УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2022-23.98-106

Т. О. Петрова, канд. фіз.-мат. наук,
І. Л. Петрова, доктор філософії

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕГАТИВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДЛЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ОПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ В ПРОСТОРІ СОБОЛЄВА

Розглянуто питання інтерполяційного наближення функцій з класу Соболєва алгебраїчними поліномами. Питання позитивної апроксимації це питання апроксимації позитивних та r-разів неперервно диференційованих функцій алгебраїчними поліномами. Оцінки типу (1) для позитивної апроксимації розглядаються в роботах [1, 2]. Питання монотонної апроксимації це питання наближення монотонних функцій з класу Соболєва монотонними алгебраїчними поліномами. Оцінки типу (1) для монотонної апроксимації були доведені в роботах [3, 4, 7]. В роботах [3, 4] розглядається натуральний індекс в просторі Соболєва, який не дорівнює одиниці. В роботі [7] розглядається дійсний індекс простору Соболєва, який строго більший за два. Доведено, що оцінки типу (1) не виконуються для дійсного індексу більшого за два. Питання опуклої апроксимації це питання апроксимації опуклих функцій з класу Соболєва опуклими поліномами. Питання опуклої апроксимації розглядалося в роботах [8-10]. В роботі [8] розглядався натуральний індекс простору Соболєва, який не дорівнює одиниці. У роботі [9] розглядався дійсний індекс простору Соболєва, який строго більший за два. Було доведено, що для опуклої апроксимації оцінки типу (1) є хибними для дійсного індексу Соболєва, який більший за два. У роботі [10] розглядається питання опуклої апроксимації функцій з простору Соболєва опуклими алгебраїчними поліномами, якщо індекс простору Соболєва знаходиться в інтервалі від трьох до чотирьох. Доведено, що оцінка, яка узагальнює (1) є хибною. У роботі досліджується питання наближення опуклих функцій з простору Соболєва опуклими алгебраїчними поліномами для дійсного індексу простору Соболєва з інтервалу від двох до трьох. Аналогічно роботі [10], побудовано контрприклад, який показує, що оцінка, яка узагальнює оцінку (1) є хибною. Ця робота є узагальненням результату робіт [9] та [11]. Основний результат є аналогом теореми 2.3 в [11].

Ключові слова: *наближення функції, простір Соболєва, алгебраїчний поліном, монотонна функція, опукла функція.*

Вступ. Нехай $W^r, r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ майже скрізь на [0, 1].

Теляковський [1] для $r = 1$ та Гопенгауз для $r \in \mathbb{N}$ [2] посилили пряму теорему Нікольського-Тіммана довівши, що кожну функцію $f \in W^r$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так, що

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r) \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r, n > r \tag{1}$$

де c — абсолютна стала.

DeVore та Yu [3] довели, що при r = 1, 2 оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом. А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n, такий, що має місце (1). В роботі [4] доведено, що для натурального $r > 2, r \in \mathbb{N}$ оцінка (1), взагалі кажучи, хибна для монотонного наближення. Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено [5], що оцінка (1) також є невірною.

Для $r \in \mathbb{R}$ введемо клас функцій $W^r[0,1]$, таких, що $D_{0+}^{r-1} f$ абсолютно неперервна і $\left| D_{0+}^{r} f \right| \leq 1$ майже скрізь на [0,1] (тут $D_{0+}^{r-1} f$ — лівостороння дробова похідна [6]. Будемо позначати через $\prod_n$ — множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^2 множину опуклих на [0,1] функцій.

Основним результатом є теорема, яка узагальнює результат робіт [5, 9, 11] на класи $W^r[0,1] \cap \Delta^2$ з $r \in (2,3), r \in \mathbb{R}$.

Основні означення та допоміжні твердження. Спочатку нагадаємо основні означення та факти, які використовуються в роботі.

Означення 1. Нехай $\varphi(x) \in L_1(a,b)$. Інтеграли

$$(I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > \alpha, \tag{2}$$

$$(I_{b-}^{\alpha} \varphi)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x < b, \tag{3}$$

де $\alpha > 0$ називаються інтегралами дробового порядку α. Перший називають лівостороннім, а другий правостороннім. Що стосується дробового диференціювання, то його слід ввести, як операцію обернену дробовому інтегруванню [7].

Означення 2. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $\left[a,b\right]$ кожен із виразів

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \tag{4}$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \tag{5}$$

називається дробовою похідною порядку $\alpha, 0<\alpha<1$ відповідно лівосторонньою та правосторонньою.

Перейдемо до дробових похідних порядків $\alpha \geq 1$

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

де $[\alpha]$ — ціла частина числа α і $\{\alpha\}$ — дробова частина числа α. Якщо α — ціле число, то під дробовою похідною порядку α будемо розуміти звичайне диференціювання:

$$D_{a+}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad D_{b-}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Якщо ж α — не ціле, то правильно ввести за формулами:

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha]+1, \tag{7}$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha]+1. \tag{8}$$

Наступна теорема дає достатні умови для існування дробових похідних будь-якого порядку $\alpha, \alpha > 0$ [6].

Теорема 1. Нехай $\alpha > 0$ та функція $f(x)$ має абсолютно неперервну похідну порядку $n, n = [\alpha]+1$.

Тоді $D_{\alpha+}^{\alpha} f$ існує майже скрізь і може бути представлена у вигляді

$$D_{a+}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

Основний результат.

Теорема 2. Нехай $r \in (2,3)$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$, для будь-якої додатної на (0,1) функції ψ такої, що $\lim\limits_{x\to 0} \psi(x) = 0$ і $\lim\limits_{x \to 1} \psi(x) = 0$ існує така функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$, що для будь-якого полінома $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^2$ справедлива одна з таких властивостей:

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{|F(x)-p_n(x)|}{\varphi^2(x)\psi(x)}=+\infty, \tag{9}$$

або

$$\overline{\lim_{x\to 1}}\frac{|F(x)-p_n(x)|}{\varphi^2(x)\psi(x)}=+\infty\,, \tag{10}$$

де $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $r\in(2,3)$ і $m=[r]+1=3$. Розглянемо функцію:

$$f(x):=\begin{cases}\dfrac{(b-x)^4}{4!}+b^4(x+7)-b^4(1+x)^{-\frac{1}{b}}+\dfrac{b^4}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}}-\dfrac{151b^4}{24}, & x\in[0,b],\\ b^4(x+7)-b^4(1+x)^{-\frac{1}{b}}+\dfrac{b^4}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}}-\dfrac{151b^4}{24}, & x\in(b,1],\end{cases}$$

де $b=\dfrac{1}{468n^2}$.

Тоді

$$f'(x):=\begin{cases}-\dfrac{(b-x)^3}{3!}+b^4+b^3(1+x)^{-\frac{1}{b}-1}-\dfrac{b^3}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-1}, & x\in[0,b]\\ b^4+b^3(1+x)^{-\frac{1}{b}-1}-\dfrac{b^3}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-1}, & x\in(b,1]\end{cases}$$

$$f''(x):=\begin{cases}\dfrac{(b-x)^2}{2}-b^2(b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-2}+\dfrac{b^2(1-b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-2}, & x\in[0,b]\\ -b^2(b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-2}+\dfrac{b^2(1-b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-2}, & x\in(b,1]\end{cases}$$

$$f'''(x):=\begin{cases}-b+x+b(b+1)(2b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-3}-\dfrac{b(1-b)(1-2b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-3}, & x\in[0,b]\\ b(b+1)(2b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-3}-\dfrac{b(1-b)(1-2b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-3}, & x\in(b,1]\end{cases}$$

$$f^{(4)}(x):=$$

$$:=\begin{cases}1-(b+1)(2b+1)(3b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-4}-\dfrac{(1-b)(1-2b)(1-3b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-4}, & x\in[0,b),\\ -(b+1)(2b+1)(3b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-4}-\dfrac{(1-b)(1-2b)(1-3b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-4}, & x\in(b,1].\end{cases}$$

З явного вигляду функції $f(x)$ та її похідних, можна отримати нерівності:

$$f(0)=0,\ f(b)\sim 7b^4-\frac{3}{4e}b^4>0;$$

$$f(1)\sim 8b^4-b^4 2^{-\frac{1}{b}}-\frac{151}{24}b^4=\frac{41b^4}{24}-b^4 2^{-\frac{1}{b}}<\frac{41b^4}{24}<\frac{45}{4}b^4;$$

$$f'(0)=-\frac{b^3}{6}+b^4+b^3-\frac{b^3}{4}=b^4+\frac{7}{12}b^3>0;$$

$$f'(b)\sim b^4+b^3e^{-1}-\frac{b^3}{4}e^{-1}=b^4+\frac{3}{4e}b^3\sim\frac{3}{4e}b^3>0;$$

$$f'(1)=b^4+b^3 2^{-\frac{1}{b}-1}>0;$$

$$f''(0)=\frac{b^2}{2}-b^2(b+1)+\frac{b^2(1-b)}{4}\sim\frac{b^2}{2}-b^2+\frac{b^2}{4}=-\frac{1}{4}b^2<0;$$

$$f''(b)\sim -b^2(b+1)e^{-1}+\frac{b^2(1-b)}{4}e^{-1}\sim -b^2e^{-1}+\frac{b^2}{4}e^{-1}=-\frac{3}{4e}b^2<0;$$

$$f''(1)=-b(b+1)2^{-\frac{1}{b}-2}<0;$$

$$f'''(0)=-b+b(b+1)(2b+1)-\frac{b(1-b)(1-2b)}{4}\sim -b+b-\frac{b}{4}=-\frac{b}{4}<0;$$

$$f'''(b)\sim b(b+1)(2b+1)e^{-1}-\frac{b(1-b)(1-2b)}{4}e^{-1}\sim be^{-1}-\frac{b}{4}e^{-1}=\frac{3}{4e}b>0;$$

$$f'''(1)\sim b(b+1)(2b+1)2^{-\frac{1}{b}-3}>0.$$

Очевидно, що $f^{(4)}(x)>0\ \forall x\in[0,b)$ і $f^{(4)}(x)<0\ \forall x\in(b,1]$. Тоді, з нерівностей наведених вище бачимо, що функція $f(x)$ зростає на [0, 1] і $f(x)\ge 0\ \forall x\in[0,1]$. Також бачимо, що $\forall x\in[0,1]: f''(x)<0\Rightarrow f'(x)$ спадає на $[0,1]$. Розглянемо функцію $F(x)=\int\limits_0^x t^2 f(t)dt,\ x\in[0,1]$. Доведемо, що $F\in W^r[0,1]\cap\Delta^2$. Спочатку покажемо, що

$$F\in\Delta^2: F'(x)=x^2f(x),\ F''(x)=2xf(x)+x^2f'(x)\ge 0\Rightarrow F\in\Delta^2.$$

Тепер доведемо, що $F\in W^r[0,1]$. За Теоремою 2.3 в роботі [6] за формулами (7) або (8) маємо:

$$D_{0+}^{r}F(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)}x^{k-r}+\frac{1}{\Gamma(m-r)}\int_0^x\frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}}dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{2}\frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)}x^{k-r}+\frac{1}{\Gamma(3-r)}\int_0^x\frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-2}}dt,$$

майже скрізь на [0, 1].

Так як $F^{(k)}(0)=0,$ при $k=0,1,2,$ то

$$D_{0+}^{r}F(x)=\frac{1}{\Gamma(3-r)}\int_0^x\frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-2}}dt$$

майже скрізь на [0,1]. Очевидно, що $\exists c>0, c\in\mathbb{R}$ така, що $\forall x\in[0,1]:|F^{(3)}(x)|\le c.$

Тоді

$$|D_{0+}^{r}F(x)|\le\frac{c}{\Gamma(3-r)}\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^{r-2}}=\frac{c}{\Gamma(3-r)}\frac{x^{3-r}}{3-r}\le\frac{c}{(3-r)\Gamma(3-r)}.$$

Таким чином, $D_{0+}^{r}F(x)$ існує майже скрізь на [0,1]. Очевидно, що $D_{0+}^{r-1}F(x)=\frac{1}{\Gamma(2-r)}\int_0^x\frac{F^{(2)}(t)}{(x-t)^{r-2}}dt$ буде абсолютно неперервною.

Таким чином $F\in W^{r}[0,1]\bigcap\Delta^{2}$. Нехай існує опуклий многочлен q_n для якого умова (9) не виконується. Тоді для деякої сталої B маємо: $|F(x)-q_n(x)|\le Bx\psi(x),\quad 0\le x\le b.$

Звідси випливає, що $q_n(0)=F(0)=0$ і $q_n'(0)=F'(0)=0$. Так як $q_n''(x)\ge 0, x\in[0,1]$ і $q_n'(0)=0$ зумовлює $q_n'(x)\ge 0, x\in[0,1]$. Тоді $q_n(x)$ зростає на $[0,1]$ і $q_n(x)\ge 0, x\in[0,1]$. Тоді многочлен q_n має вигляд $q_n(x)=x^2\cdot h_{n_1}(x),$ де h_{n_1} многочлен степеня $\le n_1, n_1\le n-2$. Розглянемо многочлен $\tilde{q}_n(x)=q_n(x)+f(0)+f'(0)x$.

$$\frac{b^3}{18}<b^4+\frac{11}{12}b^3=|f'(0)|=|\tilde{q}_n'(0)|\le 2n^2\,\|\tilde{q}_n\|.$$

З побудовою многочлена $\tilde{q}_n(x)$ бачимо, що він зростає. Тоді $\|\tilde{q}_n\|=\tilde{q}_n(1)$. Отже маємо

$$\frac{b^3}{18}<2n^2\tilde{q}_n(1)\Rightarrow\tilde{q}_n(1)>\frac{b^3}{36n^2}\qquad(11)$$

З іншого боку,

$$f(1) < \frac{45b^4}{4} = \frac{45b^3 \cdot b \cdot 36n^2}{36n^2 \cdot 4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot 45n^2 364 = \\ = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45\frac{1}{468n^2}n^2 36}{4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{405}{468} < \frac{b^3}{36n^2}. \tag{12}$$

З нерівностей (11) і (12) маємо, що $f(1) \neq \tilde{q}_n(1)$, а саме $f(1) < \tilde{q}_n(1)$. Далі розглянемо $\tilde{q}_n(1) = q_n(1) + f'(0) + f(0)$. Припустимо, що $q_n(1) = f(1)$.

Тоді $\tilde{q}_n(1) = f(1) + f'(0) + f(0) \Rightarrow f(1) = \tilde{q}_n(1) - f'(0) - f(0)$. Ми припускаємо, що $q_n(1) > 0$, бо в протилежному випадку твердження про те, що $f(1) \neq q_n(1)$, очевидно. Маємо:

$$41b^4 - b^4 2^{-\frac{1}{b}} = \tilde{q}_n(1) - b^4 - \frac{7}{12}b^3 \Rightarrow \tilde{q}_n(1) = \\ = \frac{41}{24}b^4 + b^4 + \frac{7}{12}b^3 - b^4 2^{-\frac{1}{b}} = \frac{65}{24}b^4 + \frac{7}{12}b^3 - b^4 2^{-\frac{1}{b}}.$$

Тоді очевидно, що $\tilde{q}_n(1) \sim c \cdot b^3$, де $c > \frac{7}{12}, c = const$. З останніх міркувань випливає, що

$$q_n(1) \sim c \cdot b^3 - b^4 - \frac{7}{12}b^3 \sim c_1 b^3, c_1 = const, c_1 > 0.$$

Але, з іншого боку, $f(1) \sim \frac{41}{24}b^4$.

Таким чином, маємо суперечність з припущенням, що $q_n(1) = f(1)$, а саме $q_n(1) > f(1)$.

$F(1) = \int_0^1 t^2 f(t)dt$. За теоремою про середнє значення $\exists \theta \in [0,1] : F(1) = \theta^2 f(\theta)$. Так як $f(x)$ зростає, то $F(1) < \theta^2 f(1) \leq f(1) < q_n(1) \Rightarrow F(1) \neq q_n(1)$. Теорема доведена.

Висновки. Побудовано контрприклад, який показує, що результат, доведений у роботі [5], можна узагальнити введенням додаткового множника $\psi(x)$ у знаменнику в умовах (9), (10) теореми 2, для випадку $W^r[0,1] \bigcap \Delta^2, r \in (2,3)$.

Список використаних джерел:

1. Теляковський С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами. *Мат. сб.* 1966. Вып. 79. С. 252-265.
2. Gopengauz A. I. Pointwise estimates of Hermitian interpolation. *J. Approx. Theoty*. 1994. Vol. 77. P. 31-41.
3. DeVore R. A., Yu X. M. Pointwise estimates for monotone polynomial approximation. *Constr. Approx*. 1985. № 1. P. 323-331.
4. Gonska H. H., Leviatan D., Shevchuk I. A., Wenz H. J. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation. *Constr. Approx*. 2000. № 16. P. 603-629.
5. Петрова Т. О. Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні. *Праці Інституту математики НАН України «Математика та її застосування. Теорія наближення функцій».* 2005. Вип. 35. С. 107-112.
6. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. *Sci. Publ*. London, 1987.
7. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну. *Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка*. 2003. № 9-10. С. 125-127.
8. Петрова Т. О., Петрова І. Л. Узагальнення поточкових інтерполяційних оцінок опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2019. Вип. 20. С. 61-69
9. Петрова Т. О. Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну. *Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки*. 2006. Вип. 4. С. 113-118.
10. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну довільного порядку, $r \in (3, 4)$. *Вісник Київського університету. Математика. Механіка*. 2017. Вип. 2 (38). С. 9-10.
11. Kopotun K. A., Shecvhuk I. A. Interpolatory estimates for convex piecewise polynomial approximation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2019. Vol. 474. P. 467-479.

GENERALIZATION OF NEGATIVE RESULTS FOR INTERPOLATION CONVEX APPROXIMATION OF FUNCTIONS HAVING A FRACTIONAL DERIVATIVE IN SOBOLEV SPACE

We discuss whether on not it is possible to have interpolatory estimates in the approximation of a function of Sobolev`s space by polynomials. The problem of positive approximation is to estimate the pointwise degree of approximation of a function of r times continuously differentiable and positive functions on [0, 1]. Estimates of the form (1) for positive approximation are known ([1, 2]). The problem of monotone approximation is that of estimating the degree of approximation of a monotone nondecreasing function by monotone nondecreasing polynomials. Estimates of the form (1) for monotone approximation were proved in [3, 4, 7]. In [3, 4] is consider r is natural and r not equal one. In [7] is consider r is real and *r* more two. It was proved that for monotone approximation estimates of the form (1) are fails for r is real and r more two.

The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is consider in [8-10]. In [8] is consider r is natural and r not equal one. In [9] is consider r is real and r more two. It was proved that for convex approximation estimates of the form (1) are fails for r is real and r more two. In [10] the question of approximation of function of Sobolev`s space and convex by algebraic convex polynomial is consider, if the index of the Sobolev space is in the interval from three to four. It is proved that the estimate that generalizes (1) is false This paper investigates the issue of approximation of convex functions from the Sobolev space by convex algebraic polynomials for a real index of the Sobolev space from the interval from two to three. Similarly to the paper [10], a counterexample is built, which shows that the estimate that generalizes the estimate (1) is false. This paper is the generalization of results papers [9] and [11]. The main result is the analog of the theorem 2.3 in [11].

Key words: *approximation of function, Sobolev space, algebraic polynomial, convex function.*

Отримано: 12.10.2022

UDC 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2022-23.106-117

V. A. Sorych, Cand. of Phis. and Mathem. Sciences,
N. M. Sorych, Cand. of Phis. and Mathem. Sciences

Kamianets-Podilskyi National Ivan Ohiienko University,
Kamianets-Podilskyi

EXACT CONSTANTS OF THE BEST ONE SIDED APPROXIMATIONS OF THE SUM ANALYTIC FUNCTIONS FROM DIFFERENT CLASSES

The task of obtaining the exact values of the best approximations by trigonometric polynomials of continuous or summable functions originates from the works of P. L. Chebyshev, who, back in the 1950s, posed the problem of finding the polynomial, that deviates the least from a given continuous function. Subsequently this direction in the theory of approximation got further development thanks to the works of K. Weierstrass, D. Jackson, S. N. Bernstein, Valle-Poussin and others. On this time there is an increase attention to problems of one-sided approximation of individual functions and their classes in the metric space L. Problems of this content arise up in number theory, coding theory, and other areas of mathematics. The first results of this direction were obtained in the 1880th by A. A. Markov and T. Y. Stieltijes. In the future, these studies were continued in the works of J. Karamata (1930), G. Freud and T. Hanelius (mid-20th century).