conjugation to the Cauchy problem for a regular linear inhomogeneous 1st order differential equation whose unique solution is written in a closed form.

The consistent application of inverse integral transforms to the obtained solution in the space of images restores the solutions of the considered parabolic boundary value problems through their integral image in an explicit form in the space of the originals.

At the same time, the main solutions to the problems were obtained in an explicit form.

Key words: *parabolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, hybrid integral transforms, main solutions.*

Отримано: 12.10.2022

УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2022-23.29-43

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ШТЕЙНЕРА В ДЕЯКОМУ ПОЛІНОРМОВАНОМУ ПРОСТОРІ

Відомо, що важливою екстремальною задачею в лінійному нормованому просторі є класична задача Штейнера, яка полягає у відшуканні в множині цього простору такої точки (точки Штейнера), сума відстаней до якої від кількох фіксованих точок простору була б мінімальною (див, наприклад, [1, с. 314]).

У цій задачі передбачається, що всі відрізки лінійного нормованого простору є «однорідними». Проте на практиці часто їх довжини мають різні «вагові» характеристики.

З урахуванням зазначеного приходимо до задачі відшукання в множині лінійного нормованого простору такої точки, сума зважених відстаней до якої від кількох фіксованих точок цього простору була б мінімальною (див, наприклад, [2, с. 468; 3; 4]).

Задача, що розглядається в статті, отримується внаслідок заміни у класичній задачі Штейнера суми відстаней між фіксованими точками лінійного простору і точками множини її допустимих елементів, які визначаються однією нормою, сумою відстаней між зазначеними вище точками з додатними ваговими коефіцієнтами, які визначаються відповідними, взагалі кажучи, різними нормами, заданими на цьому лінійному просторі. Її названо узагальненою задачею Штейнера в полінормованому просторі.

Зрозуміло, що описані вище екстремальні задачі є частковими випадками узагальненої задачі Штейнера в полінормованому просторі.

Частковим випадком цієї задачі є також задача найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, яка досліджувалась багатьма авторами.

Основні результати дослідження задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [5], В. К. Дзядика [6], М. П. Корнєйчука [7], О. І. Степанця [8, 9] та ін.

У статті встановлено умови екстремальності допустимого елемента для узагальненої задачі Штейнера в поліноміальному просторі, які узагальнюють відповідні результати, отримані, зокрема, у працях [3; 7; 10] для описаних вище часткових випадків цієї задачі.

Ключові слова: *лінійний нормований простір, полінормований простір, задача Штейнера, точка Штейнера, екстремальний елемент, умови екстремальності допустимого елемента.*

Вступ. У статті встановлено еквівалентність узагальненої задачі Штейнера в полінормованому просторі деякій задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору; отримано співвідношення двоїстості для узагальненої задачі Штейнера; доведено критерій екстремальності допустимого елемента для розглядуваної задачі, оснований на цьому співвідношенні, а також достатню умову та критерій колмогоровського типу екстремальності допустимого елемента; отримані результати конкретизовано на важливі часткові випадки.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел простір, $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$, — норми, задані на X. Тоді $\left(X, \|\bullet\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ є полінормованим простором (див, наприклад, [11, с.50]). Нехай, крім того, $\left(a_1,...,a_m\right)\in X^m$, де $X^m = X\times...\times X$ — m-арний декартів (прямий) добуток множини X, c_i, $i=\overline{1,m}$, — додатні дійсні числа, $V\subset X$.

Поставимо задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*\left(a_1,...,a_m\right)=\inf_{x\in V}\sum_{i=1}^{m}c_i\left\|a_i-x\right\|_i , \qquad (1)$$

яку будемо називати узагальненою задачею Штейнера у полінормованому просторі $\left(X, \|\bullet\|_i, i=\overline{1,m}\right)$.

Якщо існує елемент $x^* \in V$ такий, що

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \left\| a_i - x^* \right\|_i = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^{m} c_i \left\| a_i - x \right\|_i = \alpha_V^* \left(a_1, ..., a_m \right),$$

то його будемо називати узагальненою точкою Штейнера в множині V для точок $a_1, ..., a_m$ або екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1) (екстремальним елементом для величини (1)).

Актуальність теми. Актуальність задачі відшукання величини (1) та її екстремального елемента випливає уже зі змісту поняття узагальненої точки Штейнера, оскільки сума зважених відстаней $c_i \left\| a_i - x^* \right\|_i$ від точок $a_i \in X$ до цієї точки $x^* \in V$ не перевищує суми зважених відстаней $c_i \left\| a_i - x \right\|_i$, $i = \overline{1, m}$, від усіх цих точок до кожної точки $x \in V$.

Задача Штейнера знаходить застосування при вирішенні питань розташування центра обслуговування, деяких проблем механіки тощо.

Задача (1) у випадку, коли $\left\| \bullet \right\|_i = \left\| \bullet \right\|$, $i = \overline{1, m}$, співпадає із задачею відшукання величини

$$\inf_{x \in V} \sum_{i=1}^{m} c_i \left\| a_i - x \right\| \tag{2}$$

та її екстремального елемента (так званою, «зваженою» задачею Штейнера), яка є деякою екстремальною задачею в лінійному нормованому просторі $\left(X, \left\| \bullet \right\| \right)$, що досліджувалась, зокрема, у працях [3; 4].

При $\left\| \bullet \right\|_i = \left\| \bullet \right\|$, $c_i = 1$, $i = \overline{1, m}$, задача (1) зводиться до відомої класичної задачі Штейнера

$$\inf_{x \in V} \sum_{i=1}^{m} \left\| a_i - x \right\| \tag{3}$$

(див, наприклад, [1, с. 314; 2, с. 517]).

Як частковий випадок задачі (1) при $m = 1$, $c_1 = 1$, $\left\| \bullet \right\|_1 = \left\| \bullet \right\|$ отримується задача відшукання величини

$$\inf_{x \in V} \left\| a_1 - x \right\| \tag{4}$$

та її екстремального елемента, яка є задачею найкращого наближення елемента a_1 лінійного нормованого простору $\left(X, \left\| \bullet \right\| \right)$ множиною V цього простору (див, наприклад, [7, с.11]).

Актуальність задачі відшукання величини (1) підсилюється ще й тим, що результати загального характеру, отримані при дослідженні цієї задачі, становитимуть самостійний інтерес, а також слугуватимуть для отримання відповідних результатів для задач (2)-(4) та інших задач, які вкладаються у схему постановки задачі (1).

З огляду на зазначене вище можна зробити висновок, що дослідження задачі відшукання величини (1) є актуальною проблемою.

Мета роботи. Важливим питанням дослідження задачі (1) є встановлення умов екстремальності її допустимого елемента, що стало метою цієї роботи.

Допоміжні твердження. Нехай, як і вище, X^m — m-арний декартів (прямий) добуток множини X, тобто

$$X^m = \left\{ \left(x_1, ..., x_m \right) : x_i \in X, i = \overline{1,m} \right\}.$$

Покладемо для $x = \left(x_1, ..., x_m \right)$, $y = \left(y_1, ..., y_m \right) \in X^m$, $\alpha \in R$:

$$x + y = \left(x_1 + y_1, ..., x_m + y_m \right), \ \alpha x = \left(\alpha x_1, ..., \alpha x_m \right).$$

Легко переконатися, що операції додавання елементів X^m та множення дійсних чисел на ці елементи задовольняють аксіоми лінійного простору. Отже, X^m з означеними вище операціями є лінійним над полем дійсних чисел простором.

Твердження 1. *Якщо в лінійному над полем дійсних чисел просторі* X^m *для кожного* $\left(x_1, ..., x_m \right) \in X^m$ *покласти* $\left\| \left(x_1, ..., x_m \right) \right\|_{X^m} = \sum_{i=1}^{m} c_i \left\| x_i \right\|_i$, *то відповідність*

$$\left(x_1, ..., x_m \right) \in X^m \to \sum_{i=1}^{m} c_i \left\| x_i \right\|_i$$

є нормою, заданою на X^m, *і, отже,* $\left(X^m, \left\| \bullet \right\|_{X^m} \right)$ *є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором.*

Покладемо далі $X_i = X$ та позначимо через $\left(X^m \right)^*$ — простір, спряжений з простором $\left(X^m, \left\| \bullet \right\|_{X^m} \right)$, через X_i^* — простір, спряжений з лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором $\left(X_i, \left\| \bullet \right\|_i \right) = \left(X, \left\| \bullet \right\|_i \right)$, $i = \overline{1,m}$.

Теорема 1. *Для того щоб елемент* φ *належав простору* $\left(X^m \right)^*$, *необхідно і достатньо, щоб існували однозначно визначені функціонали* $f_i \in X_i^*$, $i = \overline{1,m}$, *такі, що*

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i(x_i),\ (x_1,...,x_m) \in X^m, \tag{5}$$

причому справедлива рівність

$$\|\varphi\| = \max_{1\le i\le m} \| f_i \|. \tag{6}$$

Доведення. *Достатність.* Нехай

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i(x_i),\ (x_1,...,x_m) \in X^m, \tag{7}$$

де $f_i \in X_i^*$, $i = \overline{1,m}$.

Оскільки для $(x_1,...,x_m)$, $(y_1,..., y_m)$, $\alpha \in R$ внаслідок (7) маємо, що

$$\varphi((x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_m)) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot (f_i(x_i) + f_i(y_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i(y_i) = \varphi(x_1,...,x_n) + \varphi(y_1,...,y_m),$$

$$\varphi(\alpha(x_1,...,x_n)) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i(\alpha x_i) = \alpha \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i(x_i) = \alpha\varphi(x_1,...,x_n),$$

то функціонал φ є лінійним на X^m.

Зі співвідношення (7) випливає, що для всіх $(x_1,...,x_m) \in X^m$

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1,...,x_n)| &= \left|\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot f_i(x_i)\right| \le \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot | f_i(x_i)| \le \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \| f_i\|\|x_i\|_i \le \\ &\le \max_{1\le i\le m}\| f_i\|\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \|x_i\|_i\right) = \max_{1\le i\le m}\| f_i\|\|(x_1,..., x_m)\|_{X^m}. \end{aligned} \tag{8}$$

З (8) отримуємо, що лінійний на X^m функціонал φ є обмеженим на X^m і, отже, $\varphi \in (X^m)^*$ (див, наприклад, [12, с. 203]). Крім того, зі співвідношень (8) робимо висновок, що

$$\|\varphi\| \le \max_{1\le i\le m} \| f_i \|. \tag{9}$$

З рівності (7) для всіх $x_i \in X_i$, $i = \overline{1,m}$, маємо, що

$$\varphi(0,...,0, x_i, 0,...,0) = c_i f_i(x_i) \le \|\varphi\|\|(0,...,0, x_i, 0,...,0)\|_{X^m} =$$

$$= \|\varphi\|(c_1\|0\|_1 + ... + c_{i-1}\|0\|_{i-1} + c_i\|x_i\|_i + c_{i+1}\|0\|_{i+1} + ... + c_m\|0\|_m) = \|\varphi\| c_i\|x_i\|_i.$$

Тому $f_i(x_i) \le \|\varphi\|\|x_i\|_i$, $x_i \in X_i$, $i = \overline{1,m}$. Звідки $\| f_i\| \le \|\varphi\|$, $i = \overline{1,m}$. Отже,

$$\max_{1\le i\le m}\left\| f_i \right\| \le \left\| \varphi \right\|. \qquad (10)$$

З (9), (10) випливає справедливість рівності (6).

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $\varphi \in \left(X^m \right)^*$. Для всіх $\left(x_1, ..., x_m \right) \in X^m$

$$\varphi\left(x_1, ..., x_m \right) = \varphi\left(x_1, 0, ..., 0 \right) + \varphi\left(0, x_2, ..., 0 \right) + ... + \varphi\left(0, 0, ..., x_m \right) =$$

$$= c_1 \left(\frac{1}{c_1} \varphi\left(x_1, 0, ..., 0 \right) \right) + c_2 \left(\frac{1}{c_2} \varphi\left(0, x_2, ..., 0 \right) \right) + ... + c_m \left(\frac{1}{c_m} \varphi\left(0, 0, ..., x_m \right) \right) =$$

$$= c_1 f_1^{\varphi}\left(x_1 \right) + c_2 f_2^{\varphi}\left(x_2 \right) + ... + c_m f_m^{\varphi}\left(x_m \right) = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i^{\varphi}\left(x_i \right), \qquad (11)$$

де

$$f_i^{\varphi}\left(x_i \right) = \frac{1}{c_i} \varphi\left(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0 \right), \; x_i \in X_i, \; i = \overline{1, m}. \qquad (12)$$

Легко переконатися, що функціонали $f_i^{\varphi}\left(x_i \right)$, $x_i \in X_i$, $i = \overline{1, m}$, є лінійними на X_i, $i = \overline{1, m}$. Для цих функціоналів зі співвідношення (12) отримуємо

$$\left| f_i^{\varphi}\left(x_i \right) \right| = \frac{1}{c_i} \left| \varphi\left(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0 \right) \right| \le \frac{1}{c_i} \left\| \varphi \right\| \left\| \left(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0 \right) \right\|_{X^m} =$$

$$= \frac{1}{c_i} \left\| \varphi \right\| c_i \left\| x_i \right\|_i = \left\| \varphi \right\| \left\| x_i \right\|_i, \; x_i \in X_i, \; i = \overline{1, m}.$$

Звідси випливає, що $f_i^{\varphi} \in X_i^*$, $i = \overline{1, m}$.

З урахуванням цього, рівності (11), співвідношень (9) та (10) робимо висновок про справедливість рівностей (5), (6).

Для будь-якого подання (5) маємо, що для $x_i \in X_i$

$$\varphi\left(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0 \right) = c_i f_i \left(x_i \right),$$

$$f_i \left(x_i \right) = \frac{1}{c_i} \varphi\left(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0 \right) = f_i^{\varphi}\left(x_i \right), \; i = \overline{1, m}.$$

Тому в поданні (5) функціонали $f_i \in X_i^*$, $i = \overline{1, m}$, визначаються однозначно. Для них $f_i \left(x_i \right) = f_i^{\varphi}\left(x_i \right)$, $x_i \in X_i$, $i = \overline{1, m}$.

Необхідність доведено.

Теорему доведено.

Позначимо через $D = \left\{ \left(x, ..., x \right) : x \in V \right\}$ — діагональ множин $V^m = V \times ... \times V$.

Поряд із задачею відшукання узагальненої точки Штейнера в множині V для точок $a_i \in X_i$, $i = \overline{1,m}$, будемо розглядати задачу найкращого наближення точки $(a_1,...,a_m)$ простору $\left(X^m, \|\bullet\|_{X^m}\right)$ множиною D, тобто задачу відшукання величини

$$E_D(a_1,...,a_m) = \inf_{(x,...,x)\in D} \left\|(a_1,...,a_m)-(x,...,x)\right\| \qquad (13)$$

та її екстремального елемента.

Теорема 2. *Має місце рівність*

$$\begin{aligned}\alpha_V^*(a_1,...,a_m) &= \inf_{x\in V}\sum_{i=1}^m c_i\|a_i - x\|_i = \\ &= \inf_{(x,...,x)\in D}\left\|(a_1,...,a_m)-(x,...,x)\right\|_{X^m} = E_D(a_1,...,a_m).\end{aligned} \qquad (14)$$

Елемент $x^* \in V$ *буде екстремальним елементом для величини (1) тоді і тільки тоді, коли елемент* $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$ *буде екстремальним для величини (13)* .

Доведення. Маємо, що для $x \in V$

$$\sum_{i=1}^m c_i\|a_i - x\|_i = \left\|(a_1,...,a_m)-(x,...,x)\right\|_{X^m} \ge \inf_{(x,...,x)\in D}\left\|(a_1,...,a_m)-(x,...,x)\right\|_{X^m}.$$

Звідки

$$\inf_{x\in V}\sum_{i=1}^m c_i\|a_i - x\|_i \ge \inf_{(x,...,x)\in D}\left\|(a_1,...,a_m)-(x,...,x)\right\|_{X^m}. \qquad (15)$$

Навпаки, для кожного вектора $(x,...,x)\in D$ маємо, що $x \in V$ та

$$\begin{aligned}&\left\|(a_1,...,a_m)-(x,...,x)\right\|_{X^m} = \left\|(a_1 - x,...,a_m - x)\right\|_{X^m} = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i\|a_i - x\|_i \ge \inf_{x\in V}\sum_{i=1}^m c_i\|a_i - x\|_i.\end{aligned}$$

Звідки

$$\inf_{(x,...,x)\in D}\left\|(a_1,...,a_m)-(x,...,x)\right\|_{X^m} \ge \inf_{x\in V}\sum_{i=1}^m c_i\|a_i - x\|_i. \qquad (16)$$

Зі співвідношень (15), (16) випливає рівність (14). Нехай $x^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1). Тоді $\left(x^*,...,x^*\right)\in D$. Згідно з рівністю (14)

$$\alpha_V^*(a_1,...,a_m) = \sum_{i=1}^m c_i\left\|a_i - x^*\right\|_i =$$

$$= \left\| (a_1,...,a_m) - \left(x^*,...,x^*\right) \right\|_{X^m} = E_D\left(a_1,...,a_m\right).$$

Це означає, що $\left(x^*,...,x^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (13). Аналогічно доводиться, що для будь-якого екстремального елемента $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$ для величини (13) елемент $x^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (1).

Теорема 3. *Якщо в задачі відшукання величини (1)* V *є опуклою множиною, то для цієї задачі має місце таке співвідношення двоїстості:*

$$\alpha_V^*\left(a_1,...,a_m\right) = \inf_{x\in V} \sum_{i=1}^m c_i \left\|a_i - x\right\|_i = \max_{\substack{f_i \in X_i^*, \\ \|f_i\| \le 1; \\ i=\overline{1,m}}} \left(\sum_{i=1}^m c_i f_i\left(a_i\right) - \sup_{x\in V} \left(\sum_{i=1}^m c_i f_i \right)(x) \right). \quad (17)$$

Доведення. Перш за все переконаємося, що D є опуклою множиною простору X^m. Нехай $(x,...,x)$, $(y,...,y) \in D$. Тоді $x, y \in V$. Переконаємося, що відрізок $\left[(x,...,x),(y,...,y)\right] \subset D$. Для будь-якої точки $\left(z_1,...,z_m\right)$ цього відрізка існує $\alpha \in [0,1]$ таке, що

$$\left(z_1,...,z_m\right) = (1-\alpha)(x,...,x) + \alpha(y,...,y) =$$
$$= \left((1-\alpha)x + \alpha y,...,(1-\alpha)x + \alpha y\right) \in D,$$

оскільки внаслідок опуклості V $(1-\alpha)x + \alpha y \in V$.

З урахуванням зазначеного, теореми 2 та теореми 2.3.1 [7, с. 28] одержимо, що

$$\alpha_V^*\left(a_1,...,a_m\right) = E_D\left(a_1,...,a_m\right) = \inf_{(x,...,x)\in D} \left\| \left(a_1,...,a_m\right) - (x,...,x) \right\|_{X^m} =$$
$$= \max\left\{ \varphi\left(a_1,...,a_m\right) - \sup_{(x,..,x)\in D} \varphi(x,...x) : \varphi \in \left(X^m\right)^*, \|\varphi\| \le 1 \right\} =$$
$$= \varphi^*\left(a_1,...,a_m\right) - \sup_{(x,..,x)\in D} \varphi^*(x,...x), \quad (18)$$

де $\varphi^* \in \left(X^m\right)^*$, $\left\|\varphi^*\right\| \le 1$.

Згідно з теоремою 1 існують функціонали $f_i^* \in X_i^*$, $i = \overline{1,m}$, такі, що

$$\varphi^*\left(x_1,...,x_n\right) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot f_i^*\left(x_i\right),\ \left(x_1,...,x_m\right) \in X^m, \quad (19)$$

та

$$\max_{1\le i\le m}\left\|f_i^*\right\|=\left\|\varphi^*\right\|\le 1\,. \tag{20}$$

З урахуванням (19) співвідношення (18) набере вигляду

$$\alpha_V^*\left(a_1,...,a_m\right)=\inf_{x\in V}\sum_{i=1}^{m}c_i\left\|a_i-x\right\|_i=\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^*\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^*\right)\left(x\right), \tag{21}$$

де $f_i^*\in X_i^*$, причому, згідно (20), $\left\|f_i^*\right\|\le 1$, $i=\overline{1,m}$. Для будь-яких інших $f_i\in X_i^*$, $\left\|f_i\right\|\le 1$, $i=\overline{1,m}$, матимемо, що

$$\sum_{i=1}^{m}c_i f_i\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^{m}c_i f_i\right)\left(x\right)\le\sum_{i=1}^{m}c_i f_i\left(a_i\right)-\sum_{i=1}^{m}c_i f_i\left(x\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i f_i\left(a_i-x\right)\le\sum_{i=1}^{m}c_i\max_{\substack{f_i\in X_i^*,\\ \left\|f_i\right\|\le 1}}f_i\left(a_i-x\right)=\sum_{i=1}^{m}c_i\left\|a_i-x\right\|_i$$

для будь-якого $x\in V$.

Звідси та (21) отримаємо, що для будь-яких $f_i\in X_i^*$, $\left\|f_i\right\|\le 1$, $i=\overline{1,m}$,

$$\sum_{i=1}^{m}c_i f_i\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^{m}c_i f_i\right)\left(x\right)\le\inf_{x\in V}\sum_{i=1}^{m}c_i\left\|a_i-x\right\|_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^*\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^*\right)\left(x\right),$$

де $f_i^*\in X_i^*$, $\left\|f_i^*\right\|\le 1$, $i=\overline{1,m}$.

Звідси й випливає справедливість співвідношення (17).

Теорему доведено.

Критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (1), оснований на співвідношенні двоїстості.

Теорема 4. *Нехай в задачі відшукання величини (1) V є опуклою множиною. Для того щоб елемент $x^*\in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^*\in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, такі, що:*

1) $\left\|f_i^*\right\|\le 1$, $i=\overline{1,m}$, *причому в цій нерівності досягається знак рівності для всіх $i=\overline{1,m}$ таких, що $x^*\ne a_i$;*
2) $f_i^*\left(x_i-x^*\right)=\left\|a_i-x^*\right\|_i$, $i=\overline{1,m}$;

3) $\max\limits_{x\in V}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i^*\right)(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i^*\right)\left(x^*\right).$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $x^*\in V$ є екстремальним елементом для величини (1) та $f_i^*\in X_i^*$, $\left\|f_i^*\right\|\le 1$, $i=\overline{1,m}$, — функціонали, на яких реалізується максимум у правій частині рівності (17). Тоді

$$\alpha_V^*\left(a_1,\dots,a_m\right)=\inf_{x\in V}\sum_{i=1}^{m} c_i\left\|a_i-x\right\|_i=\sum_{i=1}^{m} c_i\left\|a_i-x^*\right\|_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\right)(x)\le\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(a_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\right)\left(x^*\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(a_i-x^*\right)\le\sum_{i=1}^{m} c_i\left\|f_i^*\right\|\left\|a_i-x^*\right\|_i\le\sum_{i=1}^{m} c_i\left\|a_i-x^*\right\|_i. \tag{22}$$

Зі співвідношення (22) випливає, що в нерівностях, які фігурують в ньому, насправді має місце знак рівності. Тому

$$\max_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\right)(x)=\left(\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\right)\left(x^*\right);$$

$$\left\|f_i^*\right\|=1,\ \text{якщо}\ \left\|a_i-x^*\right\|_i>0,\ \text{тобто, якщо}\ a_i\ne x^*;$$

$$f_i^*\left(a_i-x^*\right)=\left\|a_i-x^*\right\|_i,\ i=\overline{1,m},$$

що й потрібно було встановити.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $x^*\in V$ та існують функціонали $f_i^*\in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, такі, для яких виконуються умова 1)-3) теореми. Тоді з цих умов для будь-якого $x\in V$ одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*(x)\le\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(x^*\right),\ \sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*(-x)\ge\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(-x^*\right),$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i\left\|a_i-x\right\|_i\ge\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(a_i-x\right)\ge\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(a_i-x^*\right)=\sum_{i=1}^{m} c_i\left\|a_i-x^*\right\|_i.$$

Це й означає, що x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Достатність доведено.

Теорему доведено.

Зауважимо, що умову 3) в теоремі 4 можна записати в такій еквівалентній формі: 3) $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(x-x^*\right)\le 0$ для всіх $x\in V$.

З урахуванням цього зауваження теорему 4 можна сформулювати наступним чином.

Теорема 5. *Нехай в задачі відшукання величини (1)* V *є опуклою множиною. Для того щоб елемент* $x^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали* $f_i^* \in X_i^*$, $i = \overline{1,m}$, *такі, що:*

1) $\left\| f_i^* \right\| \le 1$, $i = \overline{1,m}$, *причому в цій нерівності досягається знак рівності для всіх* $i = \overline{1,m}$ *таких, що* $x^* \ne a_i$;
2) $f_i^*\left(a_i - x^*\right) = \left\| a_i - x^* \right\|_i$, $i = \overline{1,m}$;
3) $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(x - x^*\right) \le 0$ *для всіх* $x \in V$.

Якщо в задачі відшукання величини (1) норми $\|\bullet\|_i$, $i = \overline{1,m}$, однакові і дорівнюють $\|\bullet\|$, то $\left(X_i, \|\bullet\|_i\right) = \left(X, \|\bullet\|\right)$, $i = \overline{1,m}$. В цьому випадку задача (1) набере вигляд задачі (2).

Наслідок 1 (див. [3]). *Нехай в задачі відшукання величини (2)* V *є опуклою множиною. Для того щоб точка* $x^* \in V$ *була екстремальним елементом для величини (2), необхідно і достатньо існування функціоналів* $f_i^* \in X^*$, $i = \overline{1,m}$, *таких, що:*

1) $\left\| f_i^* \right\| \le 1$, $i = \overline{1,m}$, *причому в цій нерівності досягається знак рівності для всіх* $i = \overline{1,m}$ *таких, що* $x^* \ne a_i$;
2) $f_i^*\left(a_i - x^*\right) = \left\| a_i - x^* \right\|$, $i = \overline{1,m}$;
3) $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(x - x^*\right) \le 0$ *для всіх* $x \in V$.

Наслідок 2. *Нехай в задачі відшукання величини (1)* V *є підпростором простору* X. *Для того щоб елемент* $x^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціоналів* $f_i^* \in X_i^*$, $i = \overline{1,m}$, *для яких виконуються умови 1)-2) теореми 5 та умова 3)* $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^*\left(x\right) = 0$ *для всіх* $x \in V$.

Наслідок 3. *Нехай в задачі відшукання величини (1)* V *є підпростором простору* X, *породженим його векторами* $x_1, \dots x_n$, *тобто*

$$V=\left\{x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j:\alpha_j\in R,\ j=\overline{1,n}\right\}.$$

Для того щоб елемент $x^*\in V$ був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціоналів $f_i^*\in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, для яких виконуються умови 1), 2) теореми 5 та умова 3) $\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^*\left(x_j\right)=0$, $j=\overline{1,n}$.

Наслідок 4. *Нехай в задачі відшукання величини (1) V є опуклим конусом з вершиною в точці 0. Для того щоб елемент $x^*\in V$ був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо існування функціоналів $f_i^*\in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, для яких виконуються умови 1), 2) теореми 5 та умова 3) $\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^*\left(x^*\right)=0$, $\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^*\left(x\right)\le 0$, $x\in V$.*

Достатня умова та критерій колмогоровського типу екстремальності допустимого елемента задачі відшукання величини (1).

Теорема 6. *Нехай в задачі відшукання величини (1) V є довільною множиною і $x^*\in V$. Якщо для кожного $x\in V$ існують функціонали $f_i^x\in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, такі, що:*

1) $\left\|f_i^x\right\|\le 1$, $i=\overline{1,m}$, *причому в цій нерівності досягається знак рівності для всіх $i=\overline{1,m}$ таких, що $x^*\ne a_i$;*
2) $f_i^x\left(a_i-x^*\right)=\left\|a_i-x^*\right\|_i$, $i=\overline{1,m}$;
3) $\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^x\left(x-x^*\right)\le 0$,

то x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Доведення. Нехай для кожного $x\in V$ існують функціонали $f_i^x\in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, такі, для яких мають місце співвідношення 1)-3). Відповідно до цих співвідношень для $x\in V$

$$0\ge\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^x\left(x-x^*\right)=\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^x\left(x-a_i+a_i-x^*\right)=\sum_{i=1}^{m}c_i f_i^x\left(a_i-x^*\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m} c_i f_i^x\left(a_i - x\right) \geq \sum_{i=1}^{m} c_i \left\|a_i - x^*\right\|_i - \sum_{i=1}^{m} c_i \max_{\substack{f_i \in X_i^*, \\ \|f_i\| \leq 1}} f_i \left(a_i - x\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \left\|a_i - x^*\right\|_i - \sum_{i=1}^{m} c_i \left\|a_i - x\right\|_i .$$

Звідки $\sum_{i=1}^{m} c_i \left\|a_i - x^*\right\|_i \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \left\|a_i - x\right\|_i$, $x \in V$.

Це й означає, що x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Теорема 7. *Нехай в задачі відшукання величини (1)* V *є опуклою множиною,* $x^* \in V$ *. Для того щоб елемент* x^* *був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного* $x \in V$ *існували функціонали* $f_i^x \in X_i^*$, $i = \overline{1, m}$, *такі, для яких виконуються умови 1)-3) теореми 6.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай x^* є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з теоремою 5 існують функціонали $f_i^* \in X_i^*$, $i = \overline{1, m}$, такі, для яких виконуються умови 1)-3) цієї теореми. Для кожного $x \in V$ покладемо $f_i^x = f_i^*$, $i = \overline{1, m}$. Тоді функціонали $f_i^x \in X_i^*$, $i = \overline{1, m}$, і згідно з умовами 1)-3) теореми 5 задовольняють умови 1)-3) теореми 6.

Необхідність доведено.

Достатність. Справедливість достатності випливає з теореми 6.

Теорему доведено.

Висновки. Для узагальненої задачі Штейнера в полінормованому просторі (див. задачу (1)):

- встановлено її еквівалентність деякій задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору (див. теорему 2);
- отримано співвідношення двоїстості (див. теорему 3);
- доведено критерій екстремальності допустимого елемента, оснований на отриманому співвідношенні двоїстості (див. теореми 4, 5);
- конкретизовано вищеназвані критерії на важливі часткові випадки задачі (див. наслідки 1-4);
- встановлено достатню умову (див. теорему 6) та критерій колмогоровського типу (див. теорему 7) екстремальності допустимого елемента;

- розглянуто деякі допоміжні твердження, які становлять також і самостійний інтерес.

Список використаних джерел:

1. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. Москва: Наука, 1967. 460 с.
2. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Москва: Наука, 1973. 552 с.
3. Рубинштейн Г. Ш. Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве. *Сиб. матем. журн.* 1965. Вип. 6. № 3. С. 711-714.
4. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови існування екстремального елемента для узагальненої задачі Штейнера в метричному просторі обмежених замкнених множин лінійного нормованого простору. *Вісник Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки.* Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2021. Вип. 14. С. 8-13.
5. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Москва: Наука, 1965. 407 с.
6. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций. Москва: Наука, 1977. 510 с.
7. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. Москва: Наука, 1976. 320 с.
8. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
9. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. II. 468 с.
10. Смирнов Г. С. О критерии наилучшего приближения абстрактной функции со значениями в банаховом пространстве. Киев, 1973. 20 с. (Препринт/АН УССР. Ин.-т математики; ИМ-73-8).
11. Пирковский А. Ю. Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. Москва: МЦНМО, 2010. 176 с.
12. Кадец В. М. Курс функционального анализа: учебное пособие для студентов механико-математического факультета. Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006. 607 с.

THE CONDITIONS OF EXTREMAL OF AN ALLOWABLE ELEMENT FOR THE GENERALIZED PROBLEM OF STEINER IN SOME POLYNORMED SPACE

It is known that an important extremal problem in a linear normed space is the classic problem of Steiner, which consists in finding in the set of this space a point (a point of Steiner) to which the sum of the distances from several fixed points of the space would be minimal [1, p. 314].

In this problem is assumed that all segments of linear normed space are «homogeneous». However, in practice, their lengths often have different «weight» characteristics.

We come to the problem of finding in the set of the linear normed space of such a point, that the sum of the weight distance from several fixed points of this space to this point would be minimal [2, p. 468; 3; 4].

The generalized Steiner's problem in a polynormed space is considered in the article. This problem is obtained as a result of replacing in classic Steiner's problem the sum of the distances from fixed points of linear space to the points of the set of its admissible elements, which are determined by one norm by the sum of the distances from the above-mentioned points with positive weighting coefficients, which are determined by the corresponding different norms determined on this linear space.

It is clear that the above extremal problems are special cases of the generalized Steiner's problem in polynormed space.

A special case of this problem is also the problem of the best approximation of an element of a linear normalized space by a convex set of this space, which has been studied by many authors.

The main results of research for the problem of the best approximation of an element of a linear normed space are summarized, in particular, in the monographs of N. I. Ahiezer [5], V. K. Dzyadyk [6], M. P. Korneychuk [7], O. I. Stepants [8, 9] and others.

In this article the conditions of extremal of an allowable element for the generalized problem of steiner in polynormed space, which generalize the results obtained, in particular for the above special cases are established.

Key words: *the linear normed space, the distance between sets, the polynormed space, the Steiner's problem, the point of Steiner, the extremal element, the conditions of extremal of an allowable element.*

Отримано: 10.10.2022