

14. Антонов Л. И. Методика решения задач по электричеству / Л. И. Антонов, Л. Г. Деденко, А. Н. Матвеев. — М. : Изд.-во МГУ, 1982. — 168 с.
15. Bisability of Resonant Tunnel Diode structure with InAs Quantum Dots / K. Yoh, H. Kazama, Y. Kitashou, T. Nekano // Phys.Stat.Sol.(b). — 1997. — Vol. 204, № 3. — P. 378–381.
16. Li H. W. Hysteresis in electronic transport through an ensemble of InAs self-assembled quantum dots / H. W. Li, T. H. Wang // Physica B. — 2001. — Vol. 301, № 1. — P. 174–179.

The mathematical model topology distribution 2D-electrostatic field in the Schottky diode with built-in layer of quantum dots, which is represented as a boundary value problem for two dimensional Poisson equation with the heterogeneity in the form of series of generalized functions. The numerical algorithm for solving boundary value problems by the method of successive overrelaxation.

Key words: *mathematical model, electrostatic field, boundary value problem, Poisson equation, generalized functions.*

Отримано: 22.11.2013

УДК 517.927

В. Б. Поселюжна, канд. фіз.-мат. наук

Чортківський навчально-науковий інститут
підприємництва і бізнесу Тернопільського національного
економічного університету, м. Чортків

НЕСТАЦІОНАРНИЙ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

Розглядається питання застосування нестационарного колокаційно-ітеративного методу до розв'язування краївих задач для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами. Побудовано алгоритм методу, встановлено достатні умови його збіжності.

Ключові слова: *крайова задача, диференціальні рівняння, інтегральне рівняння, нестационарний колокаційно-ітеративний метод.*

Вступ. При математичному моделюванні фізичних, хімічних, біологічних та економічних процесів виникають різноманітні задачі для диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем.

У більшості практичних ситуацій отримання точного аналітичного розв'язку таких задач є досить складним процесом і потребує

значних зусиль, або знайдений розв'язок є не досить зручним для використання. Тому в останні десятиріччя широкого розповсюдження набули наближені методи розв'язування задач, що пов'язані із застосуванням обчислювальної техніки. У той же час пошук нових, більш ефективних, і удосконалення вже існуючих методів продовжує залишатися досить актуальною задачею.

Одними із ефективних і досить простих є методи проекційно-ітеративного типу, загальна теорія яких створена А. Ю. Лучкою [1–3].

У цій роботі запропоновано варіант модифікованого проекційно-ітеративного методу — нестационарний колокаційно-ітеративний метод для розв'язування краєвої задачі для диференціальних рівнянь з параметрами та встановлюються умови його збіжності.

Постановка проблеми. Нехай потрібно відшукати функцію $x(t)$ і параметр $\lambda \in R^l$, які задовольняють диференціальне рівняння вигляду

$$x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \dots + p_m(t)x(t) = f(t) + \lambda \cdot c(t), \quad (1)$$

$$t \in (a, b), \quad \lambda \in R^l,$$

країові умови

$$U_s(x) = \gamma_s, \quad s = \overline{0, m-1} \quad (2)$$

та додаткові умови

$$\Phi_r(x) = \nu_r, \quad r = \overline{1, l}, \quad (3)$$

де

$$U_s(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\alpha_{sjx^{(j)}(a) + \beta_{sj}x^{(j)}}(b) \right),$$

$\Phi_r(x), \quad r = \overline{1, l}$ — лінійні неперервні функціонали на класі неперервних функцій, в частковому випадку

$$\Phi_r(x) = x(t_r), \quad a < t_1 < t_2 < \dots < t_l < b, \quad r = \overline{1, l},$$

$\gamma_s, \nu_r, \alpha_{sj}, \beta_{sj}$ — задані числа, $f(t)$ — відома функція, визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, $p_i(t), i = \overline{1, m}$ — функції, визначені і неперервні на відрізку $[a, b]$, $\lambda \cdot c(t)$ — скалярний добуток вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ і неперервної вектор-функції $c(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_l(t))$, $x(t)$ — шукана функція.

Основна частина. Застосуємо до задачі (1)–(3) нестационарний колокаційно-ітеративний метод.

Представимо крайову задачу (1)–(3) у вигляді

$$(Ax)(t) + b(t)\lambda = f(t) + \lambda \cdot d(t) + (Bx)(t), \quad (4)$$

$$U_s(x) = \gamma_s, \quad s = \overline{0, m-1}, \quad (5)$$

$$\Phi_r(x) = \nu_r, \quad r = \overline{1, l}, \quad (6)$$

де

$$(Ax)(t) := x^{(m)}(t) + a_1(t)x^{(m-1)}(t) + \dots + a_m(t)x(t), \quad (7)$$

$$(Bx)(t) := g_1(t)x^{(m-1)}(t) + g_2(t)x^{(m-2)}(t) + \dots + g_m(t)x(t), \quad (8)$$

$$g_i(t) = a_i(t) - p_i(t), \quad i = \overline{1, m},$$

$$d(t) = b(t) + c(t),$$

$a_i(t)$, $g_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, — неперервні на відрізку $[a, b]$, а неперервна вектор-функція $b(t)$ підібрана таким чином, що однорідна крайова задача

$$(A\vartheta)(t) + \mu \cdot b(t) = 0, \quad (9)$$

$$U_s(\vartheta) = 0, \quad \Phi_r(\vartheta) = 0, \quad s = \overline{0, m-1}, \quad r = \overline{1, l}, \quad (10)$$

має тільки тривіальний розв'язок $\vartheta(t) = 0$, $\mu = 0$.

Суть нестационарного колокаційно-ітеративного методу для задачі (4)–(6) полягає в наступному.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано систему точок колокації $\{t_j\}$, $j = \overline{0, n}$, неспадну послідовність натуральних чисел $\{n_k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, таку, що $n_k > n_0$, $n_0 = n$, де $k \in N$ — деяке фіксоване число.

Нехай наближення $x_{k-1}(t)$, λ_{k-1} уже побудовані. Тоді k -те наближення знаходимо із такої допоміжної задачі

$$(Ax_k)(t) + \lambda_k b(t) = \vartheta_k(t), \quad (11)$$

$$U_s(x_k) = \gamma_s, \quad s = \overline{0, m-1}, \quad (12)$$

$$\Phi_r(x_k) = \nu_r, \quad r = \overline{1, l}, \quad (13)$$

в якій функція $\vartheta_k(t)$ в кожній ітерації шукається у вигляді

$$\vartheta_k(t) = \sum_{j=0}^{n_k} c_j^k \varphi_j(t), \quad (14)$$

а невідомі коефіцієнти c_j^k знаходимо з умови

$$\int_a^b (\vartheta_k(t) - u_k(t)) \varphi_i(t) dt = 0, \quad i = \overline{0, n_k}, \quad (15)$$

де

$$u_k(t) = f(t) + d(t)\mu_k + (Bz_k)(t), \quad (16)$$

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + \alpha_k(t), \quad (17)$$

$$\mu_k = \lambda_{k-1} + \theta_k , \quad (18)$$

$$\alpha_k(t) = \sum_{j=0}^n a_j^k \eta_j(t), \quad k \in N, \quad (19)$$

$$\theta_k = \sum_{j=0}^n a_j^k v_j, \quad k \in N. \quad (20)$$

Невідомі параметри a_j^k визначаємо з умови

$$u_k(t_i) - u_{k-1}(t_i) = (A\alpha_k)(t_i) + b(t_i)\theta_k. \quad (21)$$

Нульове наближення визначаємо із задачі

$$(Ax_0)(t) + \lambda_0 \cdot b(t) = u_0(t), \quad (22)$$

$$U_s(x_0) = \gamma_s, \quad s = \overline{0, m-1}, \quad (23)$$

$$\Phi_r(x_0) = v_r, \quad r = \overline{1, l}, \quad (24)$$

в якій $u_0(t)$ — задана функція.

Відносно системи функцій $\{\eta_j(t)\}$, $j = \overline{0, n}$, і системи векторів $\{v_j\}$,

$j = \overline{0, n}$, будемо вважати, що вони задані або визначаються із задачі

$$(A\eta_j)(t) + v_j \cdot b(t) = \varphi_j(t), \quad (25)$$

$$U_s(\eta_j) = 0, \quad s = \overline{0, m-1}, \quad (26)$$

$$\Phi_r(\eta_j) = 0, \quad r = \overline{1, l}, \quad j = \overline{0, n}, \quad (27)$$

де $\{\varphi_j(t)\}$ — задана система лінійно-незалежних, неперервних функцій.

Достатні умови збіжності методу і оцінки похибок в просторі $L_2([a, b])$. Алгоритм (11)–(24) зводиться до нестационарного колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма.

Для цього скористаємося тим очевидним фактом, що побудова функції $\vartheta_k(t)$ за допомогою співвідношень (14), (15) рівносильна обчисленню інтеграла

$$\vartheta_k(t) = \int_a^b P_k(t, s) u_k(s) ds, \quad (28)$$

де функція $P_k(t, s)$ визначається співвідношенням

$$P_k(t, s) = \sum_{i=0}^{n_k} \sum_{j=0}^{n_k} a_{ij} \varphi_i(t) \varphi_j(s) \quad (29)$$

і розглянемо наступні співвідношення

$$(Az_k)(t) + \mu_k \cdot b(t) = \vartheta_{k-1}(t) + \sum_{j=0}^n a_j^k \varphi_j(t), \quad (30)$$

$$U_s(z_k) = \gamma_s, \quad s = \overline{0, m-1}, \quad (31)$$

$$\Phi_r(z_k) = \nu_r, \quad r = \overline{1, l}, \quad (32)$$

які безпосередньо випливають із співвідношень (17)–(20), (11), (25).

Знайдемо розв'язок задачі (30)–(32), отримуємо

$$z_k(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)(\vartheta_{k-1}(s) + \omega_k(s))ds, \quad (33)$$

$$\mu_k = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)(\vartheta_{k-1}(s) + \omega_k(s))ds, \quad (34)$$

$$\omega_k(t) = \sum_{j=0}^n a_j^k \varphi_j(t). \quad (35)$$

Підставимо значення для $z_k(t)$ і μ_k , які виражаються співвідношеннями (33), (34) у співвідношення (16), отримуємо

$$u_k(t) = l(t) + \int_a^b K(t,s)(\vartheta_{k-1}(s) + \omega_k(s))ds, \quad (36)$$

де

$$l(t) = f(t) + d(t)\sigma + (Bh)(t), \quad K(t,s) = d(t)\Gamma(s) + B[G(t,s)].$$

Співвідношення (36) підставимо в (28), отримуємо

$$\vartheta_k(t) = \int_a^b P_k(t,s)l(s)ds + \int_a^b \int_a^b P_k(t,\tau)K(\tau,s)(\vartheta_{k-1}(s) + \omega_k(s))dsd\tau, \quad (37)$$

Умова (21) при врахуванні співвідношень (20), (25), (35) може бути записана у вигляді

$$u_k(t_i) - u_{k-1}(t_i) - \omega_k(t_i) = 0. \quad (38)$$

Отже, алгоритм (11)–(24) розв'язування країової задачі (1)–(3) зводиться до алгоритму (37), (38), (35) нестационарного колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма.

Із співвідношень (36), (37) видно, що якщо до обох частин співвідношення (35) застосувати оператор P_k , то легко отримуємо співвідношення (36).

Таким чином, збіжність методу (11)–(24) розв'язування країової задачі (1)–(3) зводиться до збіжності нестационарного колокаційно-ітеративного методу (37), (38), (35) розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма.

Отже, буде справедливою теорема, яка виражає умови збіжності запропонованого методу.

Теорема 1. Якщо виконуються умови:

$$1) \ q_n < 1;$$

$$2) \ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \left\{ g(t) - \int_a^b P_k(t,s)g(s)ds \right\}^2 dt = 0, \quad \forall g \in L_2([a,b]),$$

де q_n — додатна константа, тоді крайова задача (1)–(3) має єдиний розв’язок $x^*(t)$, λ^* і послідовності $\{x_k(t)\}$, $\{\lambda_k\}$, побудовані згідно методу (11)–(24) збігаються до цього розв’язку.

Доведення. Відомо [4], що крайова задача (1)–(3) рівносильна інтегральному рівнянню

$$u(t) = l(t) + \int_a^b K(t,s)u(s)ds, \quad (39)$$

і їх розв’язки зв’язані співвідношеннями

$$x(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)u(s)ds, \quad (40)$$

$$\lambda = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)u(s)ds. \quad (41)$$

Як встановлено раніше, алгоритм (11)–(24) зводиться до нестационарного колокаційно-ітеративного методу (37), (38), (35). Знайдемо розв’язок задачі (11)–(13), отримуємо

$$x_k(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)\vartheta_k(s)ds, \quad (42)$$

$$\lambda_k = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)\vartheta_k(s)ds. \quad (43)$$

Аналізуючи співвідношення (42), (43), приходимо до висновку, що крайова задача (1)–(3) має єдиний розв’язок і послідовності $\{x_k(t)\}$, $\{\lambda_k\}$ збігаються до цього розв’язку, якщо рівносильне їй інтегральне рівняння має єдиний розв’язок і послідовність $\{\vartheta_k(t)\}$ збігається до цього розв’язку.

Якщо $q_n < 1$, то рівняння (39) має єдиний розв’язок, отже, крайова задача (1)–(3) теж має єдиний розв’язок.

При виконанні умов 1)–2), згідно результатів роботи [4], послідовність $\{u_k(t)\}$, побудована згідно методу (36), (15), (38), збігається до розв'язку $u^*(t)$ рівняння (39).

Покажемо, що послідовність $\{\vartheta_k(t)\}$, яка визначається співвідношенням (28) теж збігається до цього розв'язку.

Справді, в силу формули (28), маємо

$$u^*(t) - \vartheta_k(t) = u^*(t) - \int_a^b P_k(t,s)u^*(s)ds + \int_a^b P_k(t,s)(u^*(s) - u_k(s))ds.$$

Тоді

$$\|u^* - \vartheta_k\|^2 \leq \|e_k\|^2 + p_n^2 \left(\|e_{k-1}\|^2 + q_n^2 \|e_{k-2}\|^2 + \dots + q_n^{2k-4} \|e_1\|^2 + q_n^{2k-2} \|h_0\|^2 \right), \quad (44)$$

$$e_k(t) = u^*(t) - \int_a^b P_k(t,s)u^*(s)ds, \quad (45)$$

а $h_k(t)$ визначається співвідношенням

$$h_{kk}(t) = u^*(t) - \vartheta_{kk}(t) - \beta_k(t).$$

Перейдемо у співвідношення (44) до границі, при цьому врахуємо умови 1)–2) теореми, отримуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^* - \vartheta_k\|^2 = 0.$$

Отже, послідовності $\{x_k(t)\}$, $\{\lambda_k\}$ збігаються до єдиного розв'язку задачі (1)–(3).

Теорема доведена.

Теорема 2. При виконанні умов теореми 1 для наближень $x_k(t)$, λ_k будуть справедливі наступні оцінки

$$\|x^* - x_k\|^2 \leq \rho^2 \left(\int_a^b e_k^2(t)dt + p_n^2 \cdot \sum_{i=1}^{k-1} q_n^{2i-2} \int_a^b e_{k-i}^2(t)dt + p_n^2 \int_a^b h_0^2(t)dt \right), \quad (46)$$

$$\|\lambda^* - \lambda_k\|^2 \leq \gamma^2 \left(\int_a^b e_k^2(t)dt + p_n^2 \sum_{i=1}^{k-1} q_{2n}^{2i-2} \int_a^b e_{k-i}^2(t)dt + p_n^2 \int_a^b h_0^2(t)dt \right), \quad (47)$$

які характеризують швидкість збіжності методу та конструктивні оцінки

$$\|x^* - x_k\| \leq \rho \left(\int_a^b r_k^2(t)dt \right)^{1/2} + \frac{\rho \cdot p_n}{1 - q_n} \cdot \left(\int_a^b \Delta_k^2(t)dt \right)^{1/2} \quad (48)$$

$$\|\lambda^* - \lambda_k\| \leq \gamma \left(\int_a^b r_k^2(t)dt \right)^{1/2} + \frac{\gamma \cdot p_n}{1 - q_n} \cdot \left(\int_a^b \Delta_k^2(t)dt \right)^{1/2}, \quad (49)$$

в яких

$$r_k(t) = u_k(t) - \int_a^b P_k(t,s)u_k(s)ds , \quad (50)$$

$$\Delta_k(t) = u_k(t) - \vartheta_{k-1}(t) - \omega_k(t) ,$$

ρ і γ — додатні константи, які фігурують у нерівностях

$$\left\| \int_a^b G(t,s)\vartheta(s)ds \right\| \leq \rho \|\vartheta\| ,$$

$$\left\| \int_a^b \Gamma(s)\vartheta(s)ds \right\| \leq \gamma \|\vartheta\|_0 , \quad \forall \vartheta \in L_2([a,b]) .$$

Доведення. Скористаємося спiввiдношеннями (40), (41), на основi яких отримуємо

$$x^*(t) - x_k(t) = \int_a^b G(t,s)(u^*(s) - \vartheta_k(s))ds , \quad (51)$$

$$\lambda^* - \lambda_k = \int_a^b \Gamma(s)(u^*(s) - \vartheta_k(s))ds . \quad (52)$$

Враховуючи оцiнку (44), маємо

$$\begin{aligned} & \left\| x^*(t) - x_k(t) \right\|^2 = \int_a^b \left\{ \int_a^b G(t,s)(u^*(s) - \vartheta_k(s))ds \right\}^2 dt \leq \\ & \leq \rho^2 \|u^* - \vartheta_k\|^2 \leq \rho^2 \left(\int_a^b e_k^2(t)dt + p_n^2 \sum_{i=1}^{k-1} q_n^{2i-2} \int_a^b e_{k-i}^2(t)dt + p_n^2 \int_a^b h_0^2(t)dt \right) , \\ & \left\| \lambda^*(t) - \lambda_k(t) \right\|_0^2 = \sum_{i=1}^l \left\{ \int_a^b \Gamma_i(s)(u^*(s) - \vartheta_k(s))ds \right\}^2 \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^l \gamma_i^2 \int_a^b (u^*(s) - \vartheta_k(s))^2 ds = \gamma^2 \|u^* - \vartheta_k\| \leq \\ & \leq \gamma^2 \left(\int_a^b e_k^2(t)dt + \sum_{i=1}^{k-1} q_n^{2i-2} \int_a^b e_{k-i}^2(t)dt + p_n^2 \int_a^b h_0^2(t)dt \right) . \end{aligned}$$

В силу спiввiдношення (28), отримуємо

$$u^*(t) - \vartheta_k(t) = u^*(t) - u_k(t) + u_k(t) - \int_a^b P_k(t,s)u_k(s)ds .$$

Тоді, використавши результати роботи [4], (50), отримаємо

$$\begin{aligned}
 \|x^*(t) - x_k(t)\| &= \left\| \int_a^b \left\{ \int_a^b G(t,s)(u^*(s) - \vartheta_k(s))ds \right\}^2 dt \right\|^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \left\| \int_a^b \left\{ \int_a^b G(t,s)(u^*(s) - u_k(s))ds \right\}^2 dt + \right. \\
 &\quad \left. \int_a^b \left\{ \int_a^b G(t,s) \left(u_k(s) - \int_a^b P_k(t,s)u_k(s) ds \right) ds \right\}^2 dt + \right\|^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \rho \cdot \left\{ \int_a^b |u^*(t) - u_k(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \leq \rho \cdot \left\{ \int_a^b \left| u_k(t) - \int_a^b P_k(t,s)u_k(s) ds \right|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{\rho \cdot p_n}{1 - q_n} \left(\int_a^b \Delta_k^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + \rho \left(\int_a^b r_k^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо оцінку (49)

$$\begin{aligned}
 \|\lambda^* - \lambda_k\|_0 &= \left\| \sum_{i=1}^l \left\{ \int_a^b \Gamma_i(s)(u^*(s) - \vartheta_k(s))ds \right\}^2 ds \right\|^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \left\| \sum_{i=1}^l \left\{ \int_a^b \Gamma_i(s) \left(u_k(s) - \int_a^b P_k(t,s)u_k(s) ds \right) ds \right\}^2 ds \right\|^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \gamma \cdot \left\{ \int_a^b |u^*(t) - u_k(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \gamma \left\{ \int_a^b \left| u_k(t) - \int_a^b P_k(t,s)u_k(s) ds \right|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{\gamma \cdot p_n}{1 - q_n} \left(\int_a^b \Delta_k^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + \gamma \left(\int_a^b r_k^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Висновки. Встановлено достатні умови збіжності нестационарного колокацийно-ітеративного методу розв'язування крайової задачі

для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами. Одержано оцінки швидкості збіжності методу та конструктивні оцінки.

Отримані результати використовуються для подальших досліджень наближених методів проекційно-ітеративного типу.

Список використаних джерел:

1. Лучка А. Ю. Критерии сходимости проекционно-итеративного метода для нелинейных уравнений / А. Ю. Лучка. — К., 1982. — 54 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.24).
2. Лучка А. Ю. Достаточные условия сходимости модифицированного проекционно-итеративного метода для уравнений со слабой нелинейностью / А. Ю. Лучка // Укр. мат. журн. — 1990. — Т. 42, № 12. — С. 1626–1635.
3. Лучка А. Ю. Прекционно-итеративные методы / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1993. — 288 с.
4. Поселюжна В. Б. Розв'язування деяких класів інтегральних рівнянь нестационарним колокаційно-ітеративним методом / В. Б. Поселюжна, Л. М. Семчишин // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-мат. науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2012. — Вип. 6. — С. 195–204.

The question of non stationary collocation-iterative method appliance concerning the boundary problem solution for the simple differential equations with parameters is substantiated. The methods algorithm is built, and sufficient conditions for convergence are found here.

Key words: *boundary problem, differential equations, integral equations, non stationary collocation- iterative method.*

Отримано: 31.10.2013