УДК 519.21;519.929

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Н. П. Донець, аспірант

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

АСИМПТОТИКА В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ДИФУЗІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ПІСЛЯДІЄЮ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЗОВНІШНЬОГО ВИПАДКОВОГО ЗБУРЕННЯ

Отримано достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному дифузійної динамічної системи з післядією із врахуванням зовнішнього випадкового збурення.

Ключові слова: *дифузійна динамічна система, стохастичне диференціально-різницеве рівняння, асимптотика в середньому квадратичному, випадкове збурення.*

Вступ

У статті досліджується поведінка других моментів розв’язків із врахуванням зовнішніх випадкових збурень скалярних стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) та стохастичних диференціально-різницевих рівнянь (СДРР).

Для лінійних СДР та СДРР у випадку, коли невипадкове диференціальне рівняння має стійкий розв'язок, доведена асимптотична стійкість в l.i.m. розв'язку за допомогою представлення розв'язку СДР (СДРР) через фундаментальний розв'язок відповідного детермінованого рівняння (аналог формули Коші). Оскільки розв'язки СДР або СДРР є мартингалом, то із асимптотичної стійкості в l.i.m. випливає асимптотична стійкість з ймовірністю одиниця.

Для нелінійних СДР або СДРР методика дослідження асимптотичної поведінки сильного розв'язку лінійних СДР не проходить. Існує два шляхи: по-перше, можна за допомогою методів статистичного моделювання отримувати на комп’ютері числовий розв'язок, за яким при великих t можна говорити про поведінку розв'язку на реалізаціях; по-друге, використовуючи другий метод Ляпунова так званих допоміжних функцій, за значенням інфінітезимального оператора в силу СДР можна говорити про поведінку розв’язків на нескінченності.

1. Випадок декількох запізнень

На ймовірнісному базисі $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\right\}, \mathbb{P}\right)$ задано випадковий процес $\left\{x(t) \equiv x(t,\omega), t \geq 0\right\} \subset \mathbb{R}$ як сильний розв’язок СДРР

$$dx(t) + \sum_{k=0}^{N} a_k x(t-\Delta_k)dt = \sum_{k=0}^{N} f_k(\xi(\omega)) b_k x(t-\Delta_k) dw_k(t) \qquad (1)$$

за початковими умовами

$$x(t-\Delta)\big|_{t\in[0,\Delta]} = \varphi(t), \tag{2}$$

де

$$\Delta = \sup_k \Delta_k, \;\; k = \overline{0,N}, \;\; \Delta_k \ge 0, \;\; \Delta_0 = 0;$$

$$\varphi \in C\big([-\Delta;0]\big); \; \{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}\big|_{\pm\infty};$$

$w_k(t) \equiv w_k(t,\omega)$ — вінеровські випадкові процеси з нульовими математичними сподіваннями і одиничними параметрами дифузії $\sigma^2 = 1$, причому вони попарно незалежні і $\mathcal{F}_t$ — вимірні $\forall t \ge 0$ та незалежні від випадкової величини $\xi(\omega)$, з заданою функцією розподілу $F_\xi(x); f_k(\bullet): \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k = \overline{1,n}$ — беровські функції.

Означення 1. Під сильним розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти сепарабельний випадковий процес $x(t) \equiv x(t,\omega), t \in [0,\infty)$, визначений $\forall t \in [-\Delta, 0]$ співвідношенням (2), вимірний відносно σ-алгебри $\mathcal{L}_t \times \mathcal{F}_t$ і такий, що $\forall t \in (0,\infty)$ з ймовірністю одиниця задовольняє інтегральне рівняння Іто [1—3]

$$x(t) = \varphi(0) - \sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^t x(s-\Delta_k)ds + \sum_{k=0}^{N} f_k(\xi(\omega)) a_k \int_0^t x(s-\Delta_k)dw_k(s). \tag{3}$$

Тут $\mathcal{L}_t$ — σ-алгебра борелівських множин відрізку $[0,t]$, $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра, побудована для випадкової величини $x(t,\omega)$ при фіксованому $t \in (0,\infty)$.

Нехай $h(t)$ — фундаментальний розв'язок детермінованого диференціального рівняння [4]

$$dy(t) + \sum_{k=0}^{N} a_k y(t-\Delta_k)dt = 0, \tag{4}$$

такий, що $h(t) \equiv 0, \forall t < 0, h(0) = 1$ і для $t > 0$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda) d\lambda, \tag{5}$$

де $V(\lambda) \equiv \lambda + \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-\Delta k \lambda}$ — характеристичний квазіполіном рівняння (4) [5].

Означення 2. Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) назвемо стійким в середньому квадратичному, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що із нерівності $\sup\limits_{-\Delta \le t \le 0} |\varphi(t)| < \delta(\varepsilon)$ випливає, що $\mathbb{E}\left\{|x(t,\omega)|^2\right\} < \varepsilon.$

Означення 3. Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) називається асимптотично стійким в середньому квадратичному, якщо він стійкий за означенням 2 і $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}\left\{|x(t,\omega)|^2\right\} = 0$ [6—8].

Теорема 1. Нехай корені рівняння $\det V(\lambda) = 0$ лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$ та існують $\mathbb{E}\left\{f_k\left(\xi(\omega)\right)\right\} < \infty.$ Тоді

I) в разі виконання нерівності

$$B \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{|V(is)|^2} \sum_{k=0}^N \left[f_k\left(\xi(\omega)\right) b_k^2 \right] < \left(\sum_{k=0}^N \mathbb{E}\left\{ f_k^2\left(\xi(\omega)\right)\right\} \right)^{-1} \tag{6}$$

тривіальний розв'язок (1), (2) асимптотично стійкий в середньому квадратичному;

II) якщо $B > 1$, то в довільному малому околі нуля знайдеться така початкова функція $\varphi(t)$, що $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}\left\{x^2(t)\right\} = \infty.$

Доведення. I) Використовуючи фундаментальний розв'язок $h(t)$ для рівняння (4), розв'язок (1), (2) можна записати в інтегральному вигляді:

$$x(t) = y(t) + \sum_{k=0}^N b_k \int_0^t h(t-s) f_k\left(\xi(\omega)\right) x(s-\Delta_k)\, dw_k(s), \tag{7}$$

де $y(t)$ — деякий розв'язок (4).

Позначаючи $z_k(t) = x(t-\Delta_k)$, $g_k(t) = h(t-\Delta_k)$ перейдемо від (3) до системи

$$z_k(t) = y(t-\Delta_l) + \sum_{k=0}^N f_k\left(\xi(\omega)\right) b_k \int_0^t g_k(t-s) z_k(s)\, dw_k(s). \tag{8}$$

Піднесемо до квадрату ліву і праву частини системи (8) при кожному $k \in [0, N]$, застосуємо математичне сподівання до отриманих рівностей і, використовуючи властивості стохастичних інтегралів [9], [3], [10], отримаємо

$$\mu_l(t) = y^2(t-\Delta_l) + \sum_{k=0}^N \mathbb{E}\left\{ f_k^2\left(\xi(\omega)\right)\right\} b_k^2 \int_0^t g_k^2(t-s) \mu_k(s)\, ds, \tag{9}$$

де $\mu_l(t) = \mathbb{E}\left\{z_l^2(t)\right\}$, $\mathbb{E}(\bullet)$ — операція математичного сподівання [10].

Застосувавши перетворення Лапласа L [5] до обох частин (9), запишемо

$$M_l(\lambda) = y^2(t - \Delta_l) + \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\left\{f_k^2(\xi(\omega))\right\} b_k^2 G_k(\lambda) M_k(\lambda),$$

де $G_k(\lambda) = L\left\{g_k(t)\right\}$, $M_l(\lambda) = L\left\{\mu_l(t)\right\}$.

За умовою теореми 1 корені характеристичного квазіполінома (5) рівняння (4) лежать у лівій півплощині комплексної змінної λ, тому довільний розв'язок (3) прямує до нуля при $t \to \infty$ не повільніше за $e^{\beta t}$ з від’ємним показником. Тому $L\left\{y^2(t - \Delta_l)\right\}$, $\left(l = \overline{0,n}\right)$ не має особливостей у півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$, а значить особливі точки вектора-зображення $\left\{M_l(t)\right\}_{l=\overline{0,n}}$ співпадають з нулями визначника системи (10). Після розкриття цього визначника одержимо:

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\left\{f_k^2(\xi(\omega))\right\} b_k^2 G_k(\lambda) = 1$$

або

$$L\left\{\sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\left\{f_k^2(\xi(\omega))\right\} b_k^2 g_k^2(t)\right\} = 1. \tag{11}$$

Питання про стійкість розв'язку (9) вирішують корені рівняння (11).

Зауважимо, що при $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ матимемо наступну нерівність:

$$L\left\{\sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\left\{f_k^2(\xi(\omega))\right\} b_k^2 g_k^2(t)\right\} \le \sum_{k=0}^{N} \int_0^{\infty} \mathbb{E}\left\{f_k^2(\xi(\omega))\right\} b_k^2 g_k^2(t). \tag{12}$$

Це випливає з того, що під знаком інтеграла в (11) стоїть невід’ємна функція за змінною t, і тому вона досягає найбільшого значення за абсолютною величиною на дійсній осі [5].

Таким чином, якщо права частина нерівності (12) менша за одиницю, то зображення вектор-функції $\left\{\mu_l(t)\right\}_{l=\overline{0,n}}$ не має полюсів у півплощині $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ а, отже, $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_l(t) = 0$, $l = \overline{0,n}$.

Використовуючи вираз (4) для $h(t)$, можна підрахувати

$$\int_0^{\infty} g_k^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left\{f_k^2(\xi(\omega))\right\} b_k^2\,ds}{\left|V(is)\right|^2},\ k = \overline{0,n},$$

що й доводить першу частину теореми 1.

II) якщо $B > 1$, то з урахуванням (13) маємо

$$\sum_{k=0}^{N}\int_{0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{f_k^2\left(\xi\left(\omega\right)\right)\right\}b_k^2 g_k^2\left(t\right)dt>1.$$

Оскільки

$$f\left(s\right)\equiv\sum_{k=0}^{N}\mathbb{E}\left\{f_k^2\left(\xi\left(\omega\right)\right)\right\}\int_{0}^{\infty}e^{-st}b_k^2 g_k^2\left(t\right)dt$$

для дійсних додатних s є неперервною функцією та $\lim\limits_{s\to\infty} f\left(s\right)=0,$ то існує $s_0>0$ таке, що $f\left(s_0\right)=1.$ Тоді зображення вектора $\left\{\mu_l\left(t\right)\right\}$ [5] має полюс в півплощині $\operatorname{Re}\lambda=s_0>0$ і, отже, оригінал $\lim\limits_{t\to\infty}\mu_l\left(t\right)=\infty,\ l=\overline{0,n}.$ Це і доводить другу частину теореми 1.

Зауваження 1. На стійкість розв'язку в середньому квадратичному рівняння (1)—(2) не впливають запізнення, які входять у праву частину рівняння, що випливає з вигляду (6) для B.

2. Скалярний випадок з декількома збуреннями та загаюваннями

Розглянемо рівняння на ймовірнісному базисі $\left(\Omega,\mathcal{F},\left\{\mathcal{F}_t,t\ge 0\right\},\mathbb{P}\right)$, яке визначає випадковий процес $\left\{x\left(t\right)\right\}\subset\mathbb{R}$,

$$dx\left(t\right)+\sum_{k=0}^{n}a_k x\left(t-\Delta_k\right)dt=\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{n}f_{kl}\left(\xi\left(\omega\right)\right)b_{kl}x\left(t-\Delta_k\right)dw_l\left(t\right)\quad(14)$$

із початковою умовою

$$x\left(t-\Delta\right)\Big|_{t\in\left[0,\Delta\right]}=\varphi\left(t\right),\quad(15)$$

де $\Delta=\sup\limits_{k}\Delta_k$, $k=\overline{0,n}$, $\Delta_0=0$; a_k,b_{kl} — дійсні сталі; $w_l\left(t\right)$ — процеси броунівського руху з нульовими математичними сподіваннями і параметрами дифузії σ_l, причому $w_l\left(t\right)$ попарно незалежні.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1, корені λ квазіполінома $V\left(\lambda\right)$ лежать у лівій півплощині ($\operatorname{Re}\lambda<0$), і виконується умова

$$B\equiv\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{L}\left[\sigma_l\int_{0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}\left\{f_{kl}^2\left(\xi\left(\omega\right)\right)\right\}b_{kl}e^{-i\Delta_k s}\right|^2\left|V^{-1}\left(is\right)\right|^2 ds\right]<$$
$$<\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=o}^{L}\mathbb{E}\left\{f_{kl}^2\left(\xi\left(\omega\right)\right)\right\}\right)^{-1}.\quad(16)$$

Тоді:

I) тривіальний розв'язок (14)—(15) асимптотично стійкий в середньому квадратичному;

II) якщо $B > 1$, то в довільному малому околі нуля знайдеться така початкова функція $\varphi(t)$, що $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}\left\{x^2(t)\right\} = +\infty.$

3. Алгебраїчний критерій стійкості в середньому квадратичному для рівнянь N-го порядку

Нехай на ймовірнісному базисі $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P}\right)$ випадковий процес $\left\{x(t)\right\} \subset \mathbb{R}$ задано як сильний розв'язок СДРР N-го порядку

$$\frac{d^N x(t)}{dt^N} + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{N-1} a_{kj} \frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j} = \\ = \sum_{l=0}^{L} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{N-1} b_{kjl} f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right) \frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j} \frac{dw_l(t)}{dt} \tag{17}$$

за початковими умовами

$$\left. \frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j} \right|_{t\in[-\Delta, t]} = \varphi^{(j)}(t), \;\; j = \overline{0, N-1}. \tag{18}$$

Зауваження 2. Для рівняння (17)—(18) існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $x(t)$, якщо рівняння записати у вигляді системи [7].

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 1 та корені характеристичного квазіполінома $V(\lambda) = \lambda^N + \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{N-1} a_{kj} \lambda^j e^{-\Delta_k \lambda}$ розташовані у лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0.$ Тоді:

I) у випадку виконання нерівності

$$B \equiv \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{L} \left[\sigma_l \int_0^\infty \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}\left\{ f_{kjl}^2\left(\xi(\omega)\right)\right\} b_{kjl}(is) e^{-i\Delta_k s} \right|^2 \left| V^{-1}(is)\right|^2 ds \right] < \\ < \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{L} \mathbb{E}\left\{ f_{kjl}^2\left(\xi(\omega)\right)\right\} \right)^{-1} \tag{19}$$

тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи СДРР (17)—(18) асимптотично стійкий у середньому квадратичному;

II) якщо ж $B > 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}\left\{x^2(t)\right\} = +\infty.$

Доведення. I) Від рівняння (17) перейдемо до системи інтегральних рівнянь [1], [2]

$$x^{(r)}(t)=y^{(r)}(t)+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}b_{kjl}f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right)\times$$
$$\times\int_{0}^{t}h^{(r)}(t-s)x^{(j)}(s-\Delta_k)dw_l(s), \tag{20}$$

де $r=\overline{0,N}$, $x^{(r)}(t)$ — похідна r-го порядку, $h(t)$ — фундаментальний розв'язок незбуреного рівняння

$$\frac{d^N x(t)}{dt^N}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}a_{kj}\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}=0, \tag{21}$$

такий, що $h(t)=h'(t)=...=h^{(N-2)}(t)\equiv 0$ при $t<0$, $h^{(N-1)}(0)=1$, а за $\forall t>0$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{\lambda t}V^{-1}(\lambda)d\lambda,$$

де $y(t)$ — розв'язок рівняння (21).

Введемо позначення:

$$x^{(r)}(t-\Delta_k)=z_k^{(r)}(t),\quad g_k^{(r)}(t)=h^{(r)}(t-\Delta_k),\ k=0,1,...,N,$$

тоді від (20) перейдемо до системи інтегральних рівнянь

$$z_p^{(r)}(t)=y^{(r)}(t-\Delta_k)+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right)b_{kjl}\int_{0}^{t}g_p^{(r)}(t-s)z_k^{(j)}dw_l(s), \tag{22}$$
$$r=\overline{0,N-1},\ p=\overline{0,N}.$$

Рівняння системи (22) перемножимо попарно, включаючи й індекси, що співпадають, застосуємо операцію математичного сподівання до отриманих результатів і, враховуючи властивості стохастичних інтегралів [10], запишемо для $\mu_{prdm}(t)=\mathbb{E}\left\{z_p^{(r)}(t)\cdot z_m^{(d)}(t)\right\}$ систему рівнянь

$$\mu_{prdm}(t)=y^{(r)}(t-\Delta_p)y^{(d)}(t-\Delta_m)+$$
$$+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{n}\sum_{v=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\Big[\mathbb{E}\left\{f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right)f_{vil}\left(\xi(\omega)\right)\right\}b_{kjl}b_{vil}\sigma_l\times \tag{23}$$
$$\times\int_{0}^{t}g_p^{(r)}(t-s)g_m^{(d)}(t-s)\mu_{kvji}(s)ds.$$

Застосувавши до системи (23) перетворення Лапласа [5], отримаємо наступну систему інтегральних рівнянь

$$M_{prdm}(\lambda)=L\left\{y^{(r)}(t-\Delta_p)y^{(d)}(t-\Delta_m)\right\}+$$
$$+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{n}\sum_{v=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\mathbb{E}\left\{f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right)f_{vil}\left(\xi(\omega)\right)\right\}b_{kjl}b_{vil}\sigma_l G_{prdm}(\lambda)M_{kvji}(\lambda), \tag{24}$$

де $M_{kvji}(\lambda) = L\{\mu_{kvji}(t)\}$, $G_{prdm}(\lambda) = L\left\{g_p^{(r)}(t)\cdot g_m^{(d)}(t)\right\}$.

З умови теореми 3 випливає, що полюси вектор-зображення $\{M_{kvji}(\lambda)\}$ можуть з'явитися лише в точках λ, у яких визначник системи (24) перетворюється в нуль. Обчисливши цей визначник, дістанемо еквівалентне рівняння

$$\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{n}\sum_{v=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\mathbb{E}\left\{f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right)f_{vil}\left(\xi(\omega)\right)\right\}b_{kjl}b_{vil}\sigma_l G_{kvji}(\lambda) = 1$$

або

$$L\left\{\sum_{l=0}^{L}\sigma_l\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{E}\left\{f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right)\right\}b_{kjl}g_k^{(j)}(t)\right]^2\right\} = 1.$$

Для $\operatorname{Re}\lambda > 0$ одержимо очевидну нерівність

$$L\left\{\sum_{l=0}^{L}\sigma_l\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{E}\left\{f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right)\right\}b_{kjl}g_k^{(j)}(t)\right]^2\right\} \le$$
$$\le \sum_{l=0}^{L}\sigma_l^2\int_0^{\infty}\mathbb{E}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right)b_{kjl}g_k^{(j)}(t)\right)^2\right\}dt = B_1. \qquad (25)$$

Отже, права частина нерівності (25) менша від 1, то вектор-зображення $\{M_{prdm}(\lambda)\}$ не має полюсів у півплощині $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ і тоді $\mu_{prdm}(t) \to 0$ при $t\to\infty$ $\left(p, m = \overline{0,n};\ r, d = \overline{0, N-1}\right)$ [4], [5].

Використовуючи вираз для $h(t)$ при $t>0$, очевидна рівність $B_1 = B.$ Цим завершується доведення першої частини теореми 3.

II) якщо $B > 1,$ то $B_1 > 1.$

Зауважимо, що функція

$$f(s) \equiv \sum_{l=0}^{L}\mathbb{E}\left\{\sigma_l\int_0^{\infty}e^{-st}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}f_{kjl}\left(\xi(\omega)\right)b_{kjl}g_k^{(j)}(t)\right]^2\right\}dt$$

при дійсних додатних s є неперервною функцією і $\lim\limits_{s\to\infty} f(s) = 0.$ Тоді знайдеться таке $s_0 > 0,$ що $f(s_0) = 1$ [4]. Тобто зображення $\{M_{prdm}(\lambda)\}$ має полюс у півплощині $\operatorname{Re}\lambda > 0$, а це означає, що оригінал необмежено зростає при $t\to\infty$, що й доводить повністю теорему 3.

4. Стійкість розв'язків в $l.i.m.$ систем стохастичних диференціально-різницевих рівнянь

4.1. Випадок систем з пуассоновими збуреннями

Отримаємо інтегральний критерій стійкості в $l.i.m.$ систем СДРР першого порядку

$$dx(t)+\sum_{j=0}^{m}A_jx\left(t-\Delta_j\right)dt=\sum_{j=0}^{m}\psi_j\left(\xi(\omega)\right)dW_j(t)x\left(t-\Delta_j\right)+ \\ +\sum_{j=0}^{m}\psi_j(\xi)\int_U f_j(u)B_jx\left(t-\Delta_j\right)\tilde{v}(dt,du) \tag{26}$$

з початковими умовами

$$x(t)|_{t\in[-\Delta,0]}=\varphi(t)\in\mathbb{R}^n, \tag{27}$$

де $\Delta=\sup\limits_j\Delta_j,\ \Delta_0=0,\ \Delta_j>0,\ j=\overline{0,m};\ W_j(t)\equiv W_j(t,\omega)$ — матриця, що складається із незалежних в сукупності процесів броунівського руху $\left\{w_{lk}^{(j)}(t)\right\}$ з матрицею параметрів дифузії S_j; $A_j\equiv\left\{a_{lk}^{(j)}\right\}$, $B_j\equiv\left\{b_{lk}^{(j)}\right\}$, $l,k=\overline{0,n},$ — матриці з дійсними елементами; $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — вимірні в сукупності за $u\in\mathbb{R}^m$; $v_j(t,A)$ — скалярні пуассонові міри [9] такі, що

$$\tilde{v}(t,du)\equiv v_j(t,du)-t\Pi(du), \tag{28}$$

при цьому $v_j(t,du)$ не залежить від елементів матриці $W_j(t)$, $l,j=\overline{0,n}.$

Нехай $h(t)$ — фундаментальна матриця системи детермінованих диференціально-різницевих рівнянь

$$dy(t)+\sum_{j=0}^{m}A_jy\left(t-\Delta_j\right)dt=0. \tag{29}$$

Тоді від системи СДРР (26) можна перейти до системи інтегральних рівнянь, використовуючи фундаментальну матрицю $h(t)$ [1]:

$$x(t)=y(t)+\sum_{j=0}^{m}\psi_j(\xi)\int_0^t h(t-s)\left[dw_j(s)\right]x\left(s-\Delta_j\right)+ \\ +\sum_{j=0}^{m}\psi_j(\xi)\int_0^t\int_U f_j(u)h(t-s)B_jx\left(s-\Delta_j\right)\tilde{v}_j(ds,du), \tag{30}$$

де $y(t)$ — довільний розв'язок системи (21).

Піднесемо в квадрат обидві частини системи рівнянь (30), застосувавши операцію математичного сподівання $\mathbb{E}\{\cdot\}$ і, використовуючи властивості стохастичних інтегралів [7], отримаємо

$$\begin{aligned}\mu(t) = y^2(t) + \sum_{j=0}^{n} \psi_j(\xi) \int_0^t h(t-s) S_j \mu\left(s-\Delta_j\right) ds + \\ + \sum_{j=0}^{m} \psi_j(\xi) \int_0^t \int_U f_j^2(u) h^2(t-s) B_j^2 \mu_j\left(s-\Delta_j\right) \frac{du}{u^{m+1}} ds,\end{aligned} \tag{31}$$

де $\mu(t) \equiv \mathbb{E}\left\{x^2(t)\right\}$.

Теорема 4. Нехай корені характеристичного квазіполінома

$$\det V(\lambda) \equiv \det\left[I \cdot \lambda + \sum_{j=0}^{n} A_j e^{-\Delta_j \lambda}\right]$$

розташовані в лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Тоді:

I) якщо власні значення $\lambda(D)$ матриці

$$\begin{aligned}D \equiv \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{m} \Big\{ \mathbb{E}\left\{\psi_j^2(\xi)\right\} \left[V^{-1}(is)\right]_+^2 S_j ds + \\ + \int_U \mathbb{E}\left\{\psi_j(\xi)\right\} f_j^2(u) \frac{du}{|u|^{m+1}} \int_0^\infty \left[V^{-1}(is)\right]_+^2 ds\end{aligned} \tag{32}$$

задовольняють умову $\left|\lambda(D)\right| < 1$, то тривіальний розв'язок системи (26), (27) асимптотично стійкий в $l.i.m.$;

II) якщо хоча б одне власне значення $\lambda(D)$ матриці D задовольняє умову $\left|\lambda(D)\right| > 1$, то в довільно малому околі нуля знайдеться початкова функція $\varphi(t)$ така, що $\lim\limits_{t \to +\infty} \mu(t) = +\infty$.

Зауважимо, що індекс $_+$ означає, що елементи вектора і матриці взяті за модулем.

Доведення. Застосувавши перетворення Лапласа [11] до обох частин рівняння (31), отримаємо для $M(\lambda) \equiv L\left\{\mu(t)\right\}$; інтегральне рівняння для зображення

$$\begin{aligned}M(\lambda) = Y(\lambda) + \sum_{j=0}^{m} \mathbb{E}\left\{\psi_j(\xi)\right\} \times \\ \times [H(\lambda) s_j e^{-\Delta_j \lambda} + \int_U f_j^2(u) \frac{du}{|u|^{n+1}} H(\lambda) B_j^2 e^{-\Delta_j \lambda}] M(\lambda),\end{aligned} \tag{33}$$

де $Y(\lambda) \equiv L\left\{y^2(t)\right\}$; $H(\lambda) \equiv L\left\{h^2(t)\right\}$.

За умовами теореми 4 нулі $\det V(\lambda)$ лежать в півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0,$ тоді особливості вектор-зображення $M(\lambda)$ знаходяться в нулях визначника

$$\Phi(\lambda) \equiv \det\left[I - N(\lambda)\right],$$

де

$$N(\lambda) \equiv H(\lambda)\sum_{j=0}^{m}\psi_j(\xi)\left[S_j + \int_U f_j^2(u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\right]e^{-\Delta_j\lambda}.$$

Матриця $N_+(\lambda)$ має додатні власні значення $\gamma(\lambda)$ за модулем не менше всіх інших власних значень, тоді і всі власні значення матриці $N(\lambda)$ задовольняють умову $|\lambda(N)| < \gamma(\lambda)$ [11]. Далі із визначення матриці $N(\lambda)$ випливає, що $\max\limits_{\operatorname{Re}\lambda=c}\gamma(\lambda) = \gamma(c),$ де $c \in \mathbb{R}$.

Доведення твердження I) проведемо від супротивного. Нехай $\Phi(\lambda_0) = 0,$ де $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0,$ тоді матриця $N(\lambda_0)$ має власне значення, що рівне 1, і $\gamma(\operatorname{Re}\lambda_0) \geq 1.$ Оскільки конструктивно елементи матриці $N_+(\operatorname{Re}\lambda)$ не зростають, то $\gamma(\operatorname{Re}\lambda)$ не збільшується при збільшенні $\operatorname{Re}\lambda$ [12]. Таким чином, $\gamma(0) \geq 1,$ де $\gamma(0)$ - власне значення матриці

$$N(0) \equiv H(0)\sum_{j=0}^{m}\psi_j(\xi)\left[S_j + \int_U f_j^2(u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\right]. \tag{34}$$

Легко побачити, що $N(0) = D_0.$ Тоді твердження, що $\gamma(0) \geq 1,$ протирічить твердженню 1.

Доведемо твердження II) про те, що хоча б одне власне значення $\lambda(D)$ матриці D по модулю більше 1. Значить, $\gamma(0) > 1$ і, враховуючи неперервність $\gamma(s)$ [11], отримаємо, що $\lim\limits_{s\to+\infty}\gamma(s) = 0.$ Це дає право стверджувати, що існує s_0 таке, що $\gamma(s_0) = 1,$ а це означає, що $\Phi(s_0) = 0$ для $s_0 > 0.$ Таким чином, $\lim\limits_{t\to+\infty}|\mu(t)|$ збільшується не повільніше ніж $e^{s_0 t}$ [12], що і доводить твердження II) теореми 4.

Теорема доведена

Зауваження 1. Якщо $B_j \equiv 0,\ j = \overline{0,m}$, то отримаємо відомий результат [1] для системи СДРР з неперервними вінеровими збуреннями в термінах матриць

$$D \equiv \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{m}\psi_j(\xi)\int_0^{\infty}\left[V^{-1}(is)\right]_+^2 S_j ds.$$

4.2. Випадок систем СДРР N-го порядку

Розглянемо випадковий процес $x(t) \equiv x(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$ на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}, \mathbb{P})$ як сильний розв'язок системи СДРР з обмеженою післядією

$$I\frac{d^N x(t)}{dt^N} + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m} A_{jk}\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j} = \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\psi_{jk}(\xi)\times$$
$$\times\left[\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}\frac{dW_{jk}(t)}{dt} + B_{jk}\int_U f_{jk}(u)\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}\tilde{\nu}_{jk}(dt,du)\right] \qquad (35)$$

з початковими умовами

$$\left.\frac{d^j x(t)}{dt^j}\right|_{t\in[-\Delta,0]} = \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{0, N-1},\ \Delta = \sup_k \Delta_k, \qquad (36)$$

де $\Delta_k \ge 0, \Delta_0 = 0, I$ — діагональна одинична матриця; $W_{jk}(t) \equiv \left\{\xi_{jk}^{(pq)}\right\}$, $p,q = \overline{1,n},$ — матриці, побудовані із незалежних в сукупності процесів броунівського руху з нульовими математичними сподіваннями і параметром дифузії S_{jk}; $\tilde{\nu}_{jk}(t,du) \equiv \nu_{jk}(t,du) - \Pi_{jk}(t,du)$ — центровані пуасонові міри з параметрами $\Pi_{jk}(t,du) = M\left\{\nu_{jk}(t,du)\right\}$, причому вони не залежні від елементів матриці $W_{jk}(t)$; A_{jk} і B_{jk} — матриці з дійсними елементами.

Зауважимо, що рівняння (35) слід розглядати як відповідну систему із $N \cdot n$ стохастичних диференціально-різницевих рівнянь і воно має єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності сильний розв'язок [13].

Нехай $h(t)$ — матричний розв'язок системи детермінованих диференціальних рівнянь

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m} A_{jk}\frac{d^j y(t-\Delta_k)}{dt^j} = 0 \qquad (37)$$

таке, що $h(t) \equiv 0_{n\times n}$ при $t < 0; h(0) = h'(0) = ... = h^{N-2}(0) = 0_{n\times n};$ $h^{N-1}(0) = I,$ а $\forall t > 0$

$$h^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^j e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \qquad (38)$$

де контур Γ охоплює всі нулі квазіполіному системи (37)

$$\det V(\lambda) \equiv \det\left[I\lambda^n + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m} A_{jk}\lambda^j e^{-\Delta_k \lambda} \right]. \tag{39}$$

Використовуючи аналог формули Коші для неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) [7], можна перейти від (35) до системи

$$x^{(l)}(t) = y^{(l)}(t) + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m} \psi_{jk}(\xi) \int_0^t \Big[h^{(l)}(t-\tau)\, dw_{jk}(\tau)\, x^{(j)}(\tau-\Delta_k) + \\ + B_{jk}\int_U f_{jk}(u)\tilde{\nu}_{jk}(d\tau, du)\, x^{(j)}(\tau-\Delta_k) \Big],\ l=\overline{0, N-1}, \tag{40}$$

де $y(t)$ — довільний розв'язок ЗДР (37).

Теорема 5. Нехай корені квазіполіному $\det V(\lambda)$ (39) лежать в півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Тоді

I) якщо для матриці

$$B \equiv \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}\left\{\psi_{jk}^2(\xi)\right\} \times \\ \times \int_0^\infty \left\{ S_{jk} + \int_U f_{jk}^2 \left[B_{jk}\right]_+^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \right\} \left| (is)^j \right|^2 \left[V^{-1}(is) \right]_+^2 ds \tag{41}$$

спектральний радіус $r(B) < 1$, то тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи СДРР (35), (36) асимптотично стійкий в $l.i.m.$;

II) якщо корінь Перона $\gamma(\lambda)$ матриці B більше одиниці ($\gamma(\lambda) > 1$), то

$$\lim_{t\to+\infty} M\left\{ |x(t)|^2 \right\} = +\infty.$$

Доведення. Піднесемо до квадрату обидві частини системи (40), застосуємо до отриманих виразів операції математичного сподівання $\mathbb{E}\{\cdot\}$ і, використовуючи властивості стохастичних інтегралів Іто та інтегралів за пуассоновою мірою, отримаємо систему рівнянь $N\cdot n$-го порядку для $\mu_l(t) \equiv M\left\{ \left[x^{(l)}(t) \right]^2 \right\},\ l=\overline{0, N-1}$:

$$\mu_l(t) = \left[y^{(l)}(t) \right]^2 + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}\left\{\psi_{jk}^2(\xi)\right\} \left[h^{(l)}(t-\tau) \right]^2 \times \\ \times \left\{ S_{jk} + B_{jk}\int_U f_{jk}^2(u) \frac{du}{|u|^{n+1}} \right\} \mu_j(t-\Delta_k)\, dt. \tag{42}$$

Далі, застосувавши до обох частин (42) перетворення Лапласа [14], легко записати відповідну систему для відображень

$$M_l(\lambda) = L\left\{\left[\mu^{(l)}(t)\right]^2\right\};\ Y_l(\lambda) = L\left\{\left[y^{(l)}(t)\right]^2\right\};$$

$$H_l(\lambda) = L\left\{\left[h^{(l)}(t)\right]^2\right\}:$$

$$M_l(\lambda) = Y_l(\lambda) + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m} \mathbb{E}\left\{\psi_{jk}^2(\xi)\right\} H_l(\lambda)\left\{S_{jk} + \right.$$

$$\left. + B_{jk}^2 \int_U f_{jk}^2(u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\right\} e^{-\Delta_k\lambda} M_j(\lambda)\mu_j(t-\Delta_k)\,dt. \tag{43}$$

Якщо $r(B) < 1,$ то довільний розв'язок (37) за модулем прямує до нуля при $t \to +\infty$ не швидше за e^{ct} з від'ємним показником $c < 0$ [12]. Тоді $Y_l(\lambda)$ не має особливостей в півплощині $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ [11]. Таким чином, особливості вектора $M_l(\lambda)$ співпадають з нулями визначника $F(\lambda)$ системи (43).

Для подальшого доведення теореми 5 проведемо елементарні перетворення: спочатку домножимо зліва перший рядок на $-H(\lambda)H_0^{-1}(\lambda)$ і додамо до r-го рядка, потім домножимо зліва r-ий рядок на $H_0(\lambda)\sum_{k=0}^{m}\left\{S_{rk} + B_{rk}\int_U f_{rk}^2(u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\right\}$ і додамо до першого рядка ($r = 2,3,...,N-2$). В результаті отримаємо визначник

$$F(\lambda) = \det\left[I - L(\lambda)\right], \tag{44}$$

де

$$L(\lambda) \equiv$$

$$\equiv H_0(\lambda)\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\mathbb{E}\left\{\psi_{jk}^2(\xi)\right\}\left[S_{jk} + B_{jk}^2\int_U f_{jk}^2(u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\right]H_j(\lambda)e^{-\Delta_k\lambda}H_0^{-1}(\lambda)\right\}.$$

Відповідно [15] матриця $L_+(\lambda)$ має корінь Перона, як матриця з додатніми елементами, за модулем не менший за всі інші власні значення $\left|\lambda(L_+)\right| \leq \gamma(\lambda)$. Із побудови матриць випливає, що $\max\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda = c}\gamma(\lambda) = \gamma(c),\ c > 0.$

Доведення твердження 1 теореми 5 проведемо від супротивного. Нехай $F(\lambda_0)=0,$ але $\operatorname{Re}\lambda_0>0.$ Тоді $L(\lambda)$ має власне значення 1 і $\gamma(\operatorname{Re}\lambda_0)\geq 0.$ Але $\gamma(\operatorname{Re}\lambda)$ не зростає при збільшенні $\operatorname{Re}\lambda$, оскільки елементи матриці $L_t(\operatorname{Re}\lambda)$ не зростають [15]. Звідси відразу слідує, що $\gamma(0)\geq 1.$

Використовуючи вираз (38) для $h^{(j)}(t),$ одержимо

$$H_j(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left|(is)^j\right|^2\left[V^{-1}(is)\right]_+^2 ds.$$

Це означає, що матриця $L(0)$ подібна до матриці B із умови (41) теореми 5. Таким чином, матриця B має власні значення $\gamma(0)\geq 1,$ що противорічять умові $r(B)<1$ твердження I).

Доведемо твердження II) теореми 5. Нехай корінь Перона $\gamma(s)$ матриці B більше 1 ($\gamma(s)>1$). Тоді і $\gamma(0)>1.$ Зауважимо, що при дійсних s границя $\lim\limits_{s\to+\infty}\gamma(s)=0$ і $\gamma(s)$ — неперервні функції дійсних s [12].

Отже, існує дійсне $s_0>0$ таке, що $\gamma(s_0)=1.$ А це означає, що $F(s_0)=0$ при $s_0>0$. Таким чином, $\mu_l(t), l=\overline{0,N-1},$ зростає при $t\to+\infty$ не повільніше, ніж e^{st} [5], що і доводить твердження II) теореми 5.

Зауваження 2. При $B_{kj}\equiv 0$ отримаємо відомий результат [1] для дифузійної лінійної стохастичної системи в термінах матриці

$$B\equiv\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\mathbb{E}\left\{\psi_{jk}^2(\xi)\right\}S_{jk}\int_0^\infty\left|(is)^j\right|^2\left[V^{-1}(is)\right]_+^2 ds.$$

4.3. Асимптотична стійкість в l.i.m. систем СДРР загального виду

Розглянемо систему більш загального виду:

$$\begin{aligned}x_i^{(n_i)}(t)+\sum_{k=1}^{Q}\sum_{j=0}^{n_i-1}\sum_{r=0}^{R}a_{kjri}x_k^{(j)}(t-\Delta_k)=\\ =\sum_{k=1}^{Q}\sum_{j=0}^{n_i-1}\sum_{r=0}^{R}\psi_{jr}(\xi)x_k^{(j)}(t-\Delta_r)\xi_{kjri}(t)+\\ +\int_{\mathbb{R}}\psi_{jr}(\xi)f_{jr}(u)b_{kjri}x_k^{(j)}(t-\Delta_r)\tilde{v}_{jr}(du,dt)\end{aligned}\qquad(45)$$

з початковими умовами

$$x_i^{(n_i)}(0)=0;\ x_i^{(n_i-1)}(0)=1;\ i=1,2,...,Q, \tag{46}$$

де $x_i(t)\in\mathbb{R}$; $\Delta_2\geq 0, r=\overline{1,R},\ \Delta_0=0; \xi_{kjri}(t)$ — незалежні в сукупності процеси броунівського руху з $\mathbb{E}\{\xi_{kjri}(t)\}=0$ і $D\{\xi_{kjri}(t)\}=\sigma_{kjri}$; $v_{kjri}(t,A)$ — випадкові пуасонові міри, незалежні в сукупності і попарно незалежні з $\xi_{kjri}(t)$. Нехай N — найбільший порядок похідних в системі (45), $N\equiv\sup\limits_{0\leq i\leq Q} n_i$. Тоді (45) можна записати в матричному вигляді (35):

$$K\frac{d^N x(t)}{dt^N}+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{R}A_{jr}\frac{d^j x(t-\Delta_r)}{dt^j}=$$
$$=\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{R}\left[\frac{dw_{jr}(t)}{dt}\frac{d^j x(t-\Delta_r)}{dt^j}+B_{jr}\int_{\mathbb{R}^Q}f_{jr}(u)\frac{d^j x(t-\Delta_r)}{dt^j}\tilde{v}_{jr}(dt,du)\right], \tag{47}$$

де $x(t)\in\mathbb{R}^Q$, а замість одиничної матриці I при $\dfrac{d^N x(t)}{dt^N}$ стоїть деяка вироджена матриця

$$K\cdot A_{jr}\equiv\{a_{kjri}+\alpha_{kjri}\}^T,\ k,i=\overline{1,Q},$$

де $a_{kjri}=0$, якщо в i-ому рядку стоїть N-та похідна; якщо в i-ому рядку не має N-тої похідної, то

$$\alpha_{\ln_i\cdot i}=1;\ B_{jr}\equiv\{b_{kjri}\}^T;\ w_{jr}(t)\equiv\{\xi_{kjri}(t)\}^T,\ k,i=\overline{1,Q};$$
$$\tilde{v}_{jr}(t,A)\equiv\{\tilde{v}_{kjri}(t,A)\}^T.$$

Теорема 6. Нехай корені квазіполіному

$$\det V_0(\lambda)\equiv\det\left[K\lambda^N+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{R}A_{jr}\lambda^j e^{-\Delta_r\lambda}\right] \tag{48}$$

лежать в лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda<0$. Тоді:

I) якщо спектральний радіус $r(B_0)<1$ матриці

$$B_0=\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{R}\mathbb{E}\{\psi_{jr}^2(\xi)\}\times$$
$$\times\int_0^\infty\left\{S_{jr}^T+\int_{\mathbb{R}^n}f_{jr}^2(u)\frac{du}{|u|^{Q+1}}\left[B_{jr}\right]_+^2\right\}\left|(is)^j\right|^2\left[V_0^{-1}(is)\right]_+^2 ds; \tag{49}$$

$S_{jr}^T \equiv \left\{ \sigma_{qiri} \right\}, q, i = \overline{1, Q},$ то тривіальний розв’язок $x(t) \equiv 0$ системи СДРР (45), (46) асимптотично стійкий в $l.i.m.$ (тут $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця);

II) якщо $r(B_0) > 1$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{E}\left\{ \left| x(t) \right|^2 \right\} = 0.$

Доведення. Нехай $h(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} V_0^{-1}(\lambda) d\lambda$ — фундаментальна матриця відповідної системи звичайних диференціально-різницевих рівнянь (45) з квазіполіномом $V_0(\lambda)$.

Тоді від системи (45) перейдемо до системи інтегральних рівнянь

$$x_i^{(k_i)}(t) = y_i^{(k_i)}(t) + \sum_{k=1}^{Q} \sum_{j=0}^{n_i - 1} \sum_{r=0}^{R} \psi_{jr}(\xi) \int\limits_0^t h_{k_i}^{(k_i)}(t - \tau) \left\{ \xi_{kjri}(\tau) + \right.$$
$$\left. + b_{kjri} \int\limits_{\mathbb{R}} f_{jr}(u) \tilde{v}_{jr}(du, d\tau) \right), \tag{50}$$

де $y_i^{(k_i)}(t),\ k_i = 0, 1, \ldots, n_i - 1,$ — довільні розв’язки відповідної системи.

Піднесемо до квадрату обидві частини (50), застосуємо операцію математичного сподівання і за допомогою перетворення Лапласа [12] отримаємо систему для відображень

$$M_i^{(k_i)}(\lambda) = Y_i^{(k_i)}(\lambda) + \sum_{k=1}^{Q} \sum_{j=0}^{n_i - 1} \sum_{r=0}^{R} \mathbb{E}\left\{ \psi_{jr}^2(\xi) \right\} H_{k_i}^{(k_i)}(\lambda) \times$$
$$\times \left\{ S_{jr}^* + B_{jr}^2 \int\limits_{\mathbb{R}^Q} f_{jr}^2(u) \frac{du}{|u|^{Q+1}} \right\} e^{-\Delta_r \lambda} M_k^{(j)}(\lambda), \tag{51}$$

де

$$M_i^{(k_i)}(\lambda) = L\left\{ \mu_i^{(k_i)}(t) \right\};\ \mu_i^{(k_i)}(t) \equiv \mathbb{E}\left\{ \left[x_i^{(k_i)}(t) \right]^2 \right\},$$

$$Y_i^{(k_i)}(\lambda) = L\left\{ \left[y_i^{(k_i)}(t) \right]^2 \right\};\ H_i^{(k_i)}(\lambda) = L\left\{ \left[h_{k_i}^{(k_i)}(t) \right]^2 \right\}.$$

Із умов теореми 6 слідує, що особливості вектора $M_i^{(k_i)}(\lambda)$ знаходяться в нулях системи (51). Позначимо

$$\sup_{1 \le i \le Q} u_i = N_{T_s},$$

де у випадку декількох (одинакових) екстремумів $s = 1, 2, \ldots, m.$

Випадок $m = Q$. Із умови $m = Q$ (із (51)) випливає, що максимальні за порядком похідні системи мають однакові значення: $n_1 = n_2 = ... = n_Q = N_{T_S}$. Тоді, записуючи визначник системи (51) в блочному вигляді (порядки блоків рівні Q), бачимо, що визначник співпадає з визначником системи (43) і далі справедливе доведення теореми 5, звідки матимемо справедливість твердження І) теореми 6.

Випадок $m < Q$. Якщо $m < Q$, то розширюємо матрицю визначника системи (51) за рахунок доповнення нулями по рядкам і по стовпцям так, щоб в блочному вигляді вона набула виду $L(\lambda) \equiv I - L_1(\lambda)$, де I — одинична матриця, а $L_1(\lambda) \equiv \{L_{ki}(\lambda)\}$, $i,k = \overline{1,Q}$, — матриця з елементами-блоками

$$L_{ki}(\lambda) = \sum_{j=0}^{k_i} H_{k_i}^{(k_i)}(\lambda) \sum_{r=0}^{R} e^{-\Delta_r \lambda} \mathbb{E}\left\{\psi_{jr}^2(\xi)\right\} \left\{ S_{jr}^* + B_{jr}^2 \int_{\mathbb{R}^Q} f_{jr}^2(u) \frac{du}{|u|^{Q+1}} \right\},$$

$k_i = \overline{0, n_i}$. Блочні матриці

$$S_{jr}^* \equiv \left\{S_{ki}^{jr}\right\}, k,i = \overline{1,Q};\ S_{ki}^{jr} = \sum_{k=0}^{R} \sigma_{kjri}$$

мають наступний вигляд: а) якщо $n_i = N_{T_S}$, то всі елементи цієї матриці рівні параметрам дифузії системи (45); б) якщо $n_i < N_{T_S}$, то $S_{ki}^{jr} = 0$ для $j = n_i, n_i + 1, ..., N_{T_S}$.

Блочні матриці B_{jr} мають наступний вигляд: якщо $n_i \equiv N_{T_S}$, то всі елементи цієї матриці визначаються як $B_{jr} \equiv \left\{b_{kjri}\right\}^T$, $k,i = \overline{1,Q}$; якщо $n_i < N_{T_S}$, то $B_{jr} = 0$ для $j = n_i, n_i + 1, ..., N_{T_S}$. Із запису матриці $L(\lambda)$ слідує, що її власні значення співпадають з власними значеннями матриці визначника системи (51) для визначника $M_i^{(k_i)}(\lambda)$, крім нульових власних значень, які співпадають до відповідного порядку.

Далі зрозуміло, що $\det L(\lambda)$ рівний визначнику системи (43). Таким чином, перетворення над рядками $\det L(\lambda)$ приведуть до визначника $F(\lambda) \equiv \det\left[I - L(\lambda)\right]$, де $L(\lambda)$ набуде вигляду (47). Залишилось застосувати теорему 5, що і закінчує доведення теореми 6.

Модельна задача. Розглянемо задачу автоматичної стабілізації курсу судна із врахуванням випадкових збурень (мінливість морських течій, нерівномірна інтенсивність повітряних потоків, магнітні бурі і т.д.).

Стохастичною моделлю цієї задачі буде система стохастичних диференціально-функціональних рівнянь [7]

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi}(t)+H\dot{\varphi}(t)+K\psi(t)=\dot{\varphi}(t)l_1(\xi)\dot{w}_1(t,\omega)+\\
&+\int_{\mathbb{R}} l_2(\xi)f_1(u)\dot{\varphi}(t)\tilde{v}_1(du,dt)+\\
&+\psi(t)l_1(\xi)\dot{w}_2(t,\omega)+\int_{\mathbb{R}} l_2(\xi)f_2(u)\psi(t)\tilde{v}_2(du,dt),
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi}(t)+\frac{1}{T}\psi(t)+B\varphi(t)+L\varphi(t-\tau)=\\
&=\varphi(t)l_3(\xi)\dot{w}_3(t,u)+\int_{\mathbb{R}} l_4(\xi)f_3(u)\tilde{v}_3(du,dt)+\\
&+\varphi(t-\tau)l_3(\xi)\dot{w}_4(t,u)+\int_{\mathbb{R}} l_4(\xi)f_4(u)\varphi(t-\tau)\tilde{v}_4(du,dt),
\end{aligned} \tag{53}$$

де $\varphi(t)$ — кут нахилу судна від курсу при куті повороту $\psi(t)$ руля; $H>0, K>0,\ \ T>0, B, L$ — константи, які характеризують модель курсу судна, $w_i(t,\omega), i=\overline{1,4},$ — вінерові процеси; $v_i(t,A)$ — центровані пуасонові міри, незалежні в сукупності з вінеровими процесами.

Розв'язання. Квазіполіном системи (52), (53) має вигляд

$$\det V_0(\lambda)=\det\left[K\lambda^2+\sum_{j=0}^{1}\sum_{r=0}^{1}A_{jr}\lambda^j e^{-\Delta_r\lambda}\right],$$

де

$$K\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\ \ A_{00}=\begin{pmatrix}0&K\\B&T^{-1}\end{pmatrix};\ \ A_{01}=\begin{pmatrix}0&0\\L&0\end{pmatrix};\ \ A_{11}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};$$

$$A_0=0_{2\times2};\ \ \Delta_l=\tau>0.$$

Тоді

$$\det V_0(\lambda)=\lambda^2K+H\lambda\left(T^{-1}+\lambda\right)-K\left(B+Le^{-\tau\lambda}\right). \tag{54}$$

В просторі параметрів $H,T,K,B,L,\tau>0$ можна побудувати області D — розбиття і області, де корені квазіполіному (54) мають від'ємні частини $\operatorname{Re}\lambda<0$.

Тепер зрозуміло, що

$$V_0^{-1}(is)=\frac{1}{\det V_0(is)}\begin{pmatrix}-s^2+iK & B+Le^{-is}\\ K & T^{-1}+is\end{pmatrix},$$

де

$$\left|\det V(is)\right|^2=\left[s^2+\left(T^{-1}+H\right)+B\left(B+1\cos s\right)\right]^2+\left(HT^{-1}-B^2+KL\sin s\right)^2;$$

$$\left[V_0^{-1}(is)\right]_+^2 = \frac{1}{\left|\det V_0(is)\right|^2}\begin{pmatrix} s^2\left(s^2+H\right) & L^2+2LB\cos s+B^2 \\ H^2 & \left(T^{-1}\right)^2+s^2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця B_0 набуде вигляду

$$B_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\sum_{j=0}^{1}\sum_{r=0}^{1} S_{jr}^{*}\mathbb{E}\left\{L_{jr}(\xi)\right\} + \int_{\mathbb{R}} f_{jr}^2(u)\frac{du}{|u|^2}\right\}\left|(is)^j\right|^2\left[V_0^{-1}(is)\right]_+^2 ds,$$

де

$$S_{00}^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ S_{01}^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ S_{10}^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_{jr}(\xi) = \begin{pmatrix} l_1(\xi) & l_2(\xi) \\ l_3(\xi) & l_4(\xi) \end{pmatrix};\ S_{11}^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_{00}(u) = \begin{pmatrix} 0 & f_1(u) \\ f_3(u) & 0 \end{pmatrix};\ f_{01}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_4(u) & 0 \end{pmatrix};$$

$$f_{10}(u) = \begin{pmatrix} f_2(u) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ f_{11}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо відповідні інтеграли матриці B_0 через $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$. Тоді власні значення матриці B_0 рівні

$$\lambda_1 = \left(I_{11}+I_{22}+\sqrt{D}\right),\ \lambda_1 = \left(I_{11}+I_{22}-\sqrt{D}\right),$$

де $D = \left(I_{11}+I_{22}\right)^2 - 4\left(I_{11}I_{12}+I_{12}I_{21}\right)$.

Згідно з теоремою 6 тривіальний розв'язок системи СДРР (52), (53) асимптотично стійкий в *l.i.m.*, якщо $\left|\lambda\left(B_0\right)\right| < 1$. Використовуючи сучасні комп'ютерні технології, можна побудувати в просторі параметрів $\left(H,T,K,B,L\right)$ області $D-$ розбиття, перевіряючи умову $\left|\lambda\left(B_0\right)\right| < 1$.

Висновки. У статті розглядалася поведінка других моментів розв'язків із урахуванням зовнішніх випадкових збурень скалярних стохастичних рівнянь та стохастичних диференціально-різницевих рівнянь.

Одержано достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному дифузійних динамічних систем із урахуванням зовнішніх випадкових збурень. Розглядалася модельна задача автоматичної стабілізації морського судна із урахуванням випадкових збурень (мінливість морських течій, магнітні бурі, тощо).

Список використаних джерел:

1. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский. — Рига : Ориентир, 1990. — 312 с.
2. Царьков Е. Ф. Об устойчивости тривиального решения линейных стохастических систем / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский // Укр. мат. журн. — 1970. — Вип. 22, №5. — С. 699–701.
3. Царьков Е.Ф. Исследование функциональных дифференциальных уравнений при случайных возмущениях / Е. Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1986. — 423 с.
4. Беллман К. Дифференциально-разностные уравнения / К. Беллман, Р. Кук, К. Кук. — М. : Наука, 1968. — 640 с.
5. Деч Д. Руководство к практичекому применению преоброзования Лапласа и Z - преброзования / Д. Деч. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
6. Колмановский В. Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
7. Ясинський В. К. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський. — К. : ТВіМС, 2005. — 280 с.
8. Дарийчук И. В. Анализ устойчивости стохастических систем с пуассоновскими возмущениями. II. Устойчивость решений в среднем квадратичном систем линейных стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновскими возмущениями / И. В. Дарийчук, А. В. Никитин, В. К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — №6. — С. 50–66.
9. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1980. — 612 с.
10. Королюк В. С. Ймовірність, статистика і випадкові процеси : в 3-ох т. / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2009. — Т.3. Випадкові процеси. Теорія і статистичне комп'ютерне моделювання. — 782 с.
11. Пугачев В. С. Стохастические дифференциальные уравнения / В. С. Пугачев. — М. : Наука, 1976. — 354 с.
12. Смит Дж. М. Автоматическое регулирование / Дж. М. Смит. — М. : Физматгиз, 1962. — 847 с.
13. Андреева Е. А. Управление системами с последействием / Е. А. Андреева, В. Б. Колмановский, Л. Е. Шайхет. — М. : Наука, 1992. — 336 с.
14. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с.
15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 575 с.

Sufficient conditions for asymptotical stability in mean square of diffusional dynamical systems with aftereffect and with accounting of external random perturbation are obtained.

Key words: *diffusional dynamical system, stochastic differential-difference equation, asymptotic in mean square, random perturbation.*

Отримано: 14.03.2013