УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ СІМ'Ї ОПУКЛИХ ФУНКЦІЙ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНОЮ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

У статті встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *півнеперервне зверху компактнозначне відображення, найкраща у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірна апроксимація, субградієнт, субдиференціал, умови екстремальності.*

Вступ. У статті для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента, які узагальнюють на випадок вищеназваної задачі відповідні умови екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої функції апроксимації неперервного компактнозначного відображення множиною однозначних відображень, встановлені у праці [1].

1. Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел топологічний простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір всіх неперервних однозначних відображень g компакта S в X, $K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору X, $\tilde{C}(S,K(X))$ — множина багатозначних півнеперервних зверху на S відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s)=K_s \in K(X)$, $V \subset C(S,X)$, $\{p_s\}_{s\in S}$ — сім'я неперервних на X опуклих функцій таких, що відображення $(s,x) \in S \times X \to p_s(x)$ півнеперервне зверху на $S \times X$.

Задачею найкращої у розумінні сім'ї $\{p_s\}_{s\in S}$ рівномірної апроксимації компактнозначного відображення $a \in \tilde{C}\left(S, K\left(X\right)\right)$ множиною $V \subset C\left(S, X\right)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*\left(a\right) = \inf_{g\in V} \sup_{s\in S} \sup_{y\in a(s)} p_s\left(y - g(s)\right). \quad (1)$$

Твердження 1. Для $g \in C\left(S, X\right)$, $s \in S$ функція $y \in X \to \to p_s\left(y - g\left(s\right)\right)$ є неперервною на X.

З урахуванням цього твердження та узагальненої теореми Вейєрштрасса (див., наприклад, [2, с. 28]) задачу відшукання величини (1) можна подати у такому вигляді:

$$\alpha_V^*\left(a\right) = \inf_{g\in V} \sup_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g(s)\right). \quad (2)$$

Твердження 2. Для кожного $g \in C\left(S, X\right)$ функція $\Phi_a^g\left(s\right) = = \max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g(s)\right)$, $s \in S$, є півнеперервною зверху на S.

Доведення. Нехай $s_0 \in S$, $A \in R$ та

$$\Phi_a^g\left(s_0\right) = \max_{y\in a(s_0)} p_{s_0}\left(y - g(s_0)\right) < A.$$

Тоді $p_{s_0}\left(y - g(s_0)\right) < A$, $y \in a\left(s_0\right)$.

Оскільки відображення $\left(s, x\right) \in S \times X \to p_s\left(x\right)$ півнеперервне зверху на $S \times X$, то для кожного $y \in a\left(s_0\right)$ існує окіл $O_y\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S, окіл $O\left(y\right)$ точки y та окіл $O_y\left(g\left(s_0\right)\right)$ точки $g\left(s_0\right)$ простору X такі, що

$$p_s\left(\gamma - z\right) < \mathrm{A},\ s \in O_y\left(s_0\right),\ \gamma \in O\left(y\right),\ z \in O_y\left(g\left(s_0\right)\right). \quad (3)$$

Оскільки $g \in C\left(S, X\right)$, то для $O_y\left(g\left(s_0\right)\right)$, $y \in a\left(s_0\right)$, існує окіл $O_y^1\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S такий, що $g\left(s\right) \in O_y\left(g\left(s_0\right)\right)$, $s \in O_y^1\left(s_0\right)$. Нехай $O_y^2\left(s_0\right) = O_y\left(s_0\right) \cap O_y^1\left(s_0\right)$, $y \in a\left(s_0\right)$. Тоді для всіх $s \in O_y^2\left(s_0\right)$ $g\left(s\right) \in O_y\left(g\left(s_0\right)\right)$.

Завдяки цьому з (3) одержимо

$$p_s\left(\gamma - g\left(s\right)\right) < A,\ s \in O_y^2\left(s_0\right),\ \gamma \in O\left(y\right). \quad (4)$$

Оскільки $a\left(s_0\right)$ є компактом простору X і $\bigcup_{y\in a(s_0)} O\left(y\right) \supset a\left(s_0\right)$, то існують околи $O\left(y_i\right)$ точок y_i, $i = \overline{1, m}$, компакта $a\left(s_0\right)$ такі, що

$$a\left(s_0\right) \subset \bigcup_{i=1}^{m} O\left(y_i\right). \qquad (5)$$

З урахуванням (4) тоді матимемо, що

$$p_s\left(\gamma - g\left(s\right)\right) < A, \; s \in O_{y_i}^2\left(s_0\right), \; \gamma \in O\left(y_i\right), \; i = \overline{1,m}. \qquad (6)$$

Нехай $O^1\left(s_0\right) = \bigcap_{i=1}^{m} O_{y_i}^2\left(s_0\right)$. З (6) отримаємо, що

$$p_s\left(\gamma - g\left(s\right)\right) < A, \; s \in O^1\left(s_0\right), \; \gamma \in \bigcup_{i=1}^{m} O\left(y_i\right). \qquad (7)$$

Оскільки відображення a є півнеперервним зверху на S і має місце (5), то існує окіл $O^2\left(s_0\right)$ точки s_0 компакта S такий, що

$$a\left(s\right) \subset \bigcup_{i=1}^{m} O\left(y_i\right), \; s \in O^2\left(s_0\right). \qquad (8)$$

Покладемо $O\left(s_0\right) = O^1\left(s_0\right) \cap O^2\left(s_0\right)$. З (7), (8) випливає, що

$$p_s\left(y - g\left(s\right)\right) < A, \; s \in O\left(s_0\right), \; y \in a\left(s\right). \qquad (9)$$

Тому $\max\limits_{y \in a(s)} p_s\left(y - g\left(s\right)\right) < A$, $s \in O\left(s_0\right)$. Отже, $\Phi_a^g\left(s\right) < A$, $s \in O\left(s_0\right)$. Це й означає, що функція $\Phi_a^g\left(s\right)$, $s \in S$, є півнеперервною зверху у точці $s_0 \in S$. Оскільки s_0 вибрано з S довільно, то функція $\Phi_a^g\left(s\right)$, $s \in S$, є півнеперервною зверху на S.

Твердження доведено.

З урахуванням твердження 2 та узагальненої теореми Вейєрштрасса (див., наприклад, [2, с. 28]) задачу відшукання величини (2) можна подати у такому вигляді

$$\alpha_V^*\left(a\right) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g(s)\right). \qquad (10)$$

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що

$$\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \alpha_V^*\left(a\right),$$

то його назвемо екстремальним елементом для величини (10).

Актуальність теми. Теорія многозначних відображень, яка інтенсивно розвивається в останні десятиріччя, знаходить багаточисельні застосування в теорії оптимального керування, теорії оптимізації, опуклому аналізі, теорії ігор, математичній економіці та інших галузях сучасної математики.

Важливий розділ цієї теорії утворюють задачі найкращого наближення складних многозначних відображень відображеннями простішої структури (див., наприклад, [3–7]), у тому числі задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень (див., наприклад, [8–10]).

Слід зазначити, що до задач найкращої рівномірної апроксимації многозначного відображення множинами однозначних відображень зводиться низка задач оптимального відновлення функціоналів за неточно заданою інформацією (див., наприклад [11–12]), яким, починаючи з середини шістдесятих років двадцятого століття, приділяється велика увага.

Як відомо, виникають задачі наближення в яких міра відхилення між елементами лінійного топологічного простору оцінюється з допомогою деякої неперервної функції, заданої на цьому просторі. Клас таких задач досить широкий. Він включає в себе задачі найкращого у розумінні норми, передінорми, функції Мінковского, сублінійної та опуклої функції наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору, а також задачу найкращої у розумінні опуклої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень (див., наприклад, [1; 13–16]).

Задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень (див., наприклад, [8–10]) та названі вище задачі є частковими випадками задачі відшукання величини (10).

Результати загального характеру, отримані при дослідженні величини (10), становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для конкретних задач, що включаються у схему її постановки, зіграють важливу роль при побудові та обґрунтуванні збіжності чисельних методів розв'язання цих задач.

Мета роботи. Встановити необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для величини (10).

Допоміжні твердження.

Твердження 3. Нехай Y — лінійний простір (дійсний або комплексний), φ — задана на Y опукла функція, $x, y \in Y$, $A \in R$. Якщо $\varphi(x) < A$, то існує число $t_y > 0$ таке, що $\varphi(x+ty) < A$, $t \in \left[0, t_y\right]$.

Доведення. Відомо, що функція $t \in (0,+\infty) \to \dfrac{\varphi(x+ty)-\varphi(x)}{t}$ є неспадною на $(0,+\infty)$ (див., наприклад, [14, с. 347]). Тоді для $t_0 > 0$ одержимо, що $\dfrac{\varphi(x+ty)-\varphi(x)}{t} \le \dfrac{\varphi(x+t_0 y)-\varphi(x)}{t_0} = B$, $t \in \left(0, t_0\right]$.

Звідки

$$\varphi\left(x+ty\right)\le\varphi\left(x\right)+Bt\ ,\ t\in\left[0,t_0\right]. \tag{11}$$

Маємо, що $\lim\limits_{t>0,t\to 0}\left(\varphi\left(x\right)+Bt\right)=\varphi\left(x\right)<A$. Тому існує число $t_y>0$ таке, що $\varphi\left(x\right)+Bt<A$ для всіх $t\in\left[0,t_y\right]$. Звідси і з (11) одержимо, що $\varphi\left(x+ty\right)<A$, $t\in\left[0,t_y\right]$.

Твердження доведено.

Нехай φ задана на лінійному (дійсному або комплексному) просторі Y опукла функція. Через $\varphi'\left(x,y\right)$ будемо позначати похідну функції φ в точці $x\in Y$ за напрямком $y\in Y$.

Теорема 1. Нехай K — компакт, Y — лінійний простір (дійсний або комплексний), $\left\{\varphi_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ — сім'я заданих на Y опуклих функцій, для кожного $x\in Y$ відображення $\alpha\in K\to\varphi_\alpha\left(x\right)$ півнеперервне зверху на K, $\varphi\left(x\right)=\max\limits_{\alpha\in A}\varphi_\alpha\left(x\right)$, $x\in Y$,

$$K\left(x\right)=\left\{\alpha:\alpha\in K,\varphi_\alpha\left(x\right)=\varphi\left(x\right)=\max_{\alpha\in A}\varphi_\alpha\left(x\right)\right\}.$$

Тоді для будь-яких $x,y\in Y$:

$\left(i_1\right)$ відображення $\alpha\in K(x)\to\varphi'_\alpha\left(x,y\right)$ є півнеперервним зверху на $K\left(x\right)$;

$\left(i_2\right)$ існує точка $\alpha_y\in K\left(x\right)$, для якої

$$\varphi'_{\alpha_y}\left(x,y\right)=\max_{\alpha\in K\left(x\right)}\varphi'_\alpha\left(x,y\right); \tag{12}$$

$\left(i_3\right)$ для кожного $\alpha\in K\left(x\right)$ справедлива нерівність

$$\varphi'_\alpha\left(x,y\right)\le\varphi'\left(x,y\right);$$

$\left(i_4\right)$ якщо $\varphi'\left(x,y\right)\ge 0$, то для кожного $\alpha_y\in K\left(x\right)$, що задовольняє (12), виконується рівність

$$\varphi'_{\alpha_y}\left(x,y\right)=\max_{\alpha\in K\left(x\right)}\varphi'_\alpha\left(x,y\right)=\varphi'\left(x,y\right).$$

Доведення. Перш за все зазначимо, що функція φ є опуклою на Y (див., наприклад, [2, с. 180]). Переконаємося, що $K\left(x\right)$ є замкнутою множиною K. Нехай $\alpha_0\in K\setminus K\left(x\right)$. Тоді $\varphi_{\alpha_0}\left(x\right)<\varphi\left(x\right)$. Оскільки відображення $\alpha\in K\to\varphi_\alpha\left(x\right)$ півнеперервне зверху на K, то існує окіл $O(\alpha_0)$ точки α_0 компакта K такий, що $\varphi_\alpha(x) < \varphi(x)$ для всіх $\alpha \in O(\alpha_0)$. Звідси випливає, що $O(\alpha_0) \subset K \backslash K(x)$. Тому $K \backslash K(x)$ є відкритою, а $K(x)$ — замкнутою множиною K. Оскільки K — компакт, то $K(x)$ також є компактом (див., наприклад, [2, с.22]).

Доведемо справедливість твердження $(\boldsymbol{i_1})$. Нехай $\alpha_0 \in K(x)$ і число A таке, що $\varphi'_{\alpha_0}(x,y) < A$. Оскільки функція φ_{α_0} є опуклою на Y, то існує число $t^y_{\alpha_0} > 0$ таке, що

$$\varphi'_{\alpha_0}(x,y) \le \frac{\varphi_{\alpha_0}\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right) - \varphi_{\alpha_0}(x)}{t^y_{\alpha_0}} < A \tag{13}$$

(див., наприклад, [14, с. 328]).

З (13) та рівності $\varphi_{\alpha_0}(x) = \varphi(x)$ випливає, що

$$\varphi_{\alpha_0}\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right) < \varphi(x) + At^y_{\alpha_0}.$$

Оскільки відображення $\alpha \in K \to \varphi_\alpha\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right)$ є півнеперервним зверху на K, то існує окіл $O(\alpha_0)$ точки α_0 компакта K такий, що

$$\varphi_\alpha\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right) < \varphi(x) + At^y_{\alpha_0}. \tag{14}$$

Ураховуючи те, що $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x)$ для всіх $\alpha \in K(x)$, з (14) одержимо

$$\frac{\varphi_\alpha\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right) - \varphi_\alpha(x)}{t^y_{\alpha_0}} < A, \ \alpha \in O(\alpha_0) \cap K(x). \tag{15}$$

Оскільки $\varphi'_\alpha(x,y) \le \dfrac{\varphi_\alpha\left(x + t^y_{\alpha_0} y\right) - \varphi_\alpha(x)}{t^y_{\alpha_0}}$

(див., наприклад, [14, с. 328]), то з (15) випливає, що $\varphi'_\alpha(x,y) < A$ для всіх $\alpha \in O(\alpha_0) \cap K(x)$. Це й означає, що відображення $\alpha \in K(x) \to \varphi'_\alpha(x,y)$ є півнеперервним зверху у точці $\alpha_0 \in K(x)$.

Оскільки точку α_0 вибрано довільно з $K(x)$, то звідси робимо висновок про півнеперервність зверху відображення $\alpha \in K(x) \to \varphi'_\alpha(x,y)$ на $K(x)$.

Твердження (i_1) доведено.

Оскільки $K(x)$ є компактом, то згідно з твердженням $(\boldsymbol{i_1})$ та узагальненою теоремою Вейєрштрасса (див., наприклад, [2, с. 28]) існує $\alpha_y \in K(x)$ таке, що має місце рівність (12).

Твердження (i_2) доведено.

Переконаємося у справедливості твердження (i_3). Нехай $\alpha \in K(x)$. Тоді $\varphi_\alpha(x) = \varphi(x)$. З урахуванням цього для $t > 0$ будемо мати

$$\frac{\varphi_\alpha(x+ty) - \varphi_\alpha(x)}{t} \le \frac{\max\limits_{\alpha \in K} \varphi_\alpha(x+ty) - \varphi(x)}{t} = \frac{\varphi(x+ty) - \varphi(x)}{t}.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $t > 0$, $t \to 0$ одержимо, що $\varphi'_\alpha(x, y) \le \varphi'(x, y)$ (див., наприклад, [14, с. 328]).

Справедливість твердження (i_3) доведено.

Нехай далі $\varphi'(x, y) \ge 0$, $\alpha_y \in K(x)$ та має місце рівність (12).

Переконаємося, що

$$\varphi'(x, y) = \varphi'_{\alpha_y}(x, y). \tag{16}$$

Згідно з твердженням (i_3) $\varphi'_{\alpha_y}(x, y) \le \varphi'(x, y)$.

Припустимо, що

$$\varphi'_{\alpha_y}(x, y) < \varphi'(x, y). \tag{17}$$

Виберемо число A так, що

$$\varphi'_{\alpha_y}(x, y) < A < \varphi'(x, y). \tag{18}$$

Оскільки функції φ_α, $\alpha \in K$, є опуклими на Y, то з (12) та (18) випливає, що для кожного $\alpha \in K(x)$ існує число $t_\alpha > 0$ таке, що

$$\varphi'_\alpha(x, y) \le \frac{\varphi_\alpha(x + t_\alpha y) - \varphi_\alpha(x)}{t_\alpha} < A$$

(див., наприклад, [14, с. 328]).

Отже, для всіх $\alpha \in K(x)$

$$\varphi_\alpha(x + t_\alpha y) < \varphi_\alpha(x) + At_\alpha = \varphi(x) + At_\alpha.$$

Звідси та півнеперервності зверху на K відображення $\alpha \in K \to \varphi_\alpha(x)$, $x \in Y$, випливає, що для кожного $\alpha \in K(x)$ існує окіл $O(\alpha)$ точки α компакта K такий, що

$$\varphi_{\alpha'}(x + t_\alpha y) < \varphi(x) + A \cdot t_\alpha, \ \alpha' \in O(\alpha). \tag{19}$$

Маємо, крім того, що

$$\varphi_{\alpha'}\left(x\right)\le\varphi\left(x\right),\ \alpha'\in K\ . \tag{20}$$

З (19), (20) та опуклості функцій $\varphi_{\alpha'}$, $\alpha'\in K$, на Y одержимо для $\alpha\in K\left(x\right)$, $\alpha'\in O\left(\alpha\right)$, $\beta\in\left(0,1\right]$:

$$\varphi_{\alpha'}\left(\left(1-\beta\right)x+\beta\left(x+t_\alpha y\right)\right)=\varphi_{\alpha'}\left(x+\beta t_\alpha y\right)\le$$
$$\le\left(1-\beta\right)\varphi_{\alpha'}\left(x\right)+\beta\varphi_{\alpha'}\left(x+t_\alpha y\right)<$$
$$<\left(1-\beta\right)\varphi\left(x\right)+\beta\left(\varphi\left(x\right)+At_\alpha\right)=\varphi\left(x\right)+\beta At_\alpha .$$

Звідки

$$\varphi_{\alpha'}\left(x+ty\right)<\varphi\left(x\right)+t\cdot A\ ,\ \alpha'\in O\left(\alpha\right),\ t\in\left(0,t_\alpha\right]. \tag{21}$$

Оскільки $K\left(x\right)$ є компактом K, то з його відкритого покриття $O\left(\alpha\right)$, $\alpha\in K\left(x\right)$, можна виділити скінченне підпокриття $O\left(\alpha_i\right)$, $\alpha_i\in K\left(x\right)$, $i=\overline{1,m}$. Внаслідок (21) одержимо, що

$$\varphi_{\alpha'}\left(x+ty\right)<\varphi\left(x\right)+t\cdot A\ ,\ \alpha'\in O\left(\alpha_i\right),\ t\in\left(0,t_{\alpha_i}\right],\ i=\overline{1,m}\ . \tag{22}$$

Нехай $\overline{t}=\min\limits_{1\le i\le m}t_{\alpha_i}$. Тоді з (22) випливає, що

$$\varphi_{\alpha'}\left(x+ty\right)<\varphi\left(x\right)+t\cdot A\ ,\ \alpha'\in\bigcup_{i=1}^{m}O\left(\alpha_i\right),\ t\in\left(0,\overline{t}\,\right]. \tag{23}$$

Оскільки $K_1=K\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}O\left(\alpha_i\right)\right)$ є замкнутою множиною компакта K, то K_1 — компакт. Якщо $\alpha\in K_1$, то $\alpha\notin K\left(x\right)$. Тому

$$\max_{\alpha\in K_1}\varphi_\alpha\left(x\right)<\varphi\left(x\right). \tag{24}$$

Розглянемо функцію $\psi\left(z\right)=\max\limits_{\alpha\in K_1}\varphi_\alpha\left(z\right)$, $z\in Y$. Зрозуміло, що $\psi\left(z\right)$, $z\in Y$, є опуклою на Y функцією. Згідно з (24) $\psi\left(x\right)<\varphi\left(x\right)$. Згідно з твердженням 3 існує число $t'>0$ таке, що

$$\psi\left(x+ty\right)=\max_{\alpha\in K_1}\varphi_\alpha\left(x+ty\right)<\varphi\left(x\right),\ t\in\left[0,t'\right]. \tag{25}$$

Виберемо $t_0=\min\left\{\overline{t},t'\right\}$. Маємо (див., наприклад, [14, с. 328])

$$\begin{aligned}\varphi'\left(x,y\right)&=\inf_{t>0}\frac{\varphi\left(x+ty\right)-\varphi\left(x\right)}{t}\le\frac{\varphi\left(x+t_0y\right)-\varphi\left(x\right)}{t_0}=\\&=\frac{\max\limits_{\alpha\in K}\varphi_\alpha\left(x+t_0y\right)-\varphi\left(x\right)}{t_0}=\frac{\varphi_{\alpha_0}\left(x+t_0y\right)-\varphi\left(x\right)}{t_0},\ \alpha_0\in K.\end{aligned} \tag{26}$$

Якщо припустити, що $\alpha_0 \in \bigcup_{i=1}^{m} O(\alpha_i)$, то внаслідок (18), (23), (26) одержимо, що

$$\varphi'(x,y) \le \frac{\varphi_{\alpha_0}(x+t_0 y)-\varphi(x)}{t_0} < A < \varphi'(x,y),$$

що неможливо.

Тоді $\alpha_0 \in K_1 = K \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} O(\alpha_i)\right)$. У цьому випадку з урахуванням умов теореми, співвідношень (25), (26) одержимо, що

$$0 \le \varphi'(x,y) \le \frac{\max\limits_{\alpha\in K} \varphi_\alpha(x+t_0 y)-\varphi(x)}{t_0} =$$

$$= \frac{\varphi_{\alpha_0}(x+t_0 y)-\varphi(x)}{t_0} \le \frac{\max\limits_{\alpha\in K_1} \varphi_\alpha(x+t_0 y)-\varphi(x)}{t_0} < 0 .$$

Знову отримали суперечність. Одержані суперечності доводять, що коли $\varphi'(x,y) \ge 0$, то має місце рівність (12).

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для будь-яких $x, y \in Y$ справедливе таке співвідношення

$$\max_{\alpha\in K(x)} \varphi'_\alpha(x,y) \le \varphi'(x,y).$$

Справедливість наслідку 1 випливає з тверджень (i_2), (i_3) теореми 1.

Функцію

$$\Phi_a(g) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s(y-g(s)),\ g\in C(S,X),$$

назвемо цільовою функцією задачі відшукання величини (10).

Твердження 4. Для кожного $a \in C(S, K(X))$ цільова функція $\Phi_a(g)$, $g \in C(S,X)$, задачі відшукання величини (10) є опуклою на $C(S,X)$.

Справедливість твердження випливає з опуклості функцій p_s на X, $s \in S$, та властивостей верхньої межі довільної сім'ї опуклих функцій (див., наприклад, [2, с. 180]).

Нехай

для $s \in S$ $\Phi_{a,s}(g) = \max\limits_{y\in a(s)} p_s(y-g(s))$, $g \in C(S,X)$, для $s \in S$, $y \in a(s)$ $\Phi_{a,s,y}(g) = p_s(y - g(s))$, $g \in C(S, X)$.

Для $g^* \in C(S, X)$ покладемо

$$S_a\left(g^*\right) = \left\{s : s \in S, \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \Phi_a\left(g^*\right)\right\},$$

а для $s \in S_a\left(g^*\right)$ покладемо

$$a\left(s, g^*\right) = \left\{y : y \in a(s), p_s\left(y - g^*(s)\right) = \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \Phi_a\left(g^*\right)\right\}.$$

Крім того, для випадку, коли X є віддільним локально опуклим лінійним над полем комплексних чисел топологічним простором, позначимо через X^* — простір, топологічно спряжений з X, X_R — віддільний локально опуклий лінійний над полем дійсних чисел топологічний простір, асоційований з простором X, тобто простір X розглядуваний лише над полем дійсних чисел, X_R^* — простір, топологічно спряжений з X_R.

Елемент $\varphi \in X_R^*$ називається субградієнтом функції p, заданої на x, в точці $x_0 \in X$, якщо $p(x) - p(x_0) \geq \varphi(x - x_0), x \in X$ (див., наприклад, [2, с. 57]).

Множину субградієнтів функції p в точці $x_0 \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x_0 і позначають $\partial p(x_0)$ (див., наприклад, [2, с. 58]).

Якщо p є опуклою та неперервною на X функцією, то для $x_0 \in X$ $\partial p(x_0)$ є непорожньою опуклою слабко* компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [14, с. 327]).

Для $x_0 \in X$ будемо позначати через

$$\partial_{\mathbb{C}} p(x_0) = \left\{f : f \in X^*, \operatorname{Re} f \in \partial p(x_0)\right\}.$$

Очевидно (див., наприклад, [17, с. 269]), що

$$\partial_{\mathbb{C}} p(x_0) = \left\{f : f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix),\ x \in X, \varphi \in \partial p(x_0)\right\}.$$

Теорема 2. Якщо $g^*, z \in C(S, X)$, то справедливе співвідношення

$$\Phi_a'\left(g^*, z\right) \geq \max_{s \in S_a\left(g^*\right)} \max_{y \in a\left(s, g^*\right)} p_s'\left(y - g^*(s), -z(s)\right). \quad (27)$$

За умови, що $\Phi_a'\left(g^*, z\right) \geq 0$, має місце рівність

$$\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)=\max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\max_{y\in a\left(s,g^*\right)}p_s'\left(y-g^*(s),-z(s)\right). \quad (28)$$

Якщо X — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір, то при $\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)\geq 0$

$$\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)=\max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\max_{y\in a\left(s,g^*\right)}\max_{f\in\partial_C p_s\left(y-g^*(s)\right)}\operatorname{Re}f\left(-z(s)\right). \quad (29)$$

Доведення. Маємо, що для кожного $g\in C(S,X)$

$$\Phi_a(g)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}p_s\left(y-g(s)\right)=\max_{s\in S}\Phi_{a,s}(g).$$

Оскільки S — компакт, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір, $\left\{\Phi_{a,s}\right\}_{s\in S}$ — сім'я заданих на $C(S,X)$ опуклих функцій, для кожного $g\in C(S,X)$ відображення $s\in S\to\Phi_{a,s}(g)$ півнеперервне зверху на S (див. твердження 2),

$$S_a\left(g^*\right)=\left\{s:s\in S,\Phi_{a,s}\left(g^*\right)=\max_{s\in S}\Phi_{a,s}\left(g^*\right)=\Phi_a\left(g^*\right)\right\},$$

то згідно з наслідком 1

$$\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)\geq\max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\Phi_{a,s}^{/}\left(g^*,z\right). \quad (30)$$

Якщо ж $\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)\geq 0$, то згідно з твердженням $\left(i_4\right)$ теореми 1

$$\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)=\max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\Phi_{a,s}^{/}\left(g^*,z\right). \quad (31)$$

Оскільки для кожного $s\in S_a\left(g^*\right)$, $g\in C(S,X)$

$$\Phi_{a,s}(g)=\max_{y\in a(s)}p_s\left(y-g(s)\right)=\max_{y\in a(s)}\Phi_{a,s,y}(g),$$

де $a(s)$ — компакт, $\left\{\Phi_{a,s,y}(g)\right\}_{y\in a(s)}$ — сім'я заданих на $C(S,X)$ опуклих функцій, для кожного $g\in C(S,X)$ відображення $y\in a(s)\to\Phi_{a,s,y}(g)$ неперервне на $a(s)$ (див. твердження 1),

$$a\left(s,g^*\right)=\left\{y:y\in a(s),\Phi_{a,s,y}\left(g^*\right)=\max_{y\in a(s)}\Phi_{a,s,g}\left(g^*\right)\right\},$$

то згідно з наслідком 1

$$\Phi_{a,s}^{/}\left(g^*,z\right)\geq\max_{y\in a\left(s,g^*\right)}\Phi_{a,s,y}^{/}\left(g^*,z\right). \quad (32)$$

З (30) та (32) одержимо, що

$$\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right) \geq \max_{s\in S_a\left(g^*\right)} \max_{y\in a\left(s,g^*\right)} \Phi_{a,s,y}^{/}\left(g^*,z\right). \tag{33}$$

Нехай $\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right) \geq 0$. Відповідно до (31) існує $s_z \in S_a\left(g^*\right)$, що

$$\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right) = \max_{s\in S_a\left(g^*\right)} \Phi_{a,s}^{/}\left(g^*,z\right) = \Phi_{a,s_z}^{/}\left(g^*,z\right). \tag{34}$$

Оскільки за припущенням $\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right) \geq 0$, то і $\Phi'_{a,s_z}\left(g^*,z\right) \geq 0.$ згідно з твердженням $\left(i_4\right)$ теореми 1 має місце рівність

$$\Phi'_{a,s_z}\left(g^*,z\right) = \max_{y\in a\left(s_z,g^*\right)} \Phi_{a,s_z,y}^{/}\left(g^*,z\right). \tag{35}$$

Зі співвідношень (32), (34), (35) випливає рівність

$$\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right) = \max_{s\in S_a\left(g^*\right)} \max_{y\in a\left(s,g^*\right)} \Phi_{a,s,y}^{/}\left(g^*,z\right), \tag{36}$$

яка має місце у випадку, коли $\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right) \geq 0$. Для $s \in S_a\left(g^*\right)$, $y \in a\left(s,g^*\right)$ маємо, що

$$\begin{aligned}
\Phi_{a,s,y}^{/}\left(g^*,z\right) &= \lim_{t>0,t\to 0} \frac{\Phi_{a,s,y}\left(g^*+tz\right) - \Phi_{a,s,y}\left(g^*\right)}{t} = \\
&= \lim_{t>0,t\to 0} \frac{p_s\left(y-\left(g^*+tz\right)(s)\right) - p_s\left(y-g^*(s)\right)}{t} = \\
&= \lim_{t>0,t\to 0} \frac{p_s\left(y-g^*(s)+t\left(-z(s)\right)\right) - p_s\left(y-g^*(s)\right)}{t} = \\
&= p'_s\left(y-g^*(s),-z(s)\right).
\end{aligned} \tag{37}$$

З (33), (37) випливає (27), а з (36), (37) випливає (28).

Оскільки для $s \in S$ p_s є опуклою та неперервною на X функцією, то у випадку, коли X є віддільним локально опуклим топологічним простором має місце рівність

$$\begin{aligned}
p'_s\left(y-g^*(s),-z(s)\right) &= \max_{\varphi\in\partial p_s\left(y-g^*(s)\right)} \varphi\left(-z(s)\right) = \\
&= \max_{f\in\partial_{\mathbb{C}} p_s\left(y-g^*(s)\right)} \operatorname{Re} f\left(-z(s)\right),\ s\in S_a\left(g^*\right),\ y\in a\left(s,g^*\right)
\end{aligned} \tag{38}$$

(див., наприклад, [14, с. 328]).

З (28) та (38) випливає справедливість рівності (29) , яка має місце за умови, що $\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right) \geq 0$.

Теорему доведено.

Основні результати.

Для $g^* \in V$ позначимо через

$$K\left(V, g^*\right) = \left\{z \in C(S, X) : (\forall \varepsilon > 0)\left(\exists t_\varepsilon \in (0, \varepsilon)\right) g^* + t_\varepsilon z \in V\right\}.$$

Зрозуміло, що $K\left(V, g^*\right)$ є конусом простору $C(S, X)$ з вершиною у точці 0.

Теорема 3. Нехай V — довільна множина простору $C(S, X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (10), необхідно, щоб для всіх $z \in K\left(V, g^*\right)$ справджувались співвідношення:

$$\max_{s \in S_a\left(g^*\right)} \max_{y \in a\left(s, g^*\right)} p_s'\left(y - g^*(s), -z(s)\right) \geq 0, \tag{39}$$

якщо X — довільний лінійний топологічний простір,

$$\max_{s \in S_a\left(g^*\right)} \max_{y \in a\left(s, g^*\right)} \max_{f \in \partial_C p_s\left(y - g^*(s)\right)} \operatorname{Re} f\left(-z(s)\right) \geq 0, \tag{40}$$

якщо X — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір.

Доведення. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (10), $z \in K\left(V, g^*\right)$, $\varepsilon_k > 0$, $k \in N$, $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$. Тоді існують числа $t_k \in \left(0, \varepsilon_k\right)$, $k \in N$, такі, що $g^* + t_k z \in V$, $k \in N$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = 0$.

Оскільки $\Phi_a\left(g^* + t_k z\right) \geq \Phi_a\left(g^*\right)$, то

$$\Phi_a'\left(g^*, z\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{\Phi_a\left(g^* + t_k z\right) - \Phi_a\left(g^*\right)}{t_k} \geq 0.$$

Згідно з теоремою 2 має місце співвідношення (39), якщо X — довільний лінійний топологічний простір, та співвідношення (40), якщо X — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір.

Теорему доведено.

Теорему 3 можна сформулювати у таких еквівалентних формах.

Теорема 4. Нехай V — довільна множина простору $C(S, X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним для величини (10), необхідно, щоб для будь-якого $z \in K\left(V, g^*\right)$ існували елементи $s_z \in S_a\left(g^*\right)$, $y_z \in a\left(s_z, g^*\right)$ такі, що

$$p'_{s_z}\left(y_z - g^*\left(s_z\right), -z\left(s_z\right)\right) \ge 0,$$

якщо X — довільний лінійний топологічний простір, та елементи $s_z \in S_a\left(g^*\right)$, $y_z \in a\left(s_z, g^*\right)$, $f_z \in \partial_{\mathbb{C}} p_{s_z}\left(y_z - g^*\left(s_z\right)\right)$ такі, що

$$\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right) \le 0,$$

якщо X — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір.

Теорема 5. Нехай V — довільна множина простору $C\left(S, X\right)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним для величини (10), необхідно, щоб для будь-якого $z \in K\left(V, g^*\right)$ існували елементи $s_z \in S$, $y_z \in a\left(s_z\right)$ такі, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \max_{y\in a(s_z)} p_{s_z}\left(y - g^*(s_z)\right) = p_{s_z}\left(y_z - g^*(s_z)\right),$$

$$p'_{s_z}\left(y_z - g^*\left(s_z\right), -z\left(s_z\right)\right) \ge 0,$$

якщо X — довільний лінійний топологічний простір, та елементи $s_z \in S$, $y_z \in a\left(s_z\right)$, $f_z \in \partial_{\mathbb{C}} p_{s_z}\left(y_z - g^*\left(s_z\right)\right)$ такі, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p_s\left(y - g^*(s)\right) = \max_{y\in a(s_z)} p_{s_z}\left(y - g^*(s_z)\right) = p_{s_z}\left(y_z - g^*(s_z)\right),$$

$$\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right) \le 0,$$

якщо X — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір.

Теорема 6. Нехай V — довільна множина простору $C\left(S, X\right)$, $g^* \in V$. Якщо для кожного елемента $g \in V$ існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$ такі, що

$$p'_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right), g^*\left(s_g\right) - g\left(s_g\right)\right) \ge 0,$$

то g^* є екстремальним елементом для величини (10). За умови, коли X — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір, елемент $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (10), якщо для кожного елемента $g \in V$ існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in \partial_{\mathbb{C}} p_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)$ такі, що $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \le 0$.

Доведення. Згідно з (27) та умов теореми для кожного $g \in V$

$$\begin{gathered}\Phi'_a\left(g^*, g-g^*\right) \geq \max_{s\in S_a\left(g^*\right)} \max_{y\in a\left(s,g^*\right)} p'_s\left(y-g^*(s), g^*(s)-g(s)\right) \geq \\ \geq p'_{s_g}\left(y_g-g^*\left(s_g\right), g^*\left(s_g\right)-g\left(s_g\right)\right) \geq 0.\end{gathered} \tag{41}$$

Оскільки функція $\Phi_a(g)$, $g \in C(S,X)$, є опуклою на $C(S,X)$ (див. твердження 4), то

$$\Phi'_a\left(g^*, g-g^*\right) \leq \frac{\Phi_a\left(g^*+1\left(g-g^*\right)\right)-\Phi_a\left(g^*\right)}{1} = \Phi_a(g)-\Phi_a\left(g^*\right),$$
$$g \in C(S,X).$$

Звідси і з (41) випливає, що для всіх $g \in V$

$$\Phi_a(g)-\Phi_a\left(g^*\right) \geq \Phi'_a\left(g^*, g-g^*\right) \geq 0 .$$

Тому $\Phi_a(g) \geq \Phi_a\left(g^*\right)$, $g \in V$. Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (10).

Нехай $g \in V$ і s_g, y_g, f_g — елементи, про які йде мова в другій частині теореми. Оскільки

$$f_g \in \partial_{\mathbb{C}} p_{s_g}\left(y_g-g^*\left(s_g\right)\right),$$

то

$$\operatorname{Re} f_g \in \partial p_{s_g}\left(y_g-g^*\left(s_g\right)\right).$$

Тоді

$$p_{s_g}\left(y_g-g\left(s_g\right)\right)-p_{s_g}\left(y_g-g^*\left(s_g\right)\right) \geq \operatorname{Re} f_g\left(g^*\left(s_g\right)-g\left(s_g\right)\right) \geq 0 .$$

Звідси випливає, що для всіх $g \in V$

$$\begin{gathered}\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g(s)\right) \geq p_{s_g}\left(y_g-g(s_g)\right) \geq \\ \geq p_{s_g}\left(y_g-g^*(s_g)\right) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s\left(y-g^*(s)\right).\end{gathered}$$

Тому g^* є екстремальним елементом для величини (10).

Теорему доведено.

Становлять інтерес множини, для яких сформульована в теоремі 6 умова є не лише достатньою, а й необхідною умовою екстремальності елемента для величини (10).

Множину V простору $C(S,X)$ будемо називати Γ — множиною відносно точки $g^* \in V$, якщо $g-g^* \in K\left(V, g^*\right)$ для всіх $g \in V$. Зрозуміло, що до Γ — множин відносно точки $g^* \in V$ відносяться, зокрема, зіркові відносно g^* (див., наприклад, [18, с. 16]), в тому числі й опуклі множини.

Теорема 7. Нехай V є Γ — множиною відносно $g^* \in V$ (зірковою відносно $g^* \in V$ або опуклою множиною). Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (10), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$ такі, що

$$p'_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right), g^*\left(s_g\right) - g\left(s_g\right)\right) \geq 0 . \qquad (42)$$

Якщо X — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір, елемент $g^* \in V$ буде екстремальним елементом для величини (10) тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $g \in V$ існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in \partial_{\mathbb{C}} p_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)$ такі, що

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \leq 0 . \qquad (43)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (10). Оскільки V є Γ — множиною відносно $g^* \in V$ (зірковою відносно $g^* \in V$ або опуклою множиною), то $z = g - g^* \in$ $\in K\left(V, g^*\right)$. Тоді згідно з теоремою 4 існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$ такі, що має місце (42), а у випадку, коли X є віддільним локально опуклим лінійним топологічним простором існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in \partial_{\mathbb{C}} p_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)$ такі, що має місце (43).

Достатність умов теореми встановлено у теоремі 6.

Наслідок 2. Нехай V — підпростір простору $C\left(S, X\right)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (10), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$ такі, що

$$p'_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right), g\left(s_g\right)\right) \geq 0 . \qquad (44)$$

Якщо X — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір, елемент $g^* \in V$ буде екстремальним елементом для величини

(10) тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $g \in V$ існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in \partial_{\mathbb{C}} p_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)$ такі, що

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) \leq 0 . \tag{45}$$

Доведення. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (10). Для елемента $g \in V$ маємо, що $g^* - g \in V$. Тоді згідно з теоремою 7 існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$ такі, що $p'_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right), g\left(s_g\right)\right) \geq 0$.

Навпаки, нехай для будь-якого $g \in V$ мають місце умови наслідку. Візьмемо $g \in V$ і покладемо в (44) замість g елемент $g^* - g \in V$. Тоді одержимо, що $p'_{s_g}\left(y_g - g^*\left(s_g\right), g^*\left(s_g\right) - g\left(s_g\right)\right) \geq 0$.

Внаслідок теореми 7 g^* є екстремальним елементом для величини (10).

Аналогічно з допомогою другої частини теореми 7 доводиться справедливість другої частини наслідку.

Наслідок доведено.

Висновок. Для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента.

Список використаних джерел:

1. Гудима У. В. Умови екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої функції апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень / У. В. Гудима, В. О. Гнатюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання : [зб. наук. пр. Інституту математики НАН України]. — К. : Інститут математики НАН України. — 2011. — Т. 8, №1. — С. 75–88.
2. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
3. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения / Б. Сендов. — София : БАН, 1979. — 372 с.
4. Никольский М. С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. С.Никольский // Докл. АН СССР. — 1989. — Вып. 308, № 5. — С. 1047–1050.
5. Никольский М. С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями / М. С. Никольский // Вест. Моск. ун-та. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 76–80.

6. Чобан М. М. Теорема Стоуна-Вейерштрасса и аппроксимации выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. М. Чобан, Д. М. Ипате // Изв. АН Респ. Молдова. мат. — 1981. — №2. — С. 13–18.
7. Дудов С. И.О приближении непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображения с шаровыми образами/ С. И. Дудов, А. Б. Коноплев // Мат. заметки. — 2007. — Вып. 82, № 4. — С. 525–529.
8. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом / И. Ю. Выгодчикова // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. — №2. — С. 13–15.
9. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — Вип. 57, №12. — С. 1601–1619.
10. Дудов С. И. Критерий решения задачи наилучшего приближения сегментной функции полиномиальной полосой / С. И. Дудов, Е. В. Сорина // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. — 2008. — № 10. — С. 20-23.
11. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи / В. В.Арестов // Тр. МИАН СССР. — 1989. — Вып. 189. — С. 3–20.
12. Магарил-Ильяев Г. Г. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. — 1991. — Вып. 50, №6. — С. 85–93.
13. Демьянов В. Ф. Приближенные методы решения экстремальных задач / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1968. — 178 с.
14. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
15. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. — 1982. — Вып. 4, №5. — С. 608–613.
16. Покровський А. В. О наилучшем несимметричном приближении в пространствах непрерывных функций / А. В. Покровський // Изв. РАН. Сер. матем. — 2006. — Вып. 70, №4. — С. 175–208.
17. Кадец В. М. Курс функционального анализа : учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В. М. Кадец. — Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006. — 607 с.
18. Лейтхвейс К. Выпуклые множества / К. Лейтхвейс. — М. : Наука, 1985. — 335 с.

The necessary and sufficient conditions and criteria of the extremal element for the problem of the best at sense of the family convex functions uniform approximation of continuous compact-valued maps by set of single-valued maps are proved.

Key words: *the upper semicontinuous compact-valued maps, the best at sense of the family convex functions uniform approximation, subhradiyent, subdifferential, terms extremality.*

Отримано: 22.10.2013