УДК 517.19

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук, професор,
І. В. Дорошенко, канд. фіз.-мат. наук,
С. В. Антонюк, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, м. Чернівці

ПРО ІСНУВАННЯ СИЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФУЗІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ВСІЄЮ ПЕРЕДІСТОРІЄЮ ТА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ КОНТРАКТОРАМИ

У статті розглядається дифузійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння (ДСДФР$_\infty$) з інтегральним контактором. Встановлено умови існування з ймовірністю одиниця та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв'язку ДСДФР$_\infty$ з інтегральним контактором.

Ключові слова: *дифузійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння, інтегральний контактор, сильний розв'язок.*

Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$ з потоком мінімальних σ-алгебр $\boldsymbol{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}$ [1], [2] задано дифузійне стохастичне диференціально-функціональне рівняння (ДСДФР$_\infty$) [3]

$$dx(t) = a(t, \theta_t x)dt + b(t, \theta_t x)dw(t) \tag{1}$$

за початковою умовою

$$\theta_0 x = \varphi(\theta, \omega), \tag{2}$$

де $\{\theta_t x\}$ — сімейство операторів [4], що визначаються співвідношенням $\theta_t x \equiv x(t+\theta), \theta \in (-\infty, 0], 0 \leq t < \infty$. Тут $\{x(t) \equiv x(t, \omega)\}$: $[0,\infty] \times \Omega \to R^n$; $\varphi : (-\infty, 0] \times \Omega \to R^n$; $C \equiv C((-\infty, 0], R^n)$; $a : [0,\infty] \times C \to R^n$; $b : [0,\infty] \times$ $\times C \to M_n(C)$ — матриця $n \times n$; $w(t) \equiv w(t, \omega)$ n-вимірний вінерів процес.

Означення 1. Сильним розв'язком задачі Коші для ДСДФР$_\infty$ (1), (2) назвемо n-вимірний випадковий процес $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \boldsymbol{R}^n$, який з ймовірністю одиниця задовольняє інтегральне рівняння [5]

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t a(s, \theta_s x)ds + \int_0^t b(s, \theta_s x)dw(s) \tag{3}$$

та початкову умову (2).

Далі на $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$ розглянемо новий випадковий процес $\{y(t) \equiv y(t, \omega)\} : (-\infty, \infty) \times \Omega \to R^n$, який вносить нову якість для сильного розв'язку ДСДФР$_\infty$ (1), (2), що описує характеристики конкретного стохастичного експерименту шляхом обчислення середнього значення $E\{x(t)\}$ та коваріаційної матриці $K(t,s) \equiv D\{(x(t),x(s)\},0 \le s \le t$. Для $\{x(t),y(t)\} \subset C$ введемо випадковий процес $\{z(t) \equiv z(t,\omega)\} \in R^n$, що визначається інтегральним рівнянням

$$z(t) \equiv y(t) + \int_0^t G_1(s,\theta_s x) y(s) ds + \int_0^t G_2(s,\theta_s x) y(s) dw(s), \tag{5}$$

де $G_i(t,x_t):(-\infty,\infty)\times C \to M_n(C)$, $i=1,2$ — обмежені неперервні матриці-функціонали, $M_n(C)$ — матриця над простором розмірності $n\times n$.

Припустимо, що існує додатна стала K , така, що для $\forall\ t \in [0,T]$ виконуються нерівності з ймовірністю одиниця

$$\left|a(t,\theta_t x-\theta_t z)-a(t,\theta_t x)-G_1(t,\theta_t x)y\right| \le K\left\|\theta_t y\right\|, \tag{6}$$

$$\left|b(t,\theta_t x-\theta_t z)-b(t,\theta_t x)-G_2(t,\theta_t x)y\right| \le K\left\|\theta_t y\right\|, \tag{7}$$

де в просторі C норма

$$\left\|\theta_t x\right\| \equiv \sup_{-\infty<\theta\le 0} |\, x(t+\theta)\,| \tag{8}$$

визначена для $\forall\ t \in [0,T]$.

Означення 2. Якщо умови (6)–(7) виконуються, то говорять, що коефіцієнти ДСДФР$_\infty$ (1), (2) мають обмежені інтегральні контрактори.

Означення 3. Обмежений випадковий контрактор є правильним, якщо ДСДФР$_\infty$ (5) має з ймовірністю одиниця сильний розв'язок в C для довільних $x(t)$ і $z(t)$ з C .

Означення 4. Говорять, що функціонал $h:[0,T]\times C \to R^n$ є стохастично замкнений, якщо для довільних послідовностей випадкових процесів $\{x^{(n)}(t) \equiv x^{(n)}(t,\omega), x(t)\} \subset C$ та $\{y^{(n)}(t) \equiv y^{(n)}(t,\omega), y(t)\} \subset C$ таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}(t) = x(t)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y^{(n)}(t) = y(t)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} h(t,\theta_t\, x^{(n)},\ \ y^{(n)}(t)) = z(t)$, де $z(t) \equiv h(t,\theta_t x, y)$ для $\forall\ t \in [0,T]$ з ймовірністю одиниця.

Зауважимо, що якщо функціонали a , b є ліпшицевими за другим аргументом, то вони, очевидно, в силу вище визначених означень, є стохастично замкненими і мають правильний обмежений випадковий інтегральний контрактор з $G_i = 0$, $i = 1,2$.

Про існування сильного розв'язку ДСДФР з інтегральними контракторами. Нехай маємо для деякого стохастичного експерименту постановку задачі п.1. Тоді встановимо існування з ймовірністю одиниця сильного розв'язку ДСДФР$_\infty$ (1), (2) з інтегральним контактором (5).

Теорема 1. Нехай:

1) коефіцієнти ДСДФР$_\infty$ (1) є стохастично замкненими;
2) коефіцієнти ДСДФР$_\infty$ (1) мають обмежений випадковий інтегральний контрактор;
3) для довільного $\varphi \in C((-\infty,0])$ існують інтеграли

$$\int_0^T \|a(t,\varphi)\|^2\,dt < +\infty\,;\ \int_0^T \|b(t,\varphi)\|^2\,dt < \infty\,.$$

Тоді існує з ймовірністю одиниця розв'язок $x(t) \in R^n$ задачі Коші (1), (2), (5).

Доведення. Доведення викладемо в декілька етапів.

I. Введемо наступну ітераційну процедуру. Для $n \geq 0$

$$\begin{aligned} x^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(t) - y^{(n)}(t) - \int_0^t G_1(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)ds - \\ -\int_0^t G_2(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)dw(s); \end{aligned} \tag{9}$$

або

$$x^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(t) - z^{(n)}(t),\ 0 \leq t \leq T. \tag{9'}$$

$$x^{(0)}(t) = \varphi(0),\ t \geq 0,$$

$$x^{(n)}(t) = \varphi(t),\ -\infty < t \leq 0,$$

$$y^{(n)}(t) = x^{(n)}(t) - x(0) - \int_0^t a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))ds - \int_0^t b(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))dw(s), \tag{10}$$

$$0 \leq t \leq T,\ y_n(t) = 0,\ -\infty < t \leq 0.$$

II. Побудова $(n+1)$-го наближення.

Підставляючи (9) в (10) для $(n+1)$-го наближення, можна записати рівності:

$$y^{(n+1)}(t) = x^{(n+1)}(t) - x(0) - \int_0^t a(s,\theta_s x^{(n+1)}(\theta))ds -$$

$$-\int_0^t b(s,\theta_s x^{(n+1)}(\theta))dw(s) = x^{(n+1)}(t) - x(0) -$$

$$-\int_0^t a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta) - \theta_s z^{(n)}(\theta))ds - \int_0^t b(s,\theta_s x^{(n)} - \theta_s z^{(n)})dw(s) =$$

$$= x^{(n)}(t) - x^{(n)}(t) + x(0) + \int_0^t a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))ds +$$

$$+\int_0^t b(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))ds - \int_0^t G_1(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)ds - \qquad (11)$$

$$-\int_0^t G_2(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)dw(s) - x(0) -$$

$$-\int_0^t a(s,\theta_s x^{(n)} - \theta_s z^{(n)})ds - \int_0^t b(s,\theta_s x^{(n)} - \theta_s z^{(n)})dw(s) =$$

$$= \int_0^t [a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta)) - G_1(s,\theta_s x_s^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s) - a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta) - \theta_s z^{(n)}(\theta))]ds +$$

$$+\int_0^t [b(s,\theta_s x^{(n)}(\theta)) - G_2(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s) - b(s,\theta_s x^{(n)}(\theta) - \theta_s z^{(n)}(\theta))]dw(s).$$

III. Знаходження оцінки для $\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|^2\right\}$.

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського [6] для оцінки звичайної верхньої межі

$$\boldsymbol{E}\left\{\left|\int_0^t 1\cdot g(s)ds\right|^2\right\} \le T\cdot\int_0^t \boldsymbol{E}\{|\,g(s)\,|^2\}ds \qquad (12_1)$$

Для інтеграла Вінера-Іто мають місце твердження [1]

$$\boldsymbol{E}\left\{\left|\int_0^t g(s,\omega)dw(s)\right|^2\right\} = \int_0^t \boldsymbol{E}\{|\,g(s,\omega)\,|^2\}ds; \qquad (12_2)$$

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^s g(s,\omega)dw(s)\right|^2\right\} \le 4\int_0^T \boldsymbol{E}\{|\,g(s,\omega)\,|^2\}ds. \qquad (12_3)$$

Згідно співвідношенням (12_1)–(12_3) матимемо оцінку зверху для норми $\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|$, а саме:

$$\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|^2 \le \left(\sup_{0\le t\le T}\,\left|\int_0^t [a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta)) -\right.\right.$$

$$-G_1(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s) - a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta) - \theta_s z^{(n)}(\theta))]ds\,\Big| +$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t b(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))-G_2(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-$$

$$-b(s,x_s^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))dw(s)|\le 2[\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t [a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))-$$

$$-G_1(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta)-\theta_s z^{(n)}(\theta))]ds|^2+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t [b(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))-G_2(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-$$

$$-b(s,\theta_s x^{(n)}(\theta)-\theta_s z^{(n)}(\theta))]dw(s)|^2 .$$

IV. Знаходження умовного математичне сподівання від $\left|y^{n+1}(t)\right|^2$ відносно σ -алгебри $\mathcal{F}_o$.

За означення умовного математичного сподівання та оцінки для $\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|^2$ у пункті III, одержимо оцінку справа

$$\boldsymbol{E}\{|y^{(n+1)}(t)|^2\}=\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|^2\right\}\le 2[\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t [a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))-$$

$$-G_1(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-a(s,\theta_s x^{(n)}(\theta)-\theta_s z^{(n)}(\theta))]ds|^2\}+$$

$$+\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t [b(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))-\ G_2(s,\theta_s x^{(n)}(\theta))y^{(n)}(s)-$$

$$-b(s,\theta_s x^{(n)}(\theta)-z_s^{(n)}(\theta))]dw(s)|^2\}\le \tag{13}$$

$$\le 2K^2[\boldsymbol{E}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t \left\|y^{(n)}(s)\right\|ds|^2\right\}+\boldsymbol{E}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t \left\|y^{(n)}(s)\right\|dw(s)|^2\right\}\le$$

$$\le 2K^2[T\int_0^t \boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds+4\int_0^t \boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds=$$

$$=2K^2[T\int_0^t \boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds+4\int_0^t \boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds=$$

$$=2K^2(T+4)\int_0^t \boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|^2\right\}ds.$$

Якщо здійснити n ітерацій справа у (13), то легко одержати оцінку справа для $\forall\, t\in[0,T]$

$$\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n+1)}(s)\right\|^2\right\} \le [2K^2(T+4)]^n \int_0^t (T-s)^n \boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(0)}(s)\right\|^2\right\} ds, \qquad (14)$$

де

$$y^{(0)}(t) = -\int_0^t a(s, \theta_s x^{(0)}(\theta))ds - \int_0^t b(s, \theta_s x^{(0)}(\theta))dw(s)$$

та $x^{(0)}(s-\tau) = \varphi(0)$, якщо $s \ge \tau$; $x^{(0)}(s-\tau) = \varphi(s-\tau)$, якщо $s < \tau$.

V. Оцінка $\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(0)}(s)\right\|^2\right\}$ з використанням техніки оцінювання $\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|^2\right\}$ (див. п.IV).

$$\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(0)}(s)\right\|^2\right\} = \boldsymbol{E}\{(\sup_{0\le s\le t} | y^{(0)}(s)|)^2\} \le$$

$$\le 2\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le s\le t} |\int_0^s a(\tau, \theta_\tau x^{(0)})d\tau|^2 + \sup_{0\le t\le T} |\int_0^s b(\tau, \theta_\tau x^{(0)})dw(\tau)|^2 \le$$

$$\le 2(\boldsymbol{E}\{\sup_{0\le s\le t} |\int_0^s a(\tau, \theta_\tau x^{(0)})d\tau|^2\} + \boldsymbol{E}\{\sup_{0\le s\le t} |\int_0^s b(\tau, \theta_\tau x^{(0)})dw(\tau)|^2\} \le$$

$$\le 2(T\int_0^t \boldsymbol{E}\{|a(\tau, \theta_\tau x^{(0)})|^2\}d\tau + 4\int_0^t \boldsymbol{E}\{|b(\tau, \theta_\tau x^{(0)})|^2\}d\tau).$$

Оскільки відображення a, b є неперервними за змінною $t \in [0,T]$, то існують додатні сталі K_1, K_2, які обмежують їх.

Отже, остаточно одержимо

$$\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(0)}(t)\right\|\right\}^2 \le 2(T\int_0^t K_1^2 d\tau + 4\int_0^t K_2^2 d\tau \le 2(T^2K_1^2 + 4K_2^2T \le \Delta, \qquad (15)$$

де $\Delta = 2T(TK_1^2 + KC_2^2) > 0.$

Враховуючи одержану оцінку (15), оцінка (14) для $\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n+1)}(t)\right\|^2\right\}$ набуде вигляду

$$\boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(t)\right\|\right\}^2 \le \Delta[2K^2(T+4)]^n \cdot \frac{T^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (16)$$

для $\forall t \in [0,T]$, $n = 1, 2, \ldots$.

VI. Остаточна оцінка для математичного сподівання квадрату норми $(n+1)$ -го наближення $y^{n+1}(t)$.

Введемо позначення

$$\alpha_n(t) \equiv a(t,\theta_t x^{(n)}) - G_1(t,\theta_t x^{(n)})y^{(n)}(t) - a(t,\theta_t x^{(n)} - \theta_t z^{(n)});$$

$$\beta_n(t) \equiv b(t,\theta_t x^{(n)}) - G_2(t,\theta_t x^{(n)})y^{(n)}(t) - b(t,\theta_t x^{(n)} - \theta_t z^{(n)}). \quad (17)$$

Тоді рівність (11) прийме вигляд

$$y^{(n+1)}(t) = \int_0^t \alpha_n(s)ds + \int_0^t \beta_n(s)dw(s).$$

А значить очевидна наступна нерівність

$$\sup_{0\le s\le t} |y^{(n+1)}(t)| \le \int_0^T |\alpha_n(s)|ds + \sup_{0\le t\le T} |\int_0^t \beta_n(s)dw(s)|. \quad (18)$$

VII. Оцінка за ймовірністю інтегралів у правій частині (18).

Тепер оцінимо кожний з цих двох інтегралів у (18). Використовуючи (6), (7), (8) і (16) легко провести оцінку

$$P\{\omega : \int_0^T |\alpha_n(s)|ds > 3^{-n-2}\} \le$$

$$\le 3^{2n+2}\int_0^T \boldsymbol{E}\{|\alpha_n(s)|^2\}ds \le 3^{2n+3}K^2\int_0^T \boldsymbol{E}\left\{\left\|y^{(n)}(s)\right\|\right\}^2\}ds \le \quad (19)$$

$$\le 3^{2n+3}K^2T\Delta[2K^2(T+4)]^n \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{3K_3^{n+1}\Delta T^2}{2(T+4)(n+1)!},$$

де $K_3 \equiv 18\cdot K^2T(T+4)$.

Аналогічно матимемо

$$\boldsymbol{P}\{\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t \beta_n(s)dw(s)| > 3^{-n-2}\} \le \frac{3K_3^{n+1}\Delta T^2}{2(T+4)(n+1)!}. \quad (20)$$

Нарешті з (18) і попередніх оцінок (14), (15) випливає нерівність

$$\boldsymbol{P}\{\omega : \sup_{0\le t\le T} |y^{(n+1)}(t)| > 3^{-n-2}\} \le \boldsymbol{P}\{\omega : \int_0^T |\alpha_n(s)|ds > 3^{-n-2}\} +$$

$$+\boldsymbol{P}\{\omega : \sup_{0\le t\le T} |\int_0^t \beta_n(s)dw(s)| > 3^{-n-2}\} > 3^{-n-2}\} \le \frac{3K_3^{n+1}\Delta T}{(n+1)!}. \quad (21)$$

VIII. Оцінка різниці сусідніх ітерацій розв'язку (1), (2).

З інтегральної процедури (9) випливає очевидна оцінка зверху для ймовірностей $\boldsymbol{P}\{\omega : \sup_{0\le t\le T} |x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)|\}$ по $t\in[0,T]$ сусідніх ітерацій

$$\boldsymbol{P}\{\omega : \sup_{0\le t\le T} |x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t)|\} <$$

$$< \boldsymbol{P}\{\omega : \sup_{0\le t\le T} | y^{(n)}(t) | + \int_0^T | G_1(s, \theta_s x_s^{(n)}) y^{(n)}(s) | ds + \tag{22}$$

$$+ \sup_{0\le t\le T} | \int_0^t G_2(s, \theta_s x^{(n)}) y^{(n)}(s) dw(s) | .$$

Оцінка інтегралів у правій частині нерівності (22).

Введемо позначення

$$S_1 \equiv \sup\{| G_1(t, \theta_t x \ ) |, t \in [0, T], \theta_t x \in \mathrm{C}\};$$

$$S_2 \equiv \sup\{| G_2(t, \theta_t x) |, t \in [0, T], \theta_t x \ \in \mathrm{C}\}. \tag{23}$$

Тоді використовуючи (16), одержимо оцінки справа для ймовірностей інтегралів у (22), а саме:

$$\boldsymbol{P}\{\omega : \int_0^T | G_1(s, \theta_s x^{(n)}) y^{(n)}(s) | ds > 3^{-n}\} \le$$

$$\le 3^{2n} \boldsymbol{E}\{\int_0^T | G_1(s, \theta_s x^{(n)}) y^{(n)}(s) |^2 \ ds\} \le$$

$$\le 3^{2n} T \int_0^T \boldsymbol{E}\{| G_1(s, \theta_s x^{(n)}) y^{(n)}(s) |^2\} ds \le \tag{24}$$

$$\le S_1^2 \cdot 3^{2n} T K^2 \int_0^T \boldsymbol{E}\left\{\left\| y^{(n)}(s) \right\|\right\}^2 \} ds \le$$

$$\le 3^{2n} T^2 K^2 [2K^2 (T+4)]^n \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \Delta \cdot S_1^2 \le \frac{S_1^2 \Delta T^3 l^n}{(n+1)!},$$

де $l^n = 3^{2n} K^2 [2K^2 (T+4)]^n T^n$.

Аналогічно

$$\boldsymbol{P}\{\omega : \sup_{0\le t\le T} | \int_0^t G_2(s, \theta_s x^{(n)}) y^{(n)}(s) dw(s) | > 3^{-n}\} \le \frac{S_2^2 \Delta T^2 l^n}{(n+1)!}. \tag{25}$$

З (9), (21) та з останніх оцінок (24), (25) можна одержати ланцюжок нерівностей:

$$\boldsymbol{P}\{\omega : \sup_{0\le t\le T} | x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) | > 4 \cdot 3^{-n}\} \le$$

$$\begin{aligned} &\le [\frac{3\Delta T l^n}{(T+4)(n+1)!} + \frac{S_1^2 \Delta T^3 l^n}{(n+1)!} + \frac{S_2^2 \theta T^2 l^n}{(n+1)!}] \cdot 4^2 \cdot 3^{2n} = \\ &= \frac{4^2 \cdot 3^{2n} \Delta T l^n}{(n+1)!} [\frac{3}{(T+4)} + S_1^2 T^2 + S_2^2 T] = \frac{4^2 \cdot 3^{2n} \Delta T l^n}{(T+4)(n+1)!} \times \\ &\times [3 + (T+4) T^2 S_1^2 + (T+4) T S_2^2]. \end{aligned} \tag{26}$$

Далі за лемою Бореля-Кантеллі [6] матимемо

$$\boldsymbol{P}\{\omega : \lim_{n\to\infty}(\sup_{0\le t\le T} | x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) |) > 4\cdot 3^{-n}\} = 0.$$

Тобто, для достатньо великих n виконується оцінка

$$\boldsymbol{P}\{\omega : \sup_{0\le t\le T} | x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) | \le 4\cdot 3^{-n}\} = 1. \qquad (27)$$

Отже, послідовність $\{x_n(t), n = 1, 2, \ldots\}$ з ймовірністю одиниця збіжна до стохастичного процесу $x^*(t)$. За теоремою Вейєрштрасса [7] про рівномірну збіжність випливає, що ця збіжність є рівномірною на $[0,T]$.

Якщо використати означення для $x^*(t)$, поклавши $x^*(t) = \varphi(t)$ для $\forall\ t \in (-\infty, 0]$, то одержимо, що траєкторія $x^*(t)$ неперервна з ймовірністю одиниця на $(-\infty, T]$, тобто $x^*(t) \in C$.

IX. Доведення того, що $x^*(t)$ є розв'язком (1)–(3).

Встановимо спочатку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x^*(t)$ в C. З твердження (27) з ймовірністю одиниця для нерівності $\sup\limits_{0\le t\le T} | x^{(n+1)}(t) - x^{(n)}(t) | \le 4\cdot 3^{-n}$ одержимо нерівність для математичного сподівання, а саме:

$$\boldsymbol{E}\{ \sup_{0\le t\le T} | x^*(t) - x^{(n)}(t) |^2\} \le \boldsymbol{E}\{ \lim_{m\to\infty} \sup_{0\le t\le T} | x^{(n+m)}(t) - x^{(n)}(t) |^2\} \le$$

$$\le \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{E}\{ \sum_{k=n}^{n+m-2} \sup_{0\le t\le T} | x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t) |^2\} \le 4\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n}^{n+m-2} 3^{-k} \right)^2 \to 0.$$

Таким чином, в розумінні збіжності в L^2 [7] одержимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x^*(t)$.

Використовуючи стохастичну замкненість функцій a, b за означенням 4 одержимо для $\forall\ t \in [0,T]$ з ймовірністю одиниця

$$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} a(t, \theta_t x^{(n)}) = a(t, \theta_t x^*)\} = 1;$$

$$P\{\omega : \lim_{n\to\infty} b(t, \theta_t x^{(n)}) = b(t, \theta_t x^*)\} = 1.$$

Значить

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}\{| \int_0^t a(s, \theta_s x^{(n)}) ds - \int_0^t a(s, \theta_s x^*) ds |^2\} \le \\ &\le T \int_0^T \boldsymbol{E}\{| a(s, \theta_s x^{(n)} - a(s, \theta_s x^*)) |^2\} ds \to 0 \text{ при } n \to \infty. \end{aligned} \qquad (28)$$

Аналогічно

$$\boldsymbol{E}\{|\int_0^t b(s,\theta_s x^{(n)})dw(s)-\int_0^t b(s,\theta_s x^*)dw(s)|^2\}\le$$
$$\le T\int_0^T \boldsymbol{E}\{|b(s,\theta_s x^{(n)}-b(s,\theta_s x^*))|^2\}ds\to 0 \text{ при } n\to\infty. \quad (29)$$

Якщо обчислити границі (28), (29) в розумінні збіжності в L^2 і застосувати їх до обох сторін рівності (9), то одержимо виконання з ймовірністю одиниця $\forall\ t\in[0,T]$ рівності

$$x^*(t)=x(0)+\int_0^t a(s,\theta_s x^*)ds+\int_0^t b(s,\theta_s x^*)dw(s),$$

а також $x^*(t)=\varphi(t)$ для $\forall\ t\in(-\infty,0]$.

Також, випадкові процеси зліва і справа останньої рівності не мають стрибків другого роду. Отже, ця рівність має місце для $\forall\ t\in[0,T]$ з ймовірністю одиниця, а $x^*(t)$ є розв'язком (1)-(3).

Єдиність з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язку ДСДФР$_\infty$ з інтегральними контракторами.

Розглянемо задачу про єдиність розв'язку задачі (1), (2), (5).

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і обмежений випадковий контрактор для ДСДФР$_\infty$ (1), (2) є правильним. Тоді розв'язок $x(t)$ задачі (1), (2), (5) є єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності.

Доведення. Нехай $x^1(t)$, $x^2(t)$ — два розв'язки задачі (1), (2), (5). Тоді $x(t)\equiv x^1(t)$, $z(t)\equiv x^2(t)-x^1(t)$ в (5). Отже, існує $y(t)$ з C, який є розв'язком рівняння

$$x^2(t)-x^1(t)=y(t)+\int_0^t G_1(s,\theta_s x^1)y(s)ds+\int_0^t G_2(s,\theta_s x^1)y(s)dw(s). \quad (30)$$

Тоді, враховуючи (1) та (30) можна записати очевидне стохастичне інтегральне рівняння

$$y(t)=\int_0^t [a(s,\theta_s x^2)-a(s,\theta_s x^1)-G_1(s,\theta_s x^1)y(s)]ds+$$
$$+\int_0^t [b(s,\theta_s x^2)-b(s,\theta_s x^1)-G_2(s,\theta_s x^1)y(s)]dw(s)=$$

$$- = \int_0^t [a(s, \theta_s x^1 + \theta_s z\ ) - \ a(s, \theta_s x^1) - G_1(s, \theta_s x^1) y(s)] ds +$$

$$+ \int_0^t [b(s, \theta_s x^1 + \theta_s z\ ) - b(s, \theta_s x^1) - G_2(s, \theta_s x^1) y(s)] dw(s)\ .$$

Звідки очевидна оцінка

$$\sup_{0 \le s \le t} |\, y(s) \,| \le K \int_0^t \| y(s) \| ds + K \sup_{0 \le s \le t} \int_0^t \| y(s) \| dw(s),$$

$$\boldsymbol{E} \| y(t) \|^2 \} = \boldsymbol{E} \{ \sup_{0 \le s \le t} |\, y(s) \,|^2 \} \le$$

$$\le 2TK^2 \int_0^t \boldsymbol{E} \| y(s) \|^2 \} ds + 4K^2 \int_0^t \boldsymbol{E} \{ \| y(s) \|^2 \} ds + 4K^2 \int_0^t \boldsymbol{E} \{ \| y(s) \|^2 \} ds) \le$$

$$\le 2K^2 (T+4) \int_0^t \boldsymbol{E} \{ \| y(s) \|^2 \} ds.$$

Використаємо посилену нерівність Гронуола [1]: для вимірних функцій $\varphi(t)$ і $\alpha(t)$, для яких виконується співвідношення

$$\varphi(t) \le \alpha(t) + L \int_0^t \varphi(s) ds,\ L > 0,$$

справедлива нерівність

$$\varphi(t) \le \alpha(t) + L \int_0^t e^{L(t-s)} \alpha(s) ds. \qquad (31)$$

Якщо позначити $\varphi(t) \equiv \boldsymbol{E} \{ \| y(t) \|^2 \}$, $L = 2K^2 (T+4)$, $\alpha(t) \equiv 0$, то

$$0 \le \boldsymbol{E} \{ \| y(t) \|^2 \} \le 2K^2 (T+4) \int_0^t e^{2K^2 (T+8)} \cdot 0 ds \le 0.$$

Значить матимемо $\boldsymbol{P} \{ \omega : \{ \| y(t) \|^2 / F_0 \} = 0 \} = 1$ для $\forall\ t \in [0, T]$.

Згідно з властивостями умовного математичного сподівання [3] одержимо $y(t) \equiv 0$. Тоді, використовуючи (26) і (30), матимемо

$$0 \le \boldsymbol{P} \{ \sup_{0 \le t \le T} |\, x^1(t) - x^2(t) \,| \ne 0 \} \le$$

$$\le \frac{4^2 \cdot 3^{2n} T \theta a^n}{(n+1)!(T+4)} [3 + (T+4) T^2 S_1^2 + (T+4) T S_2^2] \to 0 \text{ при } n \to \infty\ .$$

Отже, $\boldsymbol{P} \{ x^1(t) \ne x^2(t) \} = 0$.

Продовжуючи розв'язки $\{x^1(t)\}$ і $\{x^2(t)\}$ вправо, матимемо $x^1(t) = x^2(t)$ для $\forall\ t \in [0,T]$. Отже, розв'язок єдиний з точністю до стохастичної еківалентності, що і треба було довести.

Висновки. Встановлено умови існування з ймовірністю одиниця та єдиності з точністю до стохастичної еквівалентності сильного розв’язку ДСДФР$_\infty$ з інтегральним контактором.

Список використаних джерел:

1. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1982. — 612 с.
2. Гихман И. И. Теория случайных процессов : в 3-х т. / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М. : Наука, 1975. — Т. 3. — 496 с.
3. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп’ютерна практика : в 3-х т. / В. С. Королюк, Є.Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Вид-во «Золоті литаври», 2009. — Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп’ютерна практика — 798 с.
4. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функционалных уравнений / Е. Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1989. — 421 с.
5. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1987. — 328 с.
6. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М. : Мир, 1984. — 421 с.
7. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 541 с.

The paper presents diffusion stochastic differential-functional equation (DSDFR$_\infty$) with integral contactor. The conditions of existence of unit probability and uniqueness up to stochastic equivalence strong solution DSDFR$_\infty$ with integral contactor.

Key words: *diffusion stochastic functional differential equations, integral contactor, strong solution.*

Отримано: 11.11.2013