УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2021-22.97-109

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НОВІ АПРОКСИМАЦІЙНІ ЕФЕКТИ ЯДЕР ВЕЙЛЯ-НАДЯ

У рівномірній метриці задача отримання точних значень найкращих наближень на класах 2π-періодичних функцій, r-ті ($r \in N$) похідні яких знаходяться в одиничній сфері простору суттєво обмежених функцій, була розв'язана в 1936 р. Ж. Фаваром [1]. Такі класи можна розглядати також як класи згорток, що породжені відомими в науковій літературі з теорії наближення ядрами Бернуллі. При розв'язанні задачі Ж. Фавар висунув гіпотезу, що аналогічну задачу при дробових значеннях параметра r теж можна реалізовувати за запропонованою схемою. В основі ідеї розв'язку задачі лежить теорема Ролля про співвідношення між числом нулів функції та числом нулів її похідної. В останній час до задач, для яких вірна теорема Ролля, підвищена увага математиків, і з її використанням вдалося знайти розв'язки багатьох задач теорії наближення. Над гіпотезою Ж. Фавара працювали багато видатних математиків: Н. І. Ахієзер, М. Г. Крейн, С. М. Нікольський, С. Б. Стєчкін, Сунь Юншен та ін. Остаточні результати по розв'язанню задачі знаходження точних значень величин найкращих наближень на класах, що породжуються ядрами Вейля-Надя та які узагальнюють ядра Бернуллі, у метриках просторів неперервних і відповідно сумовних функцій, належать В. К. Дзядику [2].

Задачу сумісного наближення періодичних функцій та їх похідних в постановці, аналогічній до розглянутої в цій роботі, започатковано О. І. Степанцем. Знаходження точного значення величин найкращих наближень окремих, та найбільш важливих (за вдалою пропозицією О.І. Степанця [3]) лінійних комбінацій функцій із класів Вейля-Надя в рівномірній та інтегральній метриках детально досліджено у роботах авторів (див., зокрема, [4, 5]) з найкращого сумісного наближення функцій із класів, що задаються за допомогою згорток з фіксованими твірними ядрами. У випадку кількості доданків m лінійної комбінації рівною одиниці величини найкращого сумісного наближення та величини найкращих наближень співпадають. У статті, яка є логічним продовженням знаходження величин найкращого та найкращого сумісного наближення, досліджуються лінійні комбінації функцій класів Вейля-Надя у метриках просторів неперервних і відповідно сумовних функцій при значеннях параметрів задачі, що доповнюють знайдені раніше. В ній знайдені умови на параметри задачі найкращого сумісного наближення, при яких ядра згорток задовольняють достатні умови Надя найкращого наближення в інтегральній метриці.

Ключові слова: *класи Вейля-Надя, лінійні комбінації функцій та їх похідних, достатні умови найкращого наближення в інтегральній метриці Нікольського та Надя.*

Вступ. Усі відомі до цього часу точні значення величин найкращих наближень вигляду:

$$E_n\left(W^r_{\beta,\infty}\right)_C = \sup_{f\in W^r_{\beta,\infty}} \inf_{t_{n-1}} \left\| f - t_{n-1}\right\|_C, \tag{1}$$

$$E_n\left(W^r_{\beta,1}\right)_L = \sup_{f\in W^r_{\beta,1}} \inf_{t_{n-1}} \left\| f - t_{n-1}\right\|_L, \tag{2}$$

а також величин найкращого сумісного наближення функцій із класів Вейля-Надя $W^r_{\beta,\infty}$ ($W^r_{\beta,1}$)

$$E_{n,m}\left(W^r_{\beta,\infty}\right)_C = \sup_{f\in W^r_{\beta,\infty}} \inf_{t_{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{m} c_i^{(n)} f_{\beta_i}^{(r_i)} - t_{n-1}\right\|_C, \tag{3}$$

$$E_{n,m}\left(W^r_{\beta,1}\right)_L = \sup_{f\in W^r_{\beta,1}} \inf_{t_{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{m} c_i^{(n)} f_{\beta_i}^{(r_i)} - t_{n-1}\right\|_L, \tag{4}$$

де $f_{\beta_i}^{(r_i)}(x) - (r_i,\beta_i)$ похідна функції $f(x)\in W^r_{\beta,\infty}\left(W^r_{\beta,1}\right)$, $i=\overline{1,m}$, були отримані для класів, породжених ядрами, що задовольняють умову Нікольського A_n^* або навіть більш жорстку, ніж A_n^*, умову N_n^* (див., зокрема, [6, с. 949]). У даному повідомленні встановлено нові достатні умови, що забезпечують належність відповідних ядер згорток та їх лінійних комбінацій до множини N_n^* (а отже, і до A_n^*), на цій основі знайдено точні значення величин найкращих наближень на класах згорток із лінійними комбінаціями ядер Бернуллі. Поряд із цим, вказано значення параметрів, при яких умови N_n^* (A_n^*) не виконуються.

Постановка задачі. Клас $W^r_\beta\mathfrak{R}$, при довільних $r>0$, $\beta\in R$ співпадає з множиною функцій $f(x)$, що записуються згортками $f(x)=\frac{a_0}{2}+\left(\varphi\times B^r_\beta\right)(x)$, де $B^r_\beta(\cdot)$ — ядра Вейля-Надя вигляду $B^r_\beta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)}{k^r}$, а $\varphi\perp 1$, та належать одиничним кулям досліджуваних функціональних просторів. Задача Фавара зводиться до встановлення того факту, що ядро $B_\beta^r(\cdot)$ задовольняє умову A_n^* або навіть більш жорстку, ніж A_n^*, умову Надя N_n^*.

Означення 1. Говорять, що сумовна 2π-періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову A_n^*, $n \in N$, ($K \in A_n^*$), якщо існують тригонометричний поліном $t_{n-1}^*(\cdot)$ степеня $n-1$ і довільне число $\lambda \le \dfrac{\pi}{n}$ таке, що для функції $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}\left(K(t) - t_{n-1}^*(t)\right)$ майже при всіх t виконується рівність $\varphi_*(t+\lambda) = -\varphi_*(t)$.

Означення 2. Говорять, що сумовна 2π-періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову N_n^*, $n \in N$ ($K \in N_n^*$), якщо існують тригонометричний поліном $t_{n-1}^*(\cdot)$, степеня $n-1$ і точка $\xi = \xi_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{n}\right]$ такі, що різниця $K(t) - t_{n-1}^*(t)$ змінює знак на $[0, 2\pi]$ у точках $t_k = \xi + \dfrac{k\pi}{n}$, , k = 0, 1, ..., 2n – 1, і тільки в них.

С. М. Нікольським [7, с. 228] було доведено, що включення ядра згортки $K \in A_n^*$ забезпечує виконання рівностей

$$E_n\left(W_\beta^r\right)_C = E_n\left(W_\beta^r\right)_L = \sup_{\begin{cases} f \in W^r_{\beta,\infty} \\ f \perp t_{n-1} \end{cases}} \|f\|_C = \sup_{\begin{cases} f \in W^r_{\beta,1} \\ f \perp t_{n-1} \end{cases}} \|f\|_L = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L, \qquad (5)$$

де $f \perp t_{n-1}$ означає, що $\int\limits_0^{2\pi} f(t) \begin{matrix}\sin kt \\ \cos kt\end{matrix}\, dt = 0$, k = 1, 2, …, n – 1.

Цей факт, зокрема, дозволив відомі результати по найкращому наближенню на класах згорток у метриці простору C перенести на випадок, коли наближення розглядається у метриці простору L.

У пропонованій роботі досліджено апроксимативні властивості лінійної комбінації $F(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_{\beta_i}^{(r_i)}(t)$, де $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ m-мірний числовий вектор, та обчислено точне значення її найкращих наближень у рівномірній та інтегральній метриках на класах Вейля-

Надя $W^r_{\beta,\infty}$ ($W^r_{\beta,1}$), де $\alpha_i > 0$, $\beta - \beta_i = \frac{1}{2} + l_i$, $l_i \in Z$, тоді $K(t)$ — непарне ядро; або ж $\beta - \beta_i = l_i$, $l_i \in Z$, тоді $K(t)$ — парне.

У роботах В. К. Дзядика по розв'язуванню задачі знаходження точних значень величин (1) та (2) (див., зокрема [2)], у роботах авторів по відшуканню відповідно величин (3) та (4) (див., напр. [4, 5]), встановлено, що довільний тригонометричний многочлен $t_{n-1}(t)$ степеня $n-1$ може співпадати з ядром згортки $K(t)$ при відповідних значеннях параметрів задачі α_i, $r - r_i$, $\beta - \beta_i$ не більше ніж в $2n$ точках, враховуючи їх кратність, на періоді довжиною 2π. Будемо вважати далі, що тригонометричний многочлен $t_{n-1}(t)$, може співпадати з ядром $K(t)$ лінійної комбінації $F(t)$ не більше ніж в $2n+2$ точках на періоді. Без втрати загальності можемо вважати також, що значення неперервної на $(0, 2\pi)$ функції $K(t)$ в точці 0_+ невід'ємне.

Розглянемо сукупність точок

$$\frac{\theta_n}{n}, \frac{\theta_n + \pi}{n}, \ldots, \frac{\theta_n + (2n-2)\pi}{n}, \tag{7}$$

де $\theta_n \in [0,1]$ — корінь рівняння

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\theta_n \pi - \frac{\beta - \beta_i}{2}\pi\right]}{\left[(2\nu+1)n\right]^{r-r_i}} = 0, \tag{8}$$

та позначимо через $\Delta_n(t) = \Delta_n(\bar{\alpha}, r - r_i, \beta - \beta_i) = K(t) - t_{n-1}(t)$.

Зауваження. У випадку, коли рівняння (8) коренів не має, приймаємо $\theta_n = 0$.

Приведемо один факт, що грунтується на твердженні М. Г. Крейна [7].

Лема 1. Нехай $K(t)$ — сумовна функція з періодом 2π, λ — довільне дійсне число, а $t_{n-1}(t)$ — тригонометричний многочлен степеня $n-1$, що інтерполює $K(t)$ у точках вигляду (7).

Тоді для того, щоб функція $\Delta_n(t) = K(t) - t_{n-1}(t)$ перетворювалася в нуль і у точці $\left(\lambda + \left(\frac{2n-1}{n}\right)\right)\pi$, необхідно і досить, виконання рівності

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^{\nu}\,\Delta_n\left(\lambda\pi+\frac{\nu\pi}{n}\right)=0.$$

Розглянемо суму $G(t)=\sum\limits_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^{\nu}\,\Delta_n\left(t+\dfrac{\nu\pi}{n}\right)$.

Використовуючи рівності

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^{\nu}\,e^{ik\left(\frac{\nu\pi}{n}+\frac{t}{n}\right)}=\frac{e^{ik\frac{t}{n}\left(1-e^{i2k\pi}\right)}}{1+e^{ik\pi/n}}=\begin{cases}0, & k\neq(2j+1),\ j=0,1,2,\ldots,\\ 2ne^{i(2j+1)t}, & k=(2j+1)n,\ j=0,1,2,\ldots,\end{cases}$$

де k і n — довільні натуральні числа, одержимо

$$G(t)=2n\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\theta_n\,\pi-\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right]}{\left[(2\nu+1)n\right]^{r-r_i}}-\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^{\nu}\,t_{n-1}\left(t+\frac{\nu\pi}{n}\right).$$

Із урахуванням рівності (8) та тотожності $\sum\limits_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^{\nu}\,t_{n-1}\left(t+\dfrac{\nu\pi}{n}\right)=0$ для довільного тригонометричного многочлена $t_{n-1}(t)$ степеня $n-1$ із леми 1 при $\lambda=\dfrac{\theta_n}{n}$ маємо

$$K\left(\frac{\theta_n+(2n-1)\pi}{n}\right)=t_{n-1}\left(\frac{\theta_n+(2n-1)\pi}{n}\right).$$

Проілюструємо екстремальні властивості лінійних комбінацій ядер $K(t,\alpha)$ в (6) на прикладах.

Приклад 1.

$$K(t,\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k}-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^3},\ \alpha>0. \qquad (9)$$

Приклад 2.

$$K(t,\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^2}-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^4},\ \alpha>0. \qquad (10)$$

Зауваження. Випадок $\alpha<0$ міститься в роботі автора [4].

Використовуючи стандартні міркування, що базуються на теоремі Ролля, аналогічно як це зроблено в монографії М. П. Корнєйчука (див. [8, § 3,5]), легко встановити, що різниця $\Delta_n^*(t,\alpha)=K(t,\alpha)-t_{n-1}^*(t,\alpha)$ в (9) та (10) не може перетворюватися в нуль більше за $2n+1$ та $2n+2$ рази відповідно на проміжку довжиною 2π, враховуючи кратність нулів.

Побудуємо тригонометричні многочлени $t_{n-1}^{*}(t)=t_{n-1}^{*}(t,\alpha)$ що інтерполюють ядра $K(t,\alpha)$ в (9), (10) в нулях функцій $y=\sin nt$ та $y=\cos nt$ відповідно.

У випадку (9) покладемо

$$t_{n-1}^{*}(t)=\sum_{k=1}^{n-1}K(\tau_k)\frac{\sin t}{\sin\tau_k}\frac{(\cos t-\cos\tau_k)}{(\cos\tau_k-\cos\tau_1)}\cdots$$
$$\frac{(\cos t-\cos\tau_{k-1})}{(\cos\tau_k-\cos\tau_{k-1})}\frac{(\cos t-\cos\tau_{k+1})}{(\cos\tau_k-\cos\tau_{k+1})}\cdots\frac{(\cos t-\cos\tau_{n-1})}{(\cos\tau_k-\cos\tau_{n-1})},\tag{11}$$

де $\tau_k=\dfrac{k\pi}{n}\ (k=1,2,\ldots,n-1)$.

Для парного ядра $K(t,\alpha)$ в (10) виберемо

$$t_{n-1}^{*}(t)=\sum_{k=1}^{n}K(\tau_k)\frac{(\cos t-\cos\tau_1)}{(\cos\tau_k-\cos\tau_1)}\cdots$$
$$\frac{(\cos t-\cos\tau_{k-1})}{(\cos\tau_k-\cos\tau_{k-1})}\frac{(\cos t-\cos\tau_{k+1})}{(\cos\tau_k-\cos\tau_{k+1})}\cdots\frac{(\cos t-\cos\tau_{n})}{(\cos\tau_k-\cos\tau_{n})},\tag{12}$$

де $\tau_k=\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\ (k=1,2,\ldots n)$.

Різниця $\Delta_n^{*}(t,\alpha)$ може перетворюватися в нуль у $2n$ – 1-й, або ж $2n$ + 1-й точках на періоді у випадку ядра $K(t,\alpha)$ з прикладу 1, та відповідно у $2n$, або $2n$ + 2-х точках для ядра з прикладу 2. Число нулів різниці $\Delta_n^{*}(t,\alpha)$ можна встановити за знаком її похідної $\Delta_n^{*\prime}(t,\alpha)$ в точці π (П1) та значенням функції $\Delta_n^{*}(\pi,\alpha)$ (П2). Зокрема, у випадку прикладу 1 при n непарному та $\Delta_n^{*\prime}(\pi,\alpha)<0$, або ж n парному та $\Delta_n^{*\prime}(\pi,\alpha)>0$ різниця $\Delta_n^{*}(t,\alpha)$ матиме $2n-1$ нуль на періоді, тобто при $(-1)^n\Delta_n^{*\prime}(\pi,\alpha)>0$. Для прикладу 2 при n непарному та $\Delta_n^{*}(\pi,\alpha)<0$, або ж n парному та $\Delta_n^{*}(\pi,\alpha)>0$ різниця $\Delta_n^{*}(t,\alpha)$ має $2n$ нулів на періоді, тобто при $(-1)^{n+1}\Delta_n^{*}(\pi,\alpha)>0$.

В силу розвинень, (див. [8]), функції $K(t,\alpha)$ в наведених прикладах є алгебраїчними многочленами

$$K(t,\alpha)=\frac{\pi-t}{2}-\alpha\frac{t}{12}\left(t^2-3\pi t+2\pi^2\right),\tag{П1}$$

$$K(t,\alpha)=\frac{1}{12}\left(3t^2-6\pi t+2\pi^2\right)-\alpha\left(-\frac{t^4}{48}+\frac{\pi t^3}{12}-\frac{\pi^2 t^2}{12}+\frac{\pi^4}{90}\right) \qquad (\text{П2})$$

Обчислюючи коефіцієнти многочленів $t^*_{n-1}(t)$, що забезпечують найкраще наближення $K(t,\alpha)$ в метриці L на випадок кількості точок інтерполяції ядра згортки $2n$ – 1 та $2n$ відповідно, за зразком підрахунків зроблених в [8, с. 66-69], отримуємо

$$t_k=\frac{1}{k}-2k\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{4s^2\,n^2\,-k^2}+\frac{\alpha}{k^3}+\alpha\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2sn+k)^3}-\frac{1}{(2sn-k)^3}\right].$$

Многочлен $t^*_{n-1}(t)$ при цьому має вигляд $t^*_{n-1}(t)=\sum_{k=1}^{n-1}t_k\sin kt$ (П1).

На випадок прикладу 2 маємо

$$t_k=-\left[\frac{1}{k^2}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{(2sn+k)^2}+\frac{1}{(2sn-k)^2}\right)\right]-$$
$$-\alpha\left[\frac{1}{k^4}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{1}{(2sn+k)^4}+\frac{1}{(2sn-k)^4}\right)\right],$$
$$k=1,2,\dots,n-1,$$

та

$$t_0=-\frac{1}{2n^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s^2}+\frac{\alpha}{8n^4}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s^4}.$$

Відповідно многочлен $t^*_{n-1}(t)=\frac{t_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}t_k\cos kt.$ Звідси знаходимо значення похідної $\Delta_n^{*'}(t,\alpha)$ в точці π $\Delta_n^{*'}(\pi,\alpha)=-\frac{1}{2}+\alpha\frac{\pi^2}{4}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\,kt_k$ та значення різниці в цій точці $\Delta_n^*(\pi,\alpha)=-\frac{\pi^2}{12}+\alpha\frac{7\pi^4}{720}-\frac{t_0}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\,t_k.$

Враховуючи прийняту домовленість $K\left(0_{+,}\alpha\right)>0,$ для того, щоб різниця $\Delta_n^*(t,\alpha)$ для функцій з прикладів П1 та П2 перетворювалася в нуль в $2n$ – 1-й та відповідно $2n$ точках на періоді необхідно щоб знак похідної $\left(\Delta_n^*\right)'(\pi,\alpha)$ співпадав зі знаком $(-1)^n$ (П1) та знак $\Delta_n(\pi,\alpha)$ співпадав зі знаком $(-1)^{n+1}$ (П2). Виконання останніх нерівностей залежить як від степеня n тригонометричного многочлена найкращого наближення, так і від параметра α функції $K(t,\alpha)$. Зокрема, наближаючи ядро $K(t,\alpha)$ в метриці L константою, маємо: $t_0^*(t)=K(\pi,\alpha)=0$ (П1), та $t_0^*(t)=K\left(\frac{\pi}{2},\alpha\right)=-\frac{\pi^2}{48}+\alpha\frac{7\pi^4}{11520}$ (П2).

Неважко переконатися, що $\Delta_1^*(t,\alpha)=K(t,\alpha)=$ $=(\pi-t)\frac{\alpha}{12}\left(t^2-2\pi t+\frac{6}{\alpha}\right)>0$ для всіх t $t\in(0,\pi)$ виконується при умові, що $t^2-2\pi t+\frac{6}{\alpha}>0,\quad t\in(0;\pi)$. Остання нерівність можлива, якщо $\alpha<\frac{6}{\pi^2}$. Різниця $\Delta_1^*(t,\alpha)=K(t,\alpha)-K\left(\frac{\pi}{2},\alpha\right)$ лише раз перетворюється в нуль в точці $t=\frac{\pi}{2}$, на проміжку $(0,\pi)$ при значеннях параметра $\alpha<\frac{48}{7\pi^2}$ (П2) (дійсно, оскільки $\Delta_1^{*\prime}(t,\alpha)=(t-\pi)\frac{\alpha}{12}\left(t^2-2\pi t+\frac{6}{\alpha}\right)$, то при $\alpha\le\frac{6}{\pi^2}$ $\Delta_1^{*\prime}(\mathrm{t},\alpha)<0$, якщо ж $\alpha>\frac{6}{\pi^2}$, то з умов $\Delta_1^*(0,\alpha)>0$ та $\Delta_1^*(\pi,\alpha)\le 0$ випливатиме наявність лише одного нуля для $\Delta_1^*(t,\alpha)$ на $(0;\pi)$. З умов $\Delta_1^*(0,\alpha)>0$ та $\Delta_1^*(\pi,\alpha)\le 0$ для прикладу 2 одержуємо, що $\alpha<\frac{48}{7\pi^2}$).

Якщо ж ми наближаємо ядро $K(t,\alpha)$ многочленом першого степеня $t_1^*(t)=b_1^*\sin t$, де b_1^* визначається із умови інтерполяції функції $K(t,\alpha)$ в точці $t=\frac{\pi}{2}$, тобто $K\left(\frac{\pi}{2},\alpha\right)=b_1^*=\frac{\pi}{4}\left(1-\alpha\frac{\pi^2}{8}\right)$ (П1), то різниця $\Delta_2^*(t,\alpha)$ запишеться так: $\Delta_2^*(t,\alpha)=K(t,\alpha)-\frac{\pi}{4}\left(1-\ \alpha\frac{\pi^2}{8}\right)\sin t.$

Тоді похідна $\left(\Delta_2^*\right)'(t,\alpha)=-\frac{1}{2}-\alpha\left(\frac{t^2}{4}-\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi^2}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\left(1-\alpha\frac{\pi^2}{8}\right)\cos t$ і її значення в точці π рівне $\left(\Delta_2^*\right)'(\pi,\alpha)=\frac{\pi-2}{4}+\alpha\frac{\pi^2}{96}(8-3\pi)$. Звідки

$\left(\Delta_2^*\right)'(\pi,\alpha)>0,$ а, отже, різниця $\Delta_2^*(t,\alpha)$ має на $(0,2\pi)$ 3 нулі (при $n=2,\ 2n-1=3$) у випадку $\alpha<\dfrac{24(\pi-2)}{(3\pi-8)\pi^2}$.

Як бачимо на даних прикладах для різниць непарних (парних) ядер Бернуллі умова $(-1)^n\, sign\Delta_n^*(\pi,\alpha)>0$ ($(-1)^{n+1}\Delta_n^*(\pi,a)>0$) дозволяє встановити той факт, що інтерполюючий многочлен $t_{n-1}^*(t)$ є многочленом найкращого наближення.

Зауважимо, що при довільних натуральних значеннях r у ядрах Бернуллі умова наявності не більше ніж $2n+1$ та $2n+2$ нулів для різниці двох ядер Бернуллі автоматично виконується в силу теореми Ролля та результатів В. К. Дзядика.

Приведені тут апроксимаційні властивості многочленів найкращого наближення у випадку їх співпадання з ядром згортки не більш ніж в 2n точках на періоді, та проілюстровані на прикладах, знаходять своє відображення і у загальному випадку лінійних комбінацій ядер $K(t,\bar{\alpha})$ вигляду (6).

Лінійна комбінація ядер Вейля-Надя $K(t,\bar{\alpha})$ (див. напр., [4]) записується у вигляді $K(t,\bar{\alpha})=\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\alpha_i}{n^{r_i}}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(kt-\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2}\right)}{k^{r-r_i}}$. Ми розглядаємо тут лише непарні та парні лінійні комбінації ядер Вейля-Надя. Відповідно до (6) вони запишуться у такому вигляді

$$K(t)=\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\sin\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^{r-r_i}}-\sum_{i=m_1+1}^{m}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\sin\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^{r-r_i}}, \quad (14)$$

$$K(t)=\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\cos\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^{r-r_i}}-\sum_{i=m_1+1}^{m}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\cos\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^{r-r_i}}. \quad (15)$$

Проводячи міркування аналогічні до досліджень ядер з прикладів 1, 2 приходимо до справедливості тверджень:

Теорема 1. Нехай ядро $K(t)=K(t,\bar{\alpha})$ вигляду (14) інтерполюється многочленом $t_{n-1}^*(t)$ степеня n – 1 не більше ніж в $2n$ + 1-й точці на періоді і

$$sign\left(\Delta_n^{*\prime}(\pi,\bar{\alpha})\right)=sign(\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\sin\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{r-r_i+1}}-$$

$$-\sum_{i=m_1+1}^{m}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\sin\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{r-r_i+1}}-\left(t_{n-1}^*\right)'(\pi))=(-1)^n.$$

Тоді для всіх $n\in N$ та $\alpha_i>0$, для яких справджуються вказані обмеження, має місце включення $K(t,\bar{\alpha})\in N_n^*$) та виконуються рівності

$$E_{n,m}\left(W_{\beta,\infty}^r\right)_C=E_{n,m}\left(W_{\beta,1}^r\right)_L=\left\|K(t,\bar{\alpha})-t_{n-1}^*(t)\right\|_L=$$

$$=\frac{4}{\pi n^r}\left|\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}(-1)^{l_i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{r-r_i+1}}-\sum_{i=m_1+1}^{m}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}(-1)^{l_i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{r-r_i+1}}\right|,\qquad(16)$$

де $\beta-\beta_i=\dfrac{1}{2}+l_i,\ l_i\in Z.$

Теорема 2. Нехай ядро $K(t)=K(t,\bar{\alpha})$ вигляду (15) інтерполюється многочленом $t_{n-1}^*(t)$ степеня $n-1$ не більше ніж в $2n+2$-х точках на періоді, при цьому

$$sign\left(\Delta_n^*(\pi,\alpha)\right)=sign(\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\cos\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{r-r_i}}-$$

$$-\sum_{i=m_1+1}^{m}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\cos\frac{(\beta-\beta_i)\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{r-r_i}}t_{n-1}^*(\pi))=(-1)^{n+1}.$$

Тоді для всіх $n\in N$ та $\alpha_i>0$, для яких справджуються вказані обмеження, має місце включення $K(t,\bar{\alpha})\in N_n^*$ та виконуються рівності

$$E_{n,m}\left(W_{\beta,\infty}^r\right)_C=E_{n,m}\left(W_{\beta,1}^r\right)_L=\left\|K(t,\alpha)-t_{n-1}^*(t)\right\|_L=$$

$$=\frac{4}{\pi n^r}\left|\sum_{i=1}^{m_1}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}(-1)^{l_i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{r-r_i+1}}-\sum_{i=m_1+1}^{m}\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}(-1)^{l_i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^{r-r_i+1}}\right|,\qquad(17)$$

де $\beta-\beta_i=l_i, l_i\in Z.$

Зауваження 1. Для тригонометричного многочлена $t_{n-1}^*(t)$ в теоремі 1 вигляду (11), а в теоремі 2 вигляду (12) за зразком підрахунків зроблених в [8, с. 66-69], можна обчислити коефіцієнти так, як це було зроблено для наведених прикладів.

Зауваження 2. Використовуючи класичні результати по найкращому наближенні Ж. Фавара, Н. І. Ахієзера, М. Г. Крейна, ми можемо отримати очевидні нерівності

$$E_{n,m}\left(W_{\beta,\infty}^r\right)_C\le\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\right|E_n\left(W_{\beta-\beta_i,\infty}^{r-r_i}\right)_C$$

та відповідно

$$E_{n,m}\left(W^{r}_{\beta,1}\right)_L \le \sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\alpha_i}{n^{r_i}}\right| E_n\left(W^{r-r_i}_{\beta-\beta_i,1}\right)_L .$$

Так, зокрема, для наведеного прикладу 1 отримуємо: якщо функція $f(x)\in W^{r}_{r,\infty}\left(W^{r}_{r,1}\right)$ то її $r-1$, та $r-3$ похідні $f^{(r-1)}(x)$, та $f^{(r-3)}(x)$ будуть знаходитися відповідно в класах $W^{1}_{1,\infty}\left(W^{1}_{1,1}\right)$ та $W^{3}_{3,\infty}\left(W^{3}_{3,1}\right)$. І тоді при виконанні умови

$$sign\left(\Delta^{*'}_{n}(\pi,\alpha)\right)=$$

$$= sign\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^{r-1}}+\frac{\alpha}{n^{r-3}}\frac{\pi^2}{12}-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k kt_k\right) = sign(-1)^n$$

будемо мати

$$E_{n,2}\left(W^{r}_{r,\infty}\right)_C = E_{n,2}\left(W^{r}_{r,1}\right)_L = \left\|K(t,\bar{\alpha})-t^{*}_{n-1}(t)\right\|_L =$$

$$= \frac{4}{\pi n^r}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha}{(2k+1)^4}\right| = \frac{4}{\pi n^r}\left|\frac{\pi^2}{8}-\frac{\alpha\pi^4}{96}\right| = \frac{1}{n^r}\left|\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi^3}{24}\right|.$$

В той же час із класичних результатів ми отримуємо таку оцінку

$$E_{n,2}\left(W^{r}_{r,\infty}\right)_C \le \frac{1}{n^{r-1}}E_n\left(W^{1}_{1,\infty}\right)_C + \frac{|\alpha|}{n^{r-3}}E_n\left(W^{3}_{3,\infty}\right)_C =$$

$$= \frac{1}{n^{r-1}}\frac{\pi}{2n}+\frac{|\alpha|}{n^{r-3}}\frac{\pi^3}{24n^3} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{|\alpha|\pi^3}{24}\right),$$

та

$$E_{n,2}\left(W^{r}_{r,1}\right)_L \le \frac{1}{n^{r-1}}E_n\left(W^{1}_{1,1}\right)_L + \frac{|\alpha|}{n^{r-3}}E_n\left(W^{3}_{3,1}\right)_L = \frac{1}{n^r}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{|\alpha|\pi^3}{24}\right).$$

Аналогічно, якщо функція $f(x)\in W^{r}_{r,\infty}\left(W^{r}_{r,1}\right)$, тоді похідні $f^{(r-2)}(x)$ та $f^{(r-4)}(x)$ будуть знаходитися відповідно в класах $W^{2}_{2,\infty}\left(W^{2}_{2,1}\right)$) та $W^{4}_{4,\infty}\left(W^{4}_{4,1}\right)$. Тому

$$E_{n,2}\left(W^{r}_{r,\infty}\right)_C = E_{n,2}\left(W^{r}_{r,1}\right)_L = K(t,\bar{\alpha})-t^{*}_{n-1}(t)_L =$$

$$= \frac{4}{\pi n^r}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}-\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^5}\right| = \frac{4}{\pi n^r}\left|\frac{\pi^3}{32}-\frac{5\alpha\pi^5}{64\cdot 4!}\right| = \frac{1}{n^r}\left|\frac{\pi^2}{8}-\frac{5\alpha\pi^4}{384}\right|.$$

Використовуючи ж класичні результати маємо

$$E_{n,2}\left(W^{r}_{r,\infty}\right)_C \le \frac{1}{n^{r-2}} E_n\left(W^{2}_{2,\infty}\right)_C + \frac{\alpha}{n^{r-4}} E_n\left(W^{4}_{4,\infty}\right)_C =$$

$$= \frac{1}{n^{r-2}} \cdot \frac{\pi^2}{8n^2} + |\alpha| \frac{1}{n^{r-4}} \cdot \frac{5\pi^4}{384} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{|\alpha| 5\pi^4}{384}\right)$$

Висновки. З проведених у статті міркувань щодо апроксимативних властивостей ядер Бернуллі робимо висновок : в умовах теорем 1 та 2 ядро лінійної комбінації $K\left(t,\bar{\alpha}\right)$ задовольняє умову Надя N_n^*, $\left(K \in N_n^*\right)$. Цікавими, та суттєво іншими апроксимативними властивостями наділені ядра, які умову N_n^* не задовольняють. Автори в майбутньому планують цей випадок дослідити.

Список використаних джерел:

1. Favard J. Sur l'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques. *C.r. Acad. Sci.* 1936. Vol. 203. P. 1122-1124.
2. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер. *Мат. заметки.* 1974. Вып. 16. №5. С. 691-701.
3. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. Киев: Наук. думка, 1987. 268 с.
4. Сорич В. А. Наилучшее совместное приближение функций и их производных. Киев, 1989. С.3-54. (Препринт / Ін-т математики АН УРСР; 89.19).
5. Сорич В. А., Сорич Н. М. Найкраще наближення лінійної комбінації ядер Пуассона. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: зб. наук. пр. за матеріалами всеукр. наук.- метод. конф. Кам’янець- Подільський: Кам’янець- Подільський держ. ун-т, 2004. С. 60-69.
6. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1946. Вып. 10. С. 207-256.
7. Крейн М. Г. К теории наилучшего приближения периодических функций. *Докл. АН СССР*. 1938. Вып. 18. № 4-5. С. 245-249.
8. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.

THE NEW APPROXIMATION EFFECTS OF WEYL-NAGY KERNELS

In a uniform metric, the problem of obtaining the exact values of the best approximations on classes 2π-periodic functions, r-th ($r > 0$) derivatives of which are in a single sphere of space of significantly limited functions, there was decided in 1936 by J. Favar [1]. Such classes can also be considered as classes of convolutions with known in the scientific literature on the theory of approximation Bernoulli kernels. In solving the problem J. Favar put forward the hypothesis that the similar problem with fractional values of the parameter r can also be solved according to the proposed scheme. The idea of solving the problem is based on Rolle's theorem on the relationship between the number of zeros of a function and the number of zeros of its derivative. Lately we have been seeing the increased attention of mathematics to the problems, for which Rolle's theorem is true, and as result of which it becomes possible to find solutions to many problems of the theory of approach. Many outstanding mathematicians worked on J. Favar's hypothesis: N. Akhiezer, M. Krein, S. Nikolsky, S. Stechkin, Sun Yon-shen and others. The final results for solving the problem of finding the exact values of the best approximations in the classes, generated by the Weyl-Nagy kernels and which generalize Bernoulli kernels, in the metrics of spaces of continuous and according of summary functions, belong to V. Dzyadyk [2].

The problem of joint approximation of periodic functions and their derivatives in the formulation, which is considered in this paper, was initiated by O. Stepanets. The finding the exact value of the sizes of the best approximations of the individual, and the most important (according to the successful proposal of O. Stepanets [3]) linear combinations functions from Weyl-Nagy classes in uniform and integral metrics was considered in the works of the authors in detail (see, in particular, [4, 5]). This works concern the best joint approximation of functions from classes of convolutions with fixed generating kernels. If the number of terms m in a linear combination is one, then the best joint approximation and value of the best approximations coincide. This article is a logical continuation of a problem of finding the values of the best joint approximation of linear combinations of functions from Weyl-Nagy classes in metrics of spaces of continuous and, accordingly, summary functions; the values of the parameters that complements the before considered cases is investigated in it. It found the conditions for parameters of the problem of the best joint approximation, in which the kernels of convolution satisfy Nagy sufficient conditions of best approximation in the integral metrics.

Key words: *Weyl-Nagy classes, linear combinations of functions and their derivatives, sufficient conditions of Nikolsky and of Nagy for the best approximation in the integral metric.*

Отримано: 6.10.2021