\varphi}\right) \text{ при } \frac{\varphi}{2} \leq z < \frac{3\varphi}{2}, \\ \sin^2\left(\frac{\pi z}{\varphi}\right) \text{ при } \frac{3\varphi}{2} \leq z < 2\varphi. \end{cases}$$

У випадку поточного процесу коливань при $0 < \delta < \delta_{\max}$, просторова складова функції $U_n(t, z, \delta, \varphi, \lambda, \gamma)$ матиме вигляд:

$$U_z(z, \delta_1, \varphi, \gamma) = \begin{cases} -\sin^2\left(\frac{\pi z}{\varphi} - \delta\gamma\right) + \sin^2\left(\frac{\pi z}{\varphi} - (\delta+1)\gamma\right) \text{ при } 0 \leq z < \frac{\varphi}{2}, \\ -\sin\left(\frac{\pi z}{\varphi} - \delta\gamma\right) + \sin\left(\frac{\pi z}{\varphi} - (\delta+1)\gamma\right) \text{ при } \frac{\varphi}{2} \leq z < \frac{3\varphi}{2}, \\ \sin^2\left(\frac{\pi z}{\varphi} - \delta\gamma\right) - \sin^2\left(\frac{\pi z}{\varphi} - (\delta+1)\gamma\right) \text{ при } \frac{3\varphi}{2} \leq z < 2\varphi. \end{cases}$$

Просторова складова фінальної стадії коливань при $\delta = \delta_{\max}$, представлена виразом:

$$U_z(z, \delta_1, \varphi, \gamma) = \begin{cases} -\sin^2\left(\frac{\pi z}{\varphi} - \delta\gamma\right) \text{ при } 0 \leq z < \frac{\varphi}{2}, \\ -\sin\left(\frac{\pi z}{\varphi} - \delta\gamma\right) \text{ при } \frac{\varphi}{2} \leq z < \frac{3\varphi}{2}, \\ \sin^2\left(\frac{\pi z}{\varphi} - \delta\gamma\right) \text{ при } \frac{3\varphi}{2} \leq z < 2\varphi. \end{cases}$$

Графік змін просторової складової U_z , представленої виразом (5), показано на рис. 2.

Основна частина. Для чисельного розв'язування крайової задачі (1)—(5) виконаємо дискретизацію системи рівнянь (1) та граничних умов.

Для цього просторові частинні похідні конвекційного терму

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

замінімо відповідними центральними різницями.

Просторові похідні тиску замінімо різницями:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i,j,k} = \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{\delta x},$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{i,j,k} = \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{\delta y}, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right]_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{\delta z}.$$

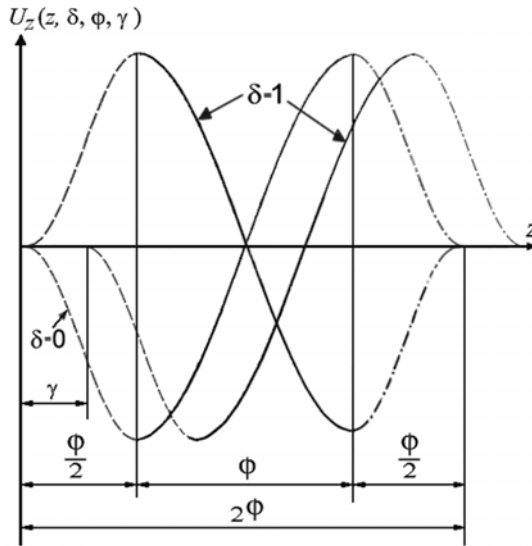


Рис. 2. Просторова складова зміни швидкості деформації поверхні при перистальтичних коливаннях

Другі похідні

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right),$$

що формують дифузійний терм, представимо центральними різницями відповідних перших похідних.

Для однозначного визначення граничних умов необхідно, в загальному випадку, задати множини значень на границях області:

$$\left\{ (u_{0,j,k}, u_{i_{\max},j,k}) \mid j = 1, \dots, j_{\max}; k = 1, \dots, k_{\max} \right\},$$

$$\left\{ (v_{i,0,k}, v_{i,j_{\max},k}) \mid i = 1, \dots, i_{\max}; k = 1, \dots, k_{\max} \right\},$$

$$\left\{ (w_{i,j,0}, w_{i,j,k_{\max}}) \mid i = 1, \dots, i_{\max}; j = 1, \dots, j_{\max} \right\},$$

а також множини значень за границями області:

$$\left\{ \left\{ \left(u_{i,0,k}, u_{i,j_{\max}+1,k} \right) \mid i=1, \dots, i_{\max}; k=1, \dots, k_{\max} \right\}, \right. \\ \left\{ \left\{ \left(u_{i,j,0}, u_{i,j,k_{\max}+1} \right) \mid i=1, \dots, i_{\max}; j=1, \dots, j_{\max} \right\}, \right. \\ \left\{ \left\{ \left(v_{0,j,k}, v_{i_{\max}+1,j,k} \right) \mid j=1, \dots, j_{\max}; k=1, \dots, k_{\max} \right\}, \right. \\ \left\{ \left\{ \left(v_{i,j,0}, v_{i,j,k_{\max}+1} \right) \mid i=1, \dots, i_{\max}; j=1, \dots, j_{\max} \right\}, \right. \\ \left\{ \left\{ \left(w_{0,j,k}, w_{i_{\max}+1,j,k} \right) \mid j=1, \dots, j_{\max}; k=1, \dots, k_{\max} \right\}, \right. \\ \left. \left. \left\{ \left\{ \left(w_{i,0,k}, w_{i,j_{\max}+1,k} \right) \mid i=1, \dots, i_{\max}; k=1, \dots, k_{\max} \right\} \right\} \right\} \right\}.$$

Вибір вказаних точок в якості граничних прямо впливає зі способу дискретизації термів конвекції, дифузії та тиску.

При дискретизації рухомої границі нормальна складова значення швидкості рідини в точках, що співпадають з границею області, дорівнює швидкості границі:

$$u_{0,j,k} = U_{0,j,k}, u_{i_{\max},j,k} = U_{i_{\max},j,k}, j=1, \dots, j_{\max}, k=1, \dots, k_{\max}, \\ v_{i,0,k} = V_{i,0,k}, v_{i,j_{\max},k} = V_{i,j_{\max},k}, i=1, \dots, i_{\max}, k=1, \dots, k_{\max}, \\ w_{i,j,0} = W_{i,j,0}, w_{i,j,k_{\max}} = W_{i,j,k_{\max}}, i=1, \dots, i_{\max}, j=1, \dots, j_{\max},$$

де $U_{0,j,k}, U_{i_{\max},j,k}, V_{i,0,k}, V_{i,j_{\max},k}, W_{i,j,0}, W_{i,j,k_{\max}}$ — функції швидкості рухомої границі.

При дискретизації вхідного потоку нормальна і тангенціальна складова вхідного потоку визначається з виразів, що співпадають з виразами для рухомої границі. Головною відмінністю вхідного потоку є той факт, що в даному випадку положення границі у просторі залишається незмінним.

При застосуванні граничних умов вихідного потоку нормальна і тангенціальна частинні похідні в даних точках простору дорівнюють нулю, що зумовлено відсутністю зміни швидкості потоку рідини при наближенні до границі згаданого типу. У випадку дискретного вихідного потоку цей факт може бути представлений шляхом встановлення на границі значень таких параметрів потоку рідини, які дорівнюють параметрам рідини в найближчих точках області.

Обчислення дискретизованої крайової задачі почнемо з моменту часу $t_0 = 0$ з початковими значеннями змінних u, v, w та p і представимо у вигляді послідовного циклічного процесу, що полягає у розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному часовому рівні з кроком дискретизації δt .

Різницеву схему на часовому рівні $(n+1)$ сформуємо як результат застосування методу Ейлера, що використовує різниці рівняння першого порядку:

$$\begin{aligned}
 u(n+1) &= u(n) + \delta t \left[\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right], \\
 v(n+1) &= v(n) + \delta t \left[\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right], \\
 w(n+1) &= v(n) + \delta t \left[\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} + F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right].
 \end{aligned}$$

Введемо заміну:

$$\begin{aligned}
 A &= u(n) + \delta t \left[\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + F_x \right], \\
 B &= v(n) + \delta t \left[\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_y \right], \\
 C &= w(n) + \delta t \left[\frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} + F_z \right].
 \end{aligned}$$

Враховуючи той факт, що значення $A(n), B(n), C(n)$ асоційовані з часовим рівнем n , з різницевих рівнянь випливають співвідношення:

$$\begin{aligned}
 u(n+1) &= A(n) - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p(n+1)}{\partial x}; \quad v(n+1) = B(n) - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p(n+1)}{\partial y}; \\
 w(n+1) &= C(n) - \frac{\delta t}{\rho} \frac{\partial p(n+1)}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Підставивши (6) в рівняння неперервності потоку системи (1), одержимо:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u(n+1)}{\partial x} + \frac{\partial v(n+1)}{\partial y} + \frac{\partial w(n+1)}{\partial z} &= \frac{\partial A(n)}{\partial x} + \frac{\partial B(n)}{\partial y} + \frac{\partial C(n)}{\partial z} - \\
 - \frac{\delta t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p(n+1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(n+1)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p(n+1)}{\partial z^2} \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Після елементарних перетворень рівняння (7) набуває вигляду рівняння Пуассона для тиску на часовому рівні $n+1$:

$$\frac{\partial^2 p(n+1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(n+1)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p(n+1)}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\delta t} \left(\frac{\partial A(n)}{\partial x} + \frac{\partial B(n)}{\partial y} + \frac{\partial C(n)}{\partial z} \right). \tag{8}$$

Виконавши дискретизацію виразів для A, B, C та підставивши їх значення в праву частину рівняння (8), одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i+1,j,k}(n+1) - 2p_{i,j,k}(n+1) + p_{i-1,j,k}(n+1)}{(\delta x)^2} + \\ & + \frac{p_{i,j+1,k}(n+1) - 2p_{i,j,k}(n+1) + p_{i,j-1,k}(n+1)}{(\delta y)^2} + \\ & + \frac{p_{i,j,k+1}(n+1) - 2p_{i,j,k}(n+1) + p_{i,j,k-1}(n+1)}{(\delta z)^2} = \quad (9) \\ & = \frac{\rho}{\delta t} \left(\frac{A_{i,j,k}(n) - A_{i,j,k}(n-1)}{\delta x} + \frac{B_{i,j,k}(n) - B_{i,j,k}(n-1)}{\delta y} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{C_{i,j,k}(n) - C_{i,j,k}(n-1)}{\delta z} \right), \end{aligned}$$

де $i = 1, \dots, i_{\max}$, $j = 1, \dots, j_{\max}$, $k = 1, \dots, k_{\max}$.

З урахуванням відповідних граничних умов дане рівняння може служити базовим рівнянням для застосування чисельних різницьових методів до визначення розподілу тиску в заданій області.

Розв'язування даної крайової задачі потребує виконання значної кількості обчислень, що викликає необхідність застосування сучасних кластерних систем та інших сучасних обчислювальних засобів з метою одержання результатів в реальному часі. Такий підхід потребує розробки спеціальних асинхронних методів, які дозволяють забезпечити високу ефективність паралельних обчислень.

Одні із перших результатів, які заклали основи принципів асинхронних обчислень, відображені в роботі [2], [3], [4]. Основна їх властивість полягає у тому, що ітераційний процес збігається до розв'язку без оновлення всіх компонент вхідного вектора як умови початку чергової обчислювальної стадії [5]. Розглянемо принципи формування ітераційного методу для розв'язування крайових задач математичної фізики на паралельних кластерних системах. Основна особливість підходу, запропонованого в даній статті, полягає в орієнтації на структурну організацію паралельної програмної системи моделювання.

Представимо систему рівнянь (9) у вигляді:

$$L y(x) = f(x), \quad (10)$$

де $L = \{ l_{i,j,k} \mid i = 1, \dots, i_{\max}; j = 1, \dots, j_{\max}; k = 1, \dots, k_{\max} \}$.

Будемо вирішувати крайову задачу чисельним методом, який використовує принципи асинхронності та локальності [4] при паралельних обчисленнях. Кластерну систему для реалізації даного мето-

ду можна представити як скінченну сукупність процесорних вузлів, що реалізують глобальний оператор L . Асинхронна ітераційна послідовність [7] $\{p(m)\}_{t=1}^{\infty}$ векторів $p(m) = \{p_{i,j,k}(m)\}_{i,j,k=1}^{i_{\max}, j_{\max}, k_{\max}} \in \mathbb{R}^3$ формується з виразу:

$$p_{i,j,k}(m+1) = \begin{cases} p_{i,j,k}(m), & (i,j,k) \notin J_m, \\ l_{i,j,k} \begin{pmatrix} p_{i-1,j,k}(s_{i,j,k}^1(m)), p_{i+1,j,k}(s_{i,j,k}^2(m)), \\ p_{i,j-1,k}(s_{i,j,k}^3(m)), p_{i,j+1,k}(s_{i,j,k}^4(m)), \\ p_{i,j,k-1}(s_{i,j,k-1}^5(m)), p_{i,j,k+1}(s_{i,j,k}^6(m)) \end{pmatrix}, & (i,j,k) \in J_m, \end{cases}$$

де $S = \{s_{i,j,k}^i(m) \mid i = 1, \dots, 6; m = 1, 2, \dots\}$ — множина затримок передачі даних у процесорний вузол, що відповідає за обчислення точки дискретизації з координатами (i, j, k) від процесорних вузлів на ітераційному кроці m , $p(0) = \{p_{i,j,k}(0)\}_{i,j,k=1}^{i_{\max}, j_{\max}, k_{\max}}$ — вектор, що визначає початковий стан розподілу тиску.

Додаткові умови, що задають властивості обчислювального процесу:

$$s = \max_{t,y,(i,j,k)} \left| \left(m - s_{i,j,k}^y(m) \right) \right|; \forall y = 1, \dots, 6; i = 1, \dots, i_{\max}; \\ j = 1, \dots, j_{\max}; k = 1, \dots, k_{\max}; s \in \mathbb{N}_0; \\ J = J_m \cup J_{m+1} \cup \dots \cup J_{m+c} = \left\{ (1,1,1), (1,1,2), \dots, (i_{\max}, j_{\max}, k_{\max}) \right\} \\ \exists c \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Різницева схема для локально-асинхронного методу має вигляд:

$$p_{i,j,k}(m+1) = (1-\gamma) p_{i,j,k}(s_{i,j,k}^0(m)) + \\ + \frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha_i^{\min} + \alpha_i^{\max}}{(\delta x)^2} + \frac{\alpha_j^{\min} + \alpha_j^{\max}}{(\delta y)^2} + \frac{\alpha_k^{\min} + \alpha_k^{\max}}{(\delta z)^2} \right)} \times \\ \times \left(\frac{\alpha_i^{\min} p_{i-1,j,k}(s_{i,j,k}^1(m)) + \alpha_i^{\max} p_{i+1,j,k}(s_{i,j,k}^2(m))}{(\delta x)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_j^{\min} p_{i,j-1,k}(s_{i,j,k}^3(m)) + \alpha_j^{\max} p_{i,j+1,k}(s_{i,j,k}^4(m))}{(\delta y)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_k^{\min} p_{i,j,k-1}(s_{i,j,k-1}^5(m)) + \alpha_k^{\max} p_{i,j,k+1}(s_{i,j,k}^6(m))}{(\delta z)^2} \right) \quad (18)$$

$$+ \frac{\alpha_k^{\min} p_{i,j,k-1} \left(s_{i,j,k}^5(m) \right) + \alpha_k^{\max} p_{i,j,k+1} \left(s_{i,j,k}^6(m) \right)}{(\delta z)^2} - f_{i,j,k} \Bigg\},$$

де $\alpha_r^{\min} = \begin{cases} 0, & r = 1, \\ 1, & r > 1, \end{cases}$ $\alpha_r^{\max} = \begin{cases} 1, & r < r_{\max}, \\ 0, & r = r_{\max}, \end{cases}$ $r \in \{i, j, k\}$,

$s_{i,j,k}(t) = \{s_{i,j,k}^0, s_{i,j,k}^1, s_{i,j,k}^2, s_{i,j,k}^3, s_{i,j,k}^4, s_{i,j,k}^5, s_{i,j,k}^6\}$ — множина затримок передачі даних від локальних вузлів:

$$\{\omega_{i,j,k}, \omega_{i-1,j,k}, \omega_{i+1,j,k}, \omega_{i,j-1,k}, \omega_{i,j+1,k}, \omega_{i,j,k-1}, \omega_{i,j,k+1}\};$$

$f_{i,j,k}$ — функція правої частини; γ — релаксаційний параметр, що знаходиться в інтервалі $[0, 2]$. Для даної крайової задачі прийняте значення $\gamma = 1.7$, $m = 1, \dots$ — поточний номер ітерації на часовому кроці τ .

Результати розрахунків. З застосуванням даного методу проведено комплекс досліджень перистальтичних коливань, що виникають в травному тракті організму людини. Такі дослідження мали на меті розробку рекомендацій для покращення показників травлення, що порушуються через оперативне втручання.

У [8] запропоновано спосіб, який дозволяє покращити показники травлення за рахунок зменшення швидкості пасажу рідини та покращення її контакту з внутрішньою поверхнею трубчатої кишки. Для цього змінюють просторову форму кишки як показано на рис. 3 та зменшують інтенсивність перистальтичних рухів.

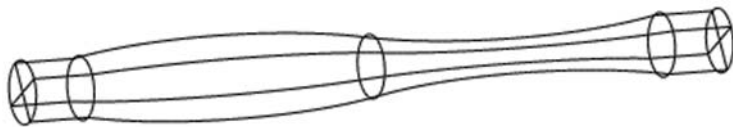


Рис. 3. Просторова форма триплексного коригування

У рамках даної роботи наведемо дослідження продуктивності перистальтичного процесу у триплексному комплексі в залежності від швидкості деформації поверхні. Експерименти проводились при динамічній в'язкості рідини 0.07 Па·с та густині 500 кг/м³. Оскільки з форми триплекса випливає, що максимальне зростання об'єму перистальтичного транспортного потоку відбувається під час деформації звуженої частини триплекса, для зменшення цього негативного ефекту запропоновано зменшити величину деформації поверхні в зоні звуження. В результаті такої модифікації одержано істотне зменшення об'єму транспортного потоку в другій половині модельного часу при фактично повному співпадінні відповідних значень об'єму потоку у першій половині. На рис. 4 показано динаміку об'ємів потоків до і після модифікації.

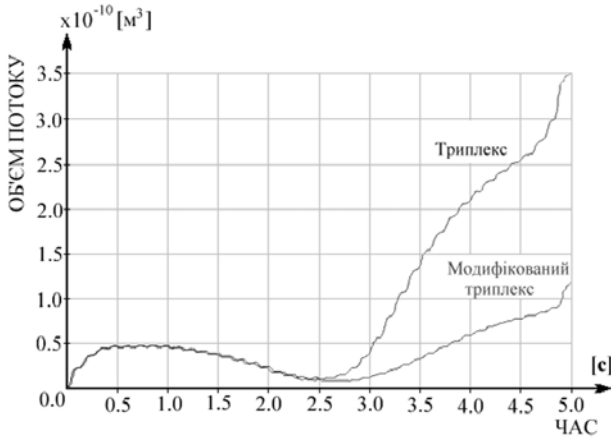


Рис. 4. Графіки зміни об'єму перистальтичного потоку до і після модифікації

Продуктивність перистальтичного транспортного процесу модифікованого триплекса в залежності від швидкості максимальної деформації показана на рис. 5.

З графіка, зображеного на рис. 5, можна зробити висновок про те, що модифікований триплекс не тільки приводить до істотного зменшення об'єму перистальтичного транспортного потоку, а й сприяє відновленню природного процесу травлення за рахунок забезпечення рефлюксу (зворотного току рідини) при невеликих амплітудах деформації поверхні.

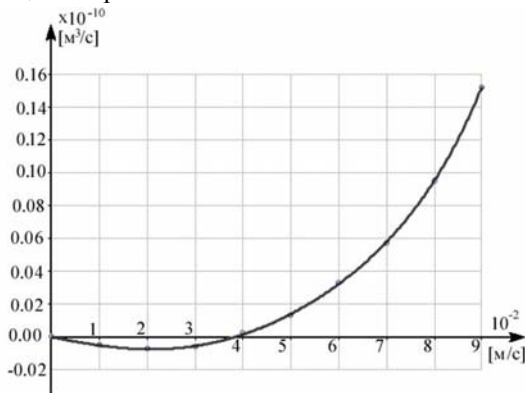


Рис. 5. Графік залежності продуктивності перистальтичного процесу у триплексі від максимальної швидкості деформації поверхні

Математичне моделювання руху рідини на паралельній обчислювальній системі допускає можливість виводу поточних результатів

моделювання в графічному вигляді в ході обчислювального експерименту. Приклади поточного розподілу поля швидкостей та поточного розподілу тиску показані на рис. 6 і рис. 7.

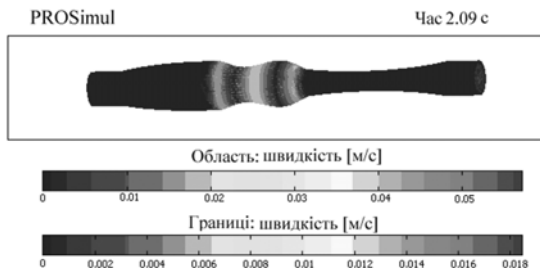


Рис. 6. Приклад графічного відображення поточного стану поля швидкостей у триплексі

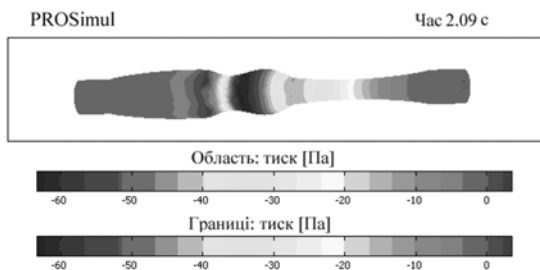


Рис. 7. Приклад графічного відображення поточного стану розподілу тиску у триплексі

Застосування програмної системи моделювання, побудованої по даному методу, для дослідження руху рідини в травному тракті людини дозволило підвищити успішність оперативних втручань на 15%—20% завдяки визначенню кількісних критеріїв вибору параметрів реконструктивної хірургічної операції.

Висновок. Запропонована математична модель руху рідини під дією перистальтичних коливань дозволяє значно підвищити точність одержаних результатів та зменшити час моделювання за рахунок використання локально-асинхронного методу розв'язування крайових задач математичної фізики, орієнтованого на застосування в паралельних обчислювальних системах.

Список використаних джерел:

1. Shapiro A. H. Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number / A. H. Shapiro, M. Y. Jaffrin, S. L. Weinberg // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1969. — Vol. 37, №4. — P. 799–825.
2. Chazan D. Chaotic relaxation / D. Chazan, W. Miranker // *Linear Algebra and Applications*. — 1969. — Vol. 2. — P. 199–222.

3. Baudet G. M. Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessors / G. M. Baudet // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1978. — Vol. 25, №2. — P. 226–244.
4. Baudet G. M. The Design and Analysis of the Algorithms for Asynchronous Multiprocessors / G. M. Baudet // Ph. D. Diss. — Pittsburg : Carnegie-Mellon Univ., PA, 1978. — 182 p.
5. El Tarazi M. N. Some convergence results for asynchronous algorithms / M. N. El Tarazi // Numerische Mathematik. — 1982. — Vol. 39, №3. — P. 325–340.
6. Нестеренко Б. Б. Основы асинхронных методов параллельных вычислений / Б. Б. Нестеренко, В. А. Марчук. — К. : Наукова думка, 1989. — 176 с.
7. Новотарський М. А. Штучні нейронні мережі: обчислення / М. А. Новотарський, Б. Б. Нестеренко. — К. : Інститут математики НАН України, 2004. — 408 с.
8. Исследование основ функционирования и разработка реконструктивных операций на полых органах пищеварительной системы методами математического моделирования / С. П. Жученко, А. П. Жученко, Г. Я. Костюк, Б. Б. Нестеренко. — Винница : Вингосмедуниверситет, 1996. — 385 с.

The basic principles of unsteady mathematical model of the fluid flow under the action of peristaltic fluctuations are presented. The parallel locally asynchronous method is used to implement the model on parallel computer systems. Results of numerical experiments are described.

Key words: *mathematical model, locally asynchronous method, peristaltic process, triplex.*

Отримано: 15.03.2013

УДК 517.532.2

О. М. Нікітіна, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький факультет національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПЕРЕТВОРЕНИЕ ТИПУ ЕЙЛЕРА-ФУР'Е-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНОЙ ОСИ

Методом дельта-подобной последовательности (ядро Діріхле) побудовано гібридне інтегральне перетворення, породжене на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Ейлера-Фур'є-Ейлера.

Ключові слова: *диференціальний оператор Ейлера, диференціальний оператор Фур'є, гібридне інтегральне перетворення, ядро Діріхле, вагова функція, спектральна функція, спектральна щільність, інтегральне зображення, основна тотожність.*

Вступ. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до знаходження інтегрального зображення аналітично-