УДК 517.958;517.956.4
DOI: 10.32626/2308-5878.2022-23.14-29

А. П. Громик[*]**,** канд. техн. наук,
І. М. Конет[**], д-р фіз.-мат. наук, професор,
Т. М. Пилипюк[***], канд. фіз.-мат. наук

[*]Заклад вищої освіти «Подільський державний університет», м. Кам'янець-Подільський,
[**]Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк,
[***]Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ШАРІ З ПОРОЖНИНОЮ

У пропонованій статті методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному за радіальною змінною r клиновидному за кутовою змінною φ циліндрично-круговому шарі з порожниною.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов 1-го роду (Діріхле) і 2-го роду (Неймана) та їх можливих комбінацій (Діріхле-Неймана, Неймана-Діріхле).

Для побудови розв'язків досліджуваних початково-крайових задач застосовано скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної, скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті щодо аплікатної змінної z та гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі з n точками спряження щодо радіальної змінної.

Послідовне застосування інтегральних перетворень за геометричними змінними дозволяє звести тривимірні початково-крайові задачі спряження до задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку, єдиний розв'язок якої виписано в замкнутому вигляді.

Послідовне застосування обернених інтегральних перетворень до одержаного розв'язку в просторі зображень відновлює в явному вигляді в просторі оригіналів розв'язки розглянутих параболічних крайових задач через їх інтегральне зображення.

При цьому головні розв'язки задач одержано в явному вигляді.

Ключові слова: *параболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, гібридні інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових і мішаних (початково-крайових) задач для різних типів диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, хімії, біології, механіки, медицини, економіки, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових задач для параболічних рівнянь і їх систем одержано в [1-8] та в працях інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок, обмеженість, необмеженість тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрією області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань, механіки деформівного твердого тіла приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними функціями, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними функціями чи, зокрема, кусково-сталими [9-11].

Відомо, що крім *методу відокремлення змінних* (методу Фур'є) та його узагальнень, одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в однорідних середовищах є *метод інтегральних перетворень*, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

У той же час для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх розв'язків виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, що породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [12-14].

У цій статті, яка є логічним продовженням [15], методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків вперше побудовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі з порожниною.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t,r,\varphi,z) : t > 0;\ r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1};R_j),\ R_0 > 0,$$

$$R_{n+1} = +\infty; \varphi \in (0;\varphi_0),\ \varphi_0 < 2\pi; z \in (-l_1;l_2), l_j \ge 0;\ l_1 + l_2 \ne 0\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [16]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \tag{1}$$

$$+\chi_j^2 u_j = f_j(t,r,\varphi,z); r \in I_j;\ j = \overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j(t,r,\varphi,z)\big|_{t=0} = g_j(r,\varphi,z);\ \ r \in I_j;\ \ j = \overline{1,n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t,\varphi,z);\ \ \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\Big|_{r=+\infty} = 0;\ \ s = 0,1, \tag{3}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + p_1 \right) u_j \Big|_{z=-l_1} = w_j^1(t,r,\varphi); \left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2 \right) u_j \Big|_{z=l_2} = w_j^2(t,r,\varphi); \tag{4}$$

$$p_k \ge 0;\ \ p_1 + p_2 \ne 0;\ \ j = \overline{1,n+1},$$

одними з крайових умов на гранях клина [12]

$$u_j\Big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t,r,z);\ u_j\Big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t,r,z);\ \ j = \overline{1,n+1}. \tag{5}$$

$$u_j\Big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t,r,z);\ \frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t,r,z);\ \ j = \overline{1,n+1}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t,r,z);\ u_j\Big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t,r,z);\ \ j = \overline{1,n+1}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t,r,z); \ \frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t,r,z); \ \ j=\overline{1,n+1} \qquad (8)$$

та умовами спряження [12]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right)u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0; \ \ j=1,2; \ \ k=\overline{1,n}, \quad (9)$$

де

$$a_{rj},\ a_{\varphi j},\ a_{zj},\ \chi_j,\ \alpha_{11}^0,\ \alpha_{js}^k,\ \beta_{11}^0,\ \beta_{js}^k \ \text{— деякі сталі;}$$

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \ \ c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t,r,\varphi,z) = \{ f_1(t,r,\varphi,z), f_2(t,r,\varphi,z), \dots, f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\};$$

$$g(r,\varphi,z) = \{g_1(r,\varphi,z), g_2(r,\varphi,z), \dots, g_{n+1}(r,\varphi,z)\};$$

$$w^1(t,r,\varphi) = \left\{w_1^1(t,r,\varphi), w_2^1(t,r,\varphi), \dots, w_{n+1}^1(t,r,\varphi)\right\};$$

$$w^2(t,r,\varphi) = \left\{w_1^2(t,r,\varphi), w_2^2(t,r,\varphi), \dots, w_{n+1}^2(t,r,\varphi)\right\};$$

$$g_0(t,\varphi,z); \ g_{kj}(t,r,z), \ \ w_{kj}(t,r,z)\ ; \ k=\overline{1,4}\ ; \ \ j=\overline{1,n+1}$$

— задані дійсні обмежені неперервні функції,

$$u(t,r,\varphi,z) = \{u_1(t,r,\varphi,z), u_2(t,r,\varphi,z), \dots, u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$$

— шукана дійсна неперервно диференційовна за змінною t і двічі неперервно диференційовна за геометричними змінними (r,φ,z) функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j \equiv 0 \ \left(j=\overline{1,n+1}\right)$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
2) якщо $\alpha_{11}^k = 0,\ \beta_{11}^k = 1;\ \alpha_{12}^k = 0,\ \beta_{12}^k = 1;\ \alpha_{21}^k = \lambda_1^k,\ \beta_{21}^k = 0;\ \ \alpha_{22}^k = \lambda_2^k,$ $\beta_{22}^k = 0,$ де λ_1^k, λ_2^k — коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;
3) якщо $\alpha_{11}^k = b_k,\ \beta_{11}^k = 1;\ \alpha_{12}^k = 0,\ \beta_{12}^k = 1;\ \alpha_{21}^k = \lambda_1^k,\ \beta_{21}^k = 0;\ \alpha_{22}^k = \lambda_2^k,$ $\beta_{22}^k = 0,$ де b_k — коефіцієнти термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Отже, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянута параболічна початково-крайова задача математичної фізики моделює процеси теплопровідності в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі з порожниною.

Основні результати. Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [12, 13].

Згідно з [12] визначимо скінченне пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi \in (0;\varphi_0)$ за формулами:

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \tag{10}$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \tag{11}$$

де

$$U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi);\, \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0};$$

$$U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi);\, \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0};$$

$$U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi);\, \beta_{m,21} = \beta_{m,12};$$

$$U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi);\, \beta_{m,22} = \beta_{m,11};$$

$$\varepsilon_0^{ik} = 0; \quad \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21; \quad m = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2}; \quad \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, \dots.$$

При цьому для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik}\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}(f); \quad i,k = 1,2, \tag{12}$$

де

$$\Phi_{m,11}(f) = \frac{\pi m}{\varphi_0}\left[f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0)\right];$$

$$\Phi_{m,12}(f) = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21}(f) = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0);$$

$$\Phi_{m,22} = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) ставить у відповідність тривимірним крайовим задачам (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t,r,z): \quad t>0;$ $r \in I_n^+; \; z \in (-l_1; l_2)\}$ класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} = \tag{13}$$
$$= G_{jm,ik}(t,r,z); z \in I_j; \; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t,r,z)\big|_{t=0} = g_{jm,ik}(r,z); \; r \in I_j; \; j = \overline{1, n+1}, \tag{14}$$

крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_{1m,ik} \right|_{r=R_0} = g_{0m,ik}(t,z), \; \left.\frac{\partial^s u_{n+1,m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty} = 0; \; s = 0,1, \tag{15}$$

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial z} + p_1 \right) u_{jm,ik} \right|_{z=-l_1} = w_{jm,ik}^1(t,r); \; \left.\left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2 \right) u_{jm,ik} \right|_{z=l_2} = w_{jm,ik}^2(t,r) \tag{16}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right]\right|_{r=R_p} = 0; \tag{17}$$
$$j = 1,2; \; p = \overline{1, n},$$

де

$$G_{jm,ik}(t,r,z) = f_{jm,ik}(t,r,z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t,r,z), \; \nu_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}.$$

До двовимірної крайової задачі (13)-(17) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1; l_2)$ щодо змінної z [13]:

$$\Lambda_s[f(z)] = \int_{-l_1}^{l_2} f(z) v_s(z+l_1) dz \equiv f_s, \tag{18}$$

$$\Lambda_s^{-1}[f_s] = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \frac{v_s(z+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2} \equiv f(z), \tag{19}$$

$$\Lambda_s\left[\frac{d^2 f}{dz^2}\right] = -\gamma_s^2 f_s + v_s(0)\left(-\frac{dt}{dz} + p_1 f\right)\Bigg|_{z=-l_1} + v_s(l)\left(\frac{df}{dz} + p_2 f\right)\Bigg|_{z=l_2}; \tag{20}$$

$$l = l_1 + l_2.$$

У формулах (18)-(20) використовується спектральна функція (ядро перетворення)

$$v_s(z+l_1) = \frac{\gamma_s \cos\gamma_s(z+l_1) + p_1 \sin\gamma_s(z+l_1)}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}},$$

квадрат норми якої

$$\left\|v_s(z+l_1)\right\|^2 \equiv \int_{-l_1}^{l_2} v_s^2(z+l_1)dz = \frac{1}{2} + \frac{(p_1+p_2)(\gamma_s^2 + p_1 p_2)}{2(\gamma_s^2 + p_1^2)(\gamma_s^2 + p_2^2)}.$$

При цьому $v_s(0) = \dfrac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}}$, $v_s(l) = \dfrac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_2^2}}$; $\{\gamma_s\}_{s=1}^{\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння $ctg(\gamma l) = \dfrac{\gamma^2 - p_1 p_2}{\gamma(p_1+p_2)}$, які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_s, який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) ставить у відповідність початково-крайовій задачі (13)-(17) задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t,r):\ t>0;\ r \in I_n^+\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B -параболічного типу 2-го порядку [5]

$$\frac{\partial u_{jm,ik,s}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{\nu_{jm,ik}}[u_{jm,ik,s}] + \left(a_{zj}^2\gamma_s^2 + \chi_j^2\right)u_{jm,ik,s} = T_{jm,ik,s}(t,r); \tag{21}$$

$$r \in I_j;\quad j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik,s}(t,r)\Big|_{t=0} = g_{jm,ik,s}(r);\ \ r \in I_j;\quad j = \overline{1, n+1}, \tag{22}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right)u_{1m,ik,s}\Bigg|_{r=R_0} = g_{0m,ik,s}(t); \frac{\partial^p u_{n+1,m,ik,s}}{\partial r^p}\Bigg|_{r=+\infty} = 0;\ p = 0, 1 \tag{23}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p\right)u_{pm,ik,s} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p\right)u_{p+1,m,ik,s}\right]\Bigg|_{r=R_0} = 0; \tag{24}$$

$$j = 1, 2;\ p = \overline{1, n},$$

де $B_{\nu_{jm,ik}} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя [5],

$$T_{jm,ik,s}(t,r) = G_{jm,ik,s}(t,r) + a_{zj}^2 v_s(0) w_{jm,ik}^1(t,r) + a_{zj}^2 v_s(l) w_{jm,ik}^2(t,r).$$

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)-(24) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної [13]:

$$M_{(n)}\left[f(r) \right] = \int\limits_{R_0}^{+\infty} f(r) V(r,\lambda) \sigma(r) r dr \equiv \tilde{f}(\lambda), \tag{25}$$

$$M_{(n)}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda) \right] = \int\limits_{0}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) V(r,\lambda) \Omega(\lambda) d\lambda \equiv f(r), \tag{26}$$

$$\begin{gathered} M_{(n)}\left[B_{(m,ik)}[f(r)] \right] = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^2 \int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r,\lambda) \sigma_k r dr - \\ -(\alpha_{11}^0)^{-1} a_1^2 R_0 \sigma_1 V_1(R_0,\lambda) \left(\alpha_{11}^0 \frac{df}{dr} + \beta_{11} f \right)\Bigg|_{r=R_0}. \end{gathered} \tag{27}$$

У формулах (25)-(27) беруть участь, виписані в [13], спектральна функція $V(r,\lambda)$, вагова функція $\sigma(r)$, спектральна щільність $\Omega(\lambda)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \theta(r - R_{j-1}) \theta(R_j - r) B_{\nu_{jm,ik}} + a_{n+1}^2 \theta(r - R_n) B_{\nu_{n+1,m,ik}},$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда, $a_k^2 \equiv a_{rk}^2$, α_k^2 — деякі сталі.

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_{1s}^2 \right) u_{1m,ik,s}(t,r) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_{2s}^2 \right) u_{2m,ik,s}(t,r) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1,s}^2 \right) u_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1m,ik,s}(t,r) \\ T_{2m,ik,s}(t,r) \\ \dots\dots \\ T_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\left.\begin{bmatrix} u_{1m,ik,s}(t,r) \\ u_{2m,ik,s}(t,r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n+1,m,ik,s}(t,r) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1m,ik,s}(r) \\ g_{2m,ik,s}(r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{n+1,m,ik,s}(r) \end{bmatrix}, \tag{29}$$

де

$$q_{js}^2(\sigma) = a_{zj}^2\gamma_s^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}, \quad s = 1, 2, 3...$$

Інтегральний оператор $M_{(n)}$, який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{(n)}[\cdots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda)\sigma_1 r dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda)\sigma_2 r dr \right.$$
$$\left. \cdots \quad \int_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda)\sigma_n r dr \quad \int_{R_n}^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\sigma_{n+1} r dr \right] \tag{30}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціального рівняння 1-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt} + \lambda^2 + \alpha_j^2 + q_{js}^2\right)\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{T}_{jm,ik,s}(t,\lambda) -$$
$$-(\alpha_{11}^0)^{-1} a_1^2 R_0 \sigma_1 V_1(R_0,\lambda) g_{0m,ik,s}(t), \tag{31}$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda), \tag{32}$$

де

$$\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} u_{jm,ik,s}(t,r)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr;$$

$$\tilde{T}_{jm,ik,s}(t,\lambda) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} T_{jm,ik,s}(t,r)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr; j = \overline{1, n+1},$$

$$g_{jm,ik,s}(\lambda) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik,s}(r)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_{1s}^2, q_{2s}^2, ..., q_{n+1,s}^2\right\} = q_{1s}^2$ і покладемо всюди $\alpha_j^2 = q_{1s}^2 - q_{js}^2$; $j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (31), (32) набирає вигляду

$$\frac{d\tilde{u}_{m,ik,s}}{dt}+\Delta(\lambda,\gamma_s)\tilde{u}_{m,ik,s}=\tilde{T}_{m,ik,s}(t,\lambda)-\frac{a_1^2R_0}{\alpha_{11}^0}\sigma_1V_1(R_0,\lambda)g_{0m,ik,s}(t), \quad (33)$$

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)\Big|_{t=0}=\tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda), \quad (34)$$

де

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jm,ik,s}(t,\lambda);\Delta(\lambda,\gamma_s)=\lambda^2+a_{z1}^2\gamma_s^2+\chi_1^2;$$

$$\tilde{T}_{m,ik,s}(t,\lambda)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\Xi}_{jm,ik,s}(t,\lambda);\tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв’язком задачі (33), (34) є функція

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)=N(t,\lambda,\gamma_s)\tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda)+\int_0^t N(t-\tau,\lambda,\gamma_s)\times$$
$$\times\left[\tilde{T}_{m,ik,s}(\tau,\lambda)-(\alpha_{11}^0)^{-1}a_1^2R_0\sigma_1V_1(R_0,\lambda)g_{0m,ik,s}(\tau)\right]d\tau, \quad (35)$$

де розв’язуюча функція (функція Коші) $N(t,\lambda,\gamma_s)=\exp(-\Delta(\lambda,\gamma_s)t)$.

Оскільки суперпозиція операторів $M_{(n)}$ та $M_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $M_{(n)}^{-1}$, як обернений до оператора, визначеного за формулою (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$M_{(n)}^{-1}=\begin{bmatrix}\int_0^{+\infty}\cdots V_1(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\\ \int_0^{+\infty}\cdots V_2(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int_0^{+\infty}\cdots V_{n+1}(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\end{bmatrix} \quad (36)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)\right]$, де функцію $\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)$ визначено формулою (35). Одержуємо єдиний розв’язок одновимірної параболічної початково-крайової задачі спряження (21)-(24):

$$u_{jm,ik,s}(t,r)=\int_0^{+\infty}\tilde{u}_{m,ik,s}(t,\lambda)V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda;\ j=\overline{1,n+1}. \quad (37)$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{jm,ik,s}(t,r)$, визначених формулами (37), обернені оператори Λ_s^{-1} та $F_{m,ik}^{-1}$, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$
\begin{aligned}
& u_j(t,r,\varphi,z) = \\
& = \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jp}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi) f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
& + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi) g_p(\rho,\alpha,\xi)\sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho + \\
& + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-l_1}^{l_2} Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau + \qquad (38) \\
& + \sum_{p=1}^{n+1} a_{zp}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \Big[W_{jp,1}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z) w_p^1(\tau,\rho,\alpha) + \\
& + W_{jp,2}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z) w_p^2(\tau,\rho,\alpha) \Big] \sigma_p \rho d\alpha d\rho d\tau + \\
& + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} W_{jr,ik}(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z,\xi) g_0(\tau,\alpha,\xi) d\xi d\alpha d\tau; \; j=\overline{1,n+1},
\end{aligned}
$$

які визначають єдині розв’язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$
\begin{aligned}
E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi) &= \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \varepsilon_m^{ik} N(t,\lambda,\gamma_s) V_j(r,\lambda) V_p(\rho,\lambda) \times \\
& \times \Omega(\lambda) d\lambda \frac{v_s(z+l_1) v_s(\xi+l_1)}{\| v_s(z+l_1) \|^2} U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha)
\end{aligned}
$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$
\begin{aligned}
Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi) &= \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \varepsilon_m^{ik} N(t-\tau,\lambda,\gamma_s) V_j(r,\lambda) V_p(\rho,\lambda) \times \\
& \times \Omega(\lambda) d\lambda \frac{v_s(z+l_1) v_s(\xi+l_1)}{\| v_s(z+l_1) \|^2} \Phi_{m,ik}(\tau,\rho,\xi) U_{m,ik}(\varphi),
\end{aligned}
$$

компоненти $W_{jp,1}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z) = E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,-l_1)$ нижньої аплікатної матриці Гріна (нижні аплікатні функції Гріна), компоненти

$W_{jp,2}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,l_2)$ верхньої аплікатної матриці Гріна (верхні аплікатні функції Гріна) та компоненти $W_{jr,ik}(t,r,\varphi,\alpha,z,\xi)=-\left(\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}a_1^2R_0\sigma_1E_{j1}^{ik}(t,r,R_0,\varphi,\alpha,z,\xi)$ радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження.

Проаналізуємо формули (38) залежно від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного циліндрично-кругового шару з порожниною. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (8). У цьому випадку функції Гріна мають вигляд

$$Q_{jp}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\varepsilon_m^{ik}N(t-\tau,\lambda,\gamma_s)V_j(r,\lambda)V_p(\rho,\lambda)\times$$

$$\times\Omega(\lambda)d\lambda\frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{\left\|v_s(z+l_1)\right\|^2}\left[-g_{4p}(\tau,\rho,\xi)+(-1)^{m+1}w_{4p}(\tau,\rho,\xi)\right]\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0}.$$

Якщо визначити тангенціальні функції Гріна

$$R_{jp,1}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=-\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\varepsilon_m^{22}N(t-\tau,\lambda,\gamma_s)V_j(r,\lambda)V_p(\rho,\lambda)\times$$

$$\times\Omega(\lambda)d\lambda\frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{\left\|v_s(z+l_1)\right\|^2}\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

$$R_{jp,2}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^{m+1}\varepsilon_m^{22}N(t-\tau,\lambda,\gamma_s)V_j(r,\lambda)\times$$

$$\times V_p(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\frac{v_s(z+l_1)v_s(\xi+l_1)}{\left\|v_s(z+l_1)\right\|^2}\cos\frac{\pi m\varphi}{\varphi_0},$$

то єдиний точний аналітичний розв'язок параболічної початково-крайової задачі спряження (1)-(4), (8), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,22}(t,r,\varphi,z)=$$

$$=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{22}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_\rho\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-l_1}^{l_2}E_{jp}^{2}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z,\xi)g_p(\rho,\alpha,\xi)\sigma_\rho\rho d\xi d\alpha d\rho\times$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_{-l_1}^{l_2}[R_{jp,1}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)g_{4p}(\tau,\rho,\xi)+ \qquad (39)$$

$$+R_{jp,2}^{22}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)w_{4p}(\tau,\rho,\xi)]\sigma_p\rho^{-1}d\xi d\rho d\tau+$$

$$+\sum_{p=1}^{n+1} a_{zp}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} [W_{jp,1}^{22}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^1(\tau, \rho, \alpha) +$$

$$+W_{jp,2}^{22}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^2(\tau, \rho, \alpha)] \sigma_p \rho d\alpha d\rho d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} W_{jr,22}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) d\xi d\alpha d\tau; \; j = \overline{1, n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу і функцій Гріна безпосередньо перевіряється, що функції $u_{j,22}(t, r, \varphi, z)$, визначені формулами (39), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (8) та умови спряження (9) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Єдиність розв'язку (39) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)-(4), (8), (9).

Методами з [18, 19] можна довести, що при відповідних умовах на вихідних даних формули (39) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $w_j^s(t, r, \varphi)$, $g_{4j}(t, r, z)$, $w_{4j}(t, r, z)$, $(s = 1, 2)$, $(j = \overline{1, n+1})$:

1) неперервно диференційовні за змінною t і двічі неперервно диференційовні за геометричними змінними;
2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
3) абсолютно сумовні з ваговою функцією $r\sigma(r)$ на осі I_n^+;
4) справджують умови спряження, функція $g_0(t, \varphi, z)$ задовольняє умови 1), 2), то параболічна початково-крайова задача спряження (1)-(4), (8), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (39).

Випадки крайових умов (5)-(7) на гранях клина можна проаналізувати аналогічно.

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі з порожниною.

Зауваження 2. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ зводиться до розглянутого заміною $\varphi' = \varphi - \varphi_1$, $\varphi_0 \equiv \varphi_2 - \varphi$.

Зауваження 3. Параметри α_{11}^0, β_{11}^0 дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні $r = R_0$ крайових умов 1-го роду $(\alpha_{11}^0 = 0,\ \beta_{11}^0 = 1)$, 2-го роду $(\alpha_{11}^0 = -1,\ \beta_{11}^0 = 0)$, та 3-го роду $(\alpha_{11}^0 = -1,\ \beta_{11}^0 \equiv h > 0)$.

Зауваження 4. Параметри p_1, p_2 дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах $z = -l_1$, $z = l_2$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Аналіз розв'язків (38) залежно від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j(r,\varphi,z)$, $g_0(t,\varphi,z)$, $w_j^s(t,r,\varphi)$, $g_{pj}(t,r,z)$, $w_{pj}(t,r,z)$, $\left(s = 1,2;\ p = \overline{1,4};\ j = \overline{1,n+1}\right)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі з порожниною. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних клиновидних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

Список використаних джерел:

1. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1998. 225 с.
2. Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д. Параболические граничные задачи. Кишинев: Штиинца, 1992. 327 с.
3. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. Львов: Изд-во ЛГУ, 1961. 115 с.
4. Ивасишен С. Д. Матрица Грина параболических задач. Киев: Вища школа, 1990. 199 с.
5. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. Чернівці: Прут, 2003. 248 с.
6. Пукальський І. Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями. Чернівці: Рута, 2008. 253 с.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968. 428 с.

8. Эйдельман С. Д. Параболические системы. Москва: Наука, 1964. 444 с.
9. Дейнека В. С., Сергиенко И. В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 2001. 606 с.
10. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. Киев: Наук. думка, 1998. 614 с.
11. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев: Наук. думка, 1991. 432 с.
12. Громик А. П., Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних циліндричних середовищах. Кам'янець-Подільський: ПП «Видавництво Абетка світ», 2020. 200 с.
13. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. Чернівці: Технодрук, 2019. 200 с.
14. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах. Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2013. 120 с.
15. Громик А. П., Конет І. М., Пилипюк Т. М. Параболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі. *Нелінійні коливання.* 2021. Т. 24. № 4. С. 460-472.
16. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ: Либідь, 2006. 424 с.
17. Конет І. М., Ленюк М. П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. Чернівці: Прут, 2001. 312 с.
18. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Москва: Наука, 1965. 328 с.
19. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Москва: Физматгиз, 1958. 274 с.

PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN A PIECEWISE HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED CYLINDRICAL-CIRCULAR LAYER WITH A CAVITY

The unique exact analytical solutions of parabolic boundary value problems of mathematical physics in piecewise homogeneous by the radial variable *z* wedge-shaped by the angular variable cylindrical-circular layer with a cavity were constructed at first time by the method of classical integral and hybrid integral transforms in combination with the method of main solutions (matrices of influence and Green matrices) in the proposed article.

The cases of assigning on the verge of the wedge the boundary conditions of the 1st kind (Dirichlet) and the 2nd kind (Neumann) and their possible combinations (Dirichlet — Neumann, Neumann — Dirichlet) are considered.

Finite integral Fourier transform by an angular variable, a finite integral Fourier transform on the Cartesian segment by an applicative variable and a hybrid integral transform of the Weber type on the polar axis with *n* points of conjugation by a radial variable were used to construct solutions of investigated boundary value problems.

The consistent application of integral transforms by geometric variables allows us to reduce the three-dimensional initial boundary-value problems of conjugation to the Cauchy problem for a regular linear inhomogeneous 1st order differential equation whose unique solution is written in a closed form.

The consistent application of inverse integral transforms to the obtained solution in the space of images restores the solutions of the considered parabolic boundary value problems through their integral image in an explicit form in the space of the originals.

At the same time, the main solutions to the problems were obtained in an explicit form.

Key words: *parabolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, hybrid integral transforms, main solutions.*

Отримано: 12.10.2022

УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2022-23.29-43

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ШТЕЙНЕРА В ДЕЯКОМУ ПОЛІНОРМОВАНОМУ ПРОСТОРІ

Відомо, що важливою екстремальною задачею в лінійному нормованому просторі є класична задача Штейнера, яка полягає у відшуканні в множині цього простору такої точки (точки Штейнера), сума відстаней до якої від кількох фіксованих точок простору була б мінімальною (див, наприклад, [1, с. 314]).

У цій задачі передбачається, що всі відрізки лінійного нормованого простору є «однорідними». Проте на практиці часто їх довжини мають різні «вагові» характеристики.

З урахуванням зазначеного приходимо до задачі відшукання в множині лінійного нормованого простору такої точки, сума зважених відстаней до якої від кількох фіксованих точок цього простору була б мінімальною (див, наприклад, [2, с. 468; 3; 4]).

Задача, що розглядається в статті, отримується внаслідок заміни у класичній задачі Штейнера суми відстаней між фіксованими точками лінійного простору і точками множини її допустимих елементів, які визначаються однією нормою, сумою відстаней між зазначеними вище точками з додатними ваговими коефіцієнтами, які визначаються відповідними, взагалі кажучи, різними нормами, заданими на цьому лінійному просторі. Її названо узагальненою задачею Штейнера в полінормованому просторі.