Nehari manifold. Therefore, in this case, the method of periodic approximations is used, i.e., the critical points of the functional that corresponds to localized solutions are constructed using the passage to the limit (with a period *k* tending to infinity) at the critical points of the functional that corresponds to *k*-periodic solutions. The obtained localized solutions are the solutions of the corresponding minimization problem.

Key words: *discrete Klein-Gordon type equations, standing waves, critical points, Nehari manifold.*

Отримано: 19.10.2021

УДК 004.942:519.876.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.19-26

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,
В. А. Федорчук**, д-р техн. наук, професор

*Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ,
**Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ

Стаття присвячена проблемі отримання інтегральних математичних моделей теплових об’єктів з вихідного рівняння теплопровідності, що подано у диференціальній формі. Розглядається випадок оберненої задачі для рівняння теплопровідності, яка є некоректною. При розв’язуванні як прямих, так і обернених задач динаміки з використанням обчислювальних методів важливе значення має вибір форми математичного опису моделі. Навіть моделі, які отримані з вихідних моделей в результаті еквівалентних перетворень при числовій реалізації видають нееквівалентні розв’язки. Тому для розв’язування обернених задач динаміки доцільно використовувати інтегральні математичні моделі, які володіють високою обчислювальною стійкістю. В інтегральній постановці такі некоректні обернені задачі успішно розв’язуються за допомогою методів регуляризації. У статті розглянуто два варіанти оберненої задачі. В першому варіанті зворотна задача розглядається в постановці Діріхле, а в другому варіанті розглядається задача Неймана. В обох варіантах зворотні задачі, що подані в диференціальній формі шляхом еквівалентних перетворень подаються у вигляді інтегральних рівнянь першого роду. Для отриманих інтегральних моделей показано, що розв’язки рівнянь єдині. Перевагою отриманих інтегральних моделей є їх відносна простота і широкий спектр розроблених методів їх числової реалізації на основі застосування різних квадратурних формул. Крім того, ядра отриманих інтегральних рівнянь можуть фізично інтерпретуватися як імпульсні перехідні характеристики теплопровідного середовища. Це дає змогу їх ідентифікації за перехідними характеристиками теплопровідного середовища, які можна отримати експериментальним шляхом.

Ключові слова: *теплопровідні об'єкти, функція розподілу, інтегральні моделі, перетворення моделі, зворотні задачі.*

Вступ. У практичних додатках значне місце займають задачі відновлення функцій джерел тепла при дослідженні процесів теплопровідності. Розв’язування таких задач є актуальним як в теорії і практиці теплових вимірювань, так і при пошуку керуючих впливів при керуванні різними видами теплопровідних об'єктів [1-3]. Складність розглянутих задач приводь до необхідності застосування кількісних методів і засобів. У зв'язку з цим істотного значення набуває пошук можливості спрощення моделі, що реалізується.

Постановка задачі. Розглядаються способи перетворення до інтегрального виду обернених задач для рівняння теплопровідності [4]

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta T + f, \quad a = const \tag{1}$$

в півплощині, які можна узагальнити на випадок n-мірного півпростору, причому

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \varphi(t) f_1(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де $\varphi(\mathrm{t})$ — відома функція.

1-й варіант оберненої задачі. Визначається функція $f(x, y)$ із рівняння

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta T + \varphi(t) f_1 \tag{2}$$

в півплощині $y \geq 0$ при наступних умовах:

$$\begin{aligned} T(x, y, 0) &= 0, \\ T(x, 0, t) &= h(x, t), \\ T(x, y_1, t) &= r(x, t). \end{aligned} \tag{3}$$

Якщо позначити

$$v(x, y, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} T(x, y, t) dt ,$$

то в силу (2) і (3) функція $v(x, y, \lambda)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$\Delta v - a^2\lambda^2 v = -\psi(\lambda) f(x,y)\,,\ \psi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}\varphi(t)dt\,. \tag{4}$$

Залежності (3) перетворюються при цьому до виду:

$$v(x,y_1,\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} r(x,t)dt = r_1(x,\lambda),$$

$$v(x,0,\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} h(x,t)dt = h_1(x,\lambda).$$

Рівняння (4) має фундаментальний розв’язок у вигляді функції Ханкеля

$$\frac{1}{2\pi} H_0^{(1)}(ia\lambda r) = \frac{1}{2\pi} K_0(a\lambda r),\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

яка задовольняє цьому рівнянню всюди, крім точки $r = 0$.

Через фундаментальний розв’язок виражається функція Гріна першого роду

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}[K_0(a\lambda R_1) - K_0(a\lambda R_2)],$$

$$R_1 = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2},\ \ R_2 = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}.$$

Тоді розв’язок рівняння (4) можна представити у вигляді

$$v(x,y,\lambda) = \frac{a\lambda y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{R_0}K_1(a\lambda R_0)h_1(\xi,\lambda)d\xi +$$

$$+\psi(\lambda)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{5}$$

$$R_0 = [(x-\xi)^2 + y^2]^{1/2}.$$

Вважаючи в останній рівності $y = y_1$, отримаємо інтегральне рівняння першого роду відносно невідомої функції $f(\xi,\eta)$:

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty [K_0(a\lambda R_3) - K_0(a\lambda R_4)] f(\xi,\eta)d\xi d\eta = g(x,\lambda)$$

$$\begin{gathered} R_3 = [(x-\xi)^2 + (\eta - y_1)^2]^{1/2},\ \ R_4 = [(x-\xi)^2 + (\eta + y_1)^2]^{1/2}, \\ g(x,\lambda) = \frac{2}{\psi(\lambda)}[\pi r_1(x,\lambda) - a\lambda y_1\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{R}K_1(a\lambda R)h_1(\xi,\lambda)d\xi], \end{gathered} \tag{6}$$

$$R = [(x-\xi)^2 + y_1^2]^{1/2}.$$

Праву частину $g(x,\lambda)$ рівняння (6) можна підпорядкувати такій умові, щоб це рівняння мало розв'язком деяку функцію $f(x,y)$, яка задовольняє вимогам:

1) $f(x,y)=0$ при $y<y_1$, $y_1>0$;
2) $f(x,y)\in L_1(D)$, $D=(-\infty<x<\infty;\ 0<y<\infty)$.

Застосовуючи перетворення Фур'є за змінною x до рівняння (6) і використовуючи рівність [5]

$$\int_0^\infty K_0[b(c^2+t^2)^{1/2}]\cos Ttdt=\frac{\pi}{2\sqrt{b^2+T^2}}e^{-|c|\sqrt{b^2+T^2}}, \tag{7}$$

отримаємо

$$\int_0^\infty F(\omega,\eta)\{e^{-|\eta-y_1|\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}-e^{-|\eta+y_1|\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}\}d\eta=\frac{\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty g(x,\lambda)e^{-i\omega x}dx,$$

$$F(\omega,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(\xi,\eta)e^{-i\omega\xi}d\xi.$$

Враховуючи, що $f(x,y)=0$ при $y<y_1$, останнє рівняння запишемо у вигляді

$$\int_0^\infty F(\omega,\eta)e^{-\eta\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}d\eta=Q(\omega,\lambda),$$

$$Q(\omega,\lambda)=\frac{\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}{2\pi\,\mathrm{sh}\,y_1\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}G(\omega,\lambda), \tag{8}$$

$$G(\omega,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty g(x,\lambda)e^{-i\omega x}dx.$$

Покажемо, що при сформульованих вище припущеннях щодо функції $f(x,y)$ можна застосовувати перетворення Фур'є за змінною x до рівняння (6).

Дійсно, з рівності (7) випливає, що ядро інтегрального рівняння (6) є абсолютно інтегрованою функцією. Тоді з теореми про згортку двох абсолютно інтегрованих функцій випливає, що $g(x,\lambda)$ є також абсолютно інтегрована функція змінної x і, отже, $G(\omega,\lambda)$ існує. Для функції $G(\omega,\lambda)$ неважко отримати оцінку

$$|G(\omega,\lambda)|<\frac{2\pi\,\mathrm{sh}\,y_1\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}e^{-y_1\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}\int_{y_1}^\infty|F(\omega,\eta)|d\eta\,. \tag{9}$$

Із умови $f(\xi,\eta)\in L_1(D)$ слідує:

$$\left|F(\omega,\eta)\right|\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(\xi,\eta)\right|d\xi,$$

$$\int\limits_{y_1}^{\infty}\left|F(\omega,\eta)\right|d\eta\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{y_1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta=\alpha<\infty.$$

Підставляючи останню нерівність в (9), остаточно отримаємо

$$\left|G(\omega,\lambda)\right|<\frac{\alpha\pi}{\sqrt{a^2\lambda^2+\omega^2}}. \tag{10}$$

Позначимо

$$t=\eta-y_1,\;\; p^2=a^2\lambda^2+\omega^2,\;\; F_1(\omega,t)=F(\omega,t+y_1)=F_{11}(\omega,t)+iF_{12}(\omega,t),$$

$$Q_1(\omega,p)=e^{y_1p}Q\left(\omega,\frac{1}{a}\sqrt{p^2-\omega^2}\right)=Q_{11}(\omega,p)+iQ_{12}(\omega,p).$$

Тоді рівняння (8) розпадається на два незалежних інтегральних рівняння Лапласа щодо невідомих функцій F_{11} і F_{12}:

$$\int\limits_{0}^{\infty}F_{1i}(\omega,t)e^{-pt}dt=Q_{1i}(\omega,p),\;\; i=1,2. \tag{11}$$

Очевидно, що функції F_{1i}, $i=1,2$, неперервні і обмежені, так як $f(\xi,\eta)\in L_1(D)$. Звідси, випливає, що кожне з рівнянь (11) має тільки один розв’язок, який можна подати за допомогою формули [5]

$$F_{1i}(\omega,z)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{n}{z}\right)^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial p^n}Q_{1i}\left(\omega,\frac{n}{z}\right)}{n!},\;\; i=1,2. \tag{12}$$

Оскільки відомо, що якщо перетворення Фур'є

$$F(\omega,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)e^{-i\omega\xi}d\xi \tag{13}$$

функції $f(\xi,\eta)$, яка підсумовується (при фіксованому η) рівне нулю для всіх ω, то і $f(\xi,\eta)=0$ майже всюди. Тому єдиний розв’язок рівняння (13) має такий вигляд:

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega,\eta)e^{i\omega\xi}d\omega.$$

Таким чином, сформульована вище зворотна задача для рівняння (2) може мати не більше одного розв'язку.

2-й варіант оберненої задачі. Обернена задача (2)-(3) зведена до інтегрального рівняння (8) за допомогою формули (5), яка дає розв'язок задачі Діріхле для рівняння (4). Інтегральне рівняння, аналогічне рівнянню (8), можна отримати також, якщо розглянути задачу Неймана для того ж рівняння. Нехай функція $T(x,y,t)$ є розв'язком рівняння (2) в півплощині $y \geq 0$, якщо

$$\begin{gathered} T(x,y,0)=0, \\ T(x,0,t)=h(x,t), \\ \frac{\partial}{\partial y}T(x,0,t)=r(x,t). \end{gathered} \tag{14}$$

Застосовуючи перетворення Лапласа по t до цього рівняння, отримаємо рівняння (4) для функції v.

Граничні умови (14) перейдуть при цьому в наступні:

$$v(x,0,\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}h(x,t)dt=\varphi_1(x,\lambda),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}v(x,0,\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}r(x,t)dt=\varphi_2(x,\lambda).$$

Легко перевірити, що функція

$$N(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}[K_0(a\lambda R_1)+K_0(a\lambda R_2)],$$

$$R_1=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2},\ \ R_2=[(x-\xi)^2+(y+\eta)^2]^{1/2}$$

задовольняє диференціальному рівнянню (4) усюди, крім точки $x=\xi$, $y=\eta$, в якій вона має логарифмічну особливість. Нормальна похідна цієї функції на границі півплощини звертається в нуль. Отже, $N(x,y;\xi,\eta)$ є функцією Гріна другого роду для півплощини.

Тому розв'язок рівняння (4) можна представити в наступному вигляді:

$$\mathrm{v}(x,y,\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_0(a\lambda R_0)\varphi_2(\xi,\lambda)d\xi+$$

$$+\psi(\lambda)\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}N(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{15}$$

$$R_0=[(x-\xi)^2+y^2]^{1/2}.$$

Вважаючи в (15) $y=0$, для невідомої функції $f(\xi,\eta)$ отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K\{a\lambda[(x-\xi)^2+\eta^2]^{1/2}\} f(\xi,\eta)d\xi d\eta = g(x,\lambda),$$

$$g(x,\lambda) = \frac{1}{\psi(\lambda)}[\pi\varphi_1(x,\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} K_0(a\lambda|x-\xi|)\varphi_2(\xi,\lambda)d\xi], \tag{16}$$

яке після перетворення Фур'є по x перейде в наступне:

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta\sqrt{\mathrm{a}\lambda^2+\omega^2}} F(\omega,\eta)d\eta = \frac{1}{\pi}\sqrt{\mathrm{a}\lambda^2+\omega^2}\,G(\omega,\lambda),$$

$$G(\omega,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\lambda)e^{-i\omega x}dx. \tag{17}$$

Позначимо

$$p^2 = \mathrm{a}\lambda^2 + \omega^2,$$

$$\Phi(p,\omega) = \frac{1}{\pi}pG\left(\omega, \frac{1}{a}\sqrt{p^2-\omega^2}\right) = \Phi_1(p,\omega) + i\Phi_2(p,\omega),$$

$$F(\omega,\eta) = F_1(\omega,\eta) + iF_2(\omega,\eta).$$

Відокремлюючи дійсну й уявну частини у рівнянні (17), отримаємо два незалежних інтегральних рівняння Лапласа відносно невідомих функцій F_1 і F_2:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-p\eta}F_i(\omega,\eta)d\eta = \Phi_i(\omega,p)\ ,\ i=1,\ 2\ . \tag{18}$$

Для того щоб обґрунтувати застосування перетворення Фур'є по x до рівняння (15), можна $g(x,\lambda)$ підпорядкувати умові, щоб рівняння (14) мало розв'язком деяку функцію $f(\mathrm{x},y)\in L_1(D)$, $D=(-\infty<x<\infty,\ 0<y<\infty)$. Тоді єдиний розв'язок рівняння (17) представимо формулою (12). Звертаючи перетворення Фур'є (13), отримаємо єдиний розв'язок $f(x,y)$ оберненої задачі (2), (14).

Висновок. Таким чином, вихідні постановки обернених задач для рівнянь теплопровідності можуть бути зведені до більш простих моделей у вигляді інтегральних рівнянь, які допускають отримання чисельних розв'язків за допомогою квадратурних методів. Ядра інтегральних рівнянь при цьому можуть фізично інтерпретуватися як перехідні (передатні) характеристики теплопровідного середовища.

Список використаних джерел:

1. Thermal Conductivity: Theory, Properties, and Applications / ed. by Terry M. Tritt. Boston: Springer, 2004. 290 p.

2. Hans U. Fuchs. The Dynamics of Heat: A Unified Approach to Thermodynamics and Heat Transfer. New York: Springer, 2010. 734 p.
3. Thermoelectric handbook: macro to nano / ed. by D. M. Rowe. Boca Raton: CRC Press, 2010. 1014 p.
4. Николаенко Ю. Е. О получении интегральных моделей для обратной задачи теплопроводности. *Моделювання та інформаційні технології*. Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2006. Вип. 38. С. 115-120.
5. Карташов Э. М., Кудинов В. А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. Москва: Либроком, 2012. 656 с.

MATHEMATICAL MODELS FOR THE PROBLEM OF RECOVERY OF THE HEAT SOURCE DISTRIBUTION FUNCTION

The article is devoted to the problem of obtaining mathematical models in integral form for thermal objects from the initial equation of thermal conductivity, given in differential form. The case of the inverse incorrect problem for the thermal conductivity equation is considered. When solving both direct and inverse dynamics problems using computational methods, it is important to choose the form of mathematical description of the model. Even models derived from the original models as a result of equivalent transformations in the numerical implementation give non-equivalent solutions. Therefore, it is recommended to use integral mathematical models that have high computational stability to solve inverse dynamics problems. In the integral formulation, such incorrect inverse problems are successfully solved using regularization methods. The article considers two variants of the inverse problem. In the first case, the inverse problem is considered as Dirichlet's task, and in the second case, as Neumann's problem is considered. In both cases, the inverse problems presented in differential form, by equivalent transformations are given in the form of integral equations of the first kind. For the obtained integral models it is shown that the solutions of the equations are unique. The advantage of the obtained integrated models is their relative simplicity and a wide range of developed methods of their numerical implementation based on the use of different quadrature formulas. In addition, the kernels of the obtained integral equations can be physically interpreted as impulse transition characteristics of the heat-conducting medium. This makes it possible to identify them by the transient characteristics of the heat-conducting medium, which can be obtained experimentally.

Key words: *thermally conductive objects, distribution function, integral models, model transformations, inverse problems.*

Отримано: 12.10.2021