

УДК 539.3

DOI: 10.32626/2308-5878.2022-23.118-129

О. В. Максимук*, д-р фіз.-мат. наук, професор,**Ю. В. Сачук****, канд. фіз.-мат. наук,**Т. В. Лехіцький****

*Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,

**КЗВО «Луцький педагогічний коледж»

Волинської обласної ради, м. Луцьк

ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗНОШУВАННЯ ТОНКОГО ПОКРИТТЯ ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ ШТАМПАМИ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ

У статті з використанням методів математичного моделювання досліджено контактну взаємодію жорстких тіл (штампів) канонічної форми з пружною півплощиною захищеною покриттям Вінклера із урахуванням зношування проміжного шару.

В умовах плоскої задачі теорії пружності на основі абразивної моделі зношування, котра виражається через лінійну залежність між інтенсивністю зношування та роботою сил тертя, побудовано основне інтегро-диференціальне рівняння задачі для визначення контактної тиску між штампом і покриттям.

Розвинуто методику розв'язування інтегро-диференціального рівняння із використанням поліномів Чебишова, яка зводить задачу до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь. Для розв'язування рівняння було запропоновано покроковий алгоритм за часом. Згідно з алгоритмом, час роботи фрикційної пари зі зношуванням розбивається на малі відрізки часу та приймається припущення, що область контакту і контактний тиск є сталими на кожному часовому проміжку.

При побудові графіків контактної тиску у різні фіксовані моменти часу для змінної області зношування (контакту), яка згідно припущення є сталою на кожному фіксованому кроці розбиття часу роботи фрикційної пари, було застосовано алгоритм зведення отриманих числових даних до однієї системи координат із урахуванням пропорційності відношення поточної області контакту у відповідний момент часу до початкової області контакту в момент часу рівний нулю (задача без зношування).

Проведено підбір та аналіз контактних пар з різними фізико-механічними параметрами, які б задовольняли вибрану математичну модель. Для безрозмірних величин описаних в роботі проведено зворотні розрахунки з переходом до розмірних величин.

Для двох реальних пар матеріалів напівобертним методом чисельно пораховано відповідну початкову область контакту та області зношування на заданих часових відрізках роботи фрикційної пари. Досліджено і проаналізовано особливості зношування покриття для чотирьох канонічних форм штампів.

Ключові слова: контактна взаємодія, інтегро-диференціальні рівняння, ортогональні поліноми Чебишова, фізико-механічні параметри, зношування тонкого покриття.

Вступ. При дослідженні процесів тертя та зношування матеріалів з покриттями для задач контактної взаємодії важливим напрямком є комп'ютерна автоматизація розрахунків з використанням математичного апарату імітаційного моделювання на основі аналітико-числових методів [11]. На практиці додаткових досліджень потребують задачі про зношування тонких покриттів, оскільки питання підвищення зносостійкості деталей шляхом додавання накладок та напилен є актуальним у техніці та виробництві з використанням імітаційних моделей механічних систем з точки зору фінансових затрат для проведення експериментальних досліджень [1, 10]. Основною складністю при розв'язуванні задач такого типу є відсутність аналітичних методів розв'язку інтегро-диференціальних рівнянь, що залежать і від часу і від просторових координат [5, 6, 8].

Одним із можливих шляхів розв'язання такого типу рівнянь є покроковий метод розбиття часу роботи фрикційної пари на невеликі часові проміжки на кожному з яких вважається, що область контакту на цих відрізках є незмінною. Згідно таких припущень отримана задача зводиться до дискретної математичної моделі, і в рамках такого підходу усебічного вивчення потребує нетривіальна задача відшукування величини області зношування на кожному часовому проміжку при умові, що сила прикладена до штампа є сталою. Такі задачі розв'язуються із використанням інженерного програмного забезпечення та розробленими відповідними програмними модулями [4–6, 8, 10]. Також маловивченим в рамках описаної проблеми є прогнозування часу повного зношування тонкого покриття (шару Вінклера) в заданій точці, та вплив на цей процес форми штампа і фізико-механічних параметрів контактної пари [7].

Постановка контактної задачі для півплощини захищеної шаром Вінклера. Розглядається плоска задача про контактну взаємодію системи: жорсткий штамп, пружне тонке покриття, пружна півплощина. У пружну півплощину, яка захищена тонким покриттям, вдавлюється силою P жорсткий штамп з основою $f(x)$ (рис. 1), а між покриттям та півплощиною виконуються умови ідеального контакту. Досліджуватимемо контакт пружної півплощини захищеної покриттям зі штампами таких канонічних форм:

- 1) параболічної форми $f(x) = -\frac{x^2}{2R}$, де R — радіус кривини в точці $x = 0$;

- 2) циліндричної форми $f(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$, де R — радіус циліндра;
- 3) еліптичної форми $f(x) = -b_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}$, де a_1, b_1 — велика та мала півосі еліпса;
- 4) гіперболічної форми $f(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + x^2}$, де a_1, b_1 — величини дійсної та уявної півосей гіперболи.

Штамп рухається з усередненою швидкістю V в напрямку, перпендикулярному до площини рис. 1. У процесі взаємодії між тілами виникає тертя, внаслідок якого відбувається зношування покриття [4, 5].

Абразивне зношування моделюється лінійною залежністю між інтенсивністю зношування та роботою сил тертя, при цьому теплові ефекти не враховуються [2]:

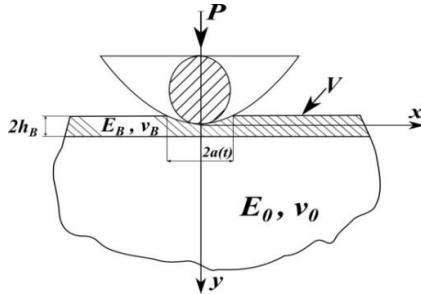


Рис. 1. Модель контактної взаємодії для системи жорсткий штамп — тонке покриття (шар Вінклера) — пружна півплощина

$$\frac{\partial v_*(x, t)}{\partial t} = k_1 k_2 V p(x, t), \quad (1)$$

де k_1 — коефіцієнт тертя, $p(x, t)$ — контактний тиск під штампом, k_2 — коефіцієнт інтенсивності зношування, t — час зношування, $v_*(x, t)$ — зміщення за рахунок зношування. Величина k_2 в загальному випадку залежить від властивостей матеріалів, фрикційних параметрів контактної пари, температури та ін.

При розв'язуванні контактних задач з покриттям в якості теоретичного узагальнення різних покриттів використовують пружний шар Вінклера [1, 9, 12]. Рівняння для переміщення має вигляд:

$$w_B(x, t) = K_B p(x, t), \quad (2)$$

де $K_B = 2h_B(1 - 2\nu_B)(1 + \nu_B) / (E_B(1 - \nu_B))$ — коефіцієнт Вінклера, h_B — товщина покриття.

З урахуванням (1) і (2) контактну задачу зводимо до сингулярного інтегро-диференціального рівняння [4, 6]:

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{p(\xi, t)}{\xi - x} d\xi + K_B p'(x, t) + k_1 k_2 V \int_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \leq a(t) \quad (3)$$

де $\theta = \frac{E_0}{2(1-\nu_0^2)}$, E_B , E_0 , ν_B , ν_0 — модулі пружності та коефіцієнти

Пуассона шару Вінклера і пружної півплощини відповідно. Контактний тиск у кожен момент часу t повинен задовольняти умови:

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x, t) dt, \quad p(\pm a(t), t) = 0. \quad (4)$$

Таким чином задача звелася до сингулярного інтегро-диференціального рівняння (3) за умов (4).

Інтегральне рівняння (3) залежить від двох змінних x та t і змінної області контакту. Для розв'язування рівняння застосуємо покроковий алгоритм за часом [4, 5] та метод поліномів Чебишова. За цим алгоритмом, розбиваємо час роботи фрикційної пари зі зношуванням на малі відрізки Δt . Припускаємо, що на кожному з часових відрізків контактний тиск і область контакту є постійними (незалежні від часу). Для знаходження функції контактного тиску використаємо метод ортогональних поліномів Чебишова першого $T_n(x)$ та другого $U_n(x)$ роду.

При $t = 0$ рівняння (3) матиме вигляд:

$$\frac{1}{\pi\theta} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi + K_B p_0'(x) = -f'(x), \quad |x| \leq a_0. \quad (6)$$

Введемо безрозмірні величини $\bar{x} = x / a_0$, $\bar{p}_0 = p_0 / \theta$, $\bar{h}_B = (h_B / R) / (a_0 / R)$ (надалі рисочки опускаємо).

Відповідно до введених позначень рівняння (6) набуде вигляду:

$$p_0'(x) - \lambda \int_{-1}^1 \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\frac{a_0}{R} \lambda \pi f'(x), \quad (7)$$

де $\lambda = a_0 / (\pi\theta K_B)$, R — радіус кривини штампа в точці $x = 0$.

Розв'язок рівняння (7) будемо шукати у вигляді [6, 8]:

$$p_0(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^0 U_{2m}(x). \quad (8)$$

Похідна від функції (8):

$$p_0'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^0 (2m+1) T_{2m+1}(x). \quad (9)$$

Підставивши (8), (9) в рівняння (7) отримаємо [5, 6, 8]:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} \int_{-1}^1 T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx - \frac{2k+1}{2\lambda} b_{2k} = -\frac{a_0}{R} \int_{-1}^1 f'(x) T_{2k+1}(x) dx, \quad (10)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$

Зв'язок між величинами P_0 та a_0 при $t = 0$ будемо шукати із умови рівноваги штамп (4):

$$P_0 = \int_{-a_0}^{a_0} p_0(x) dx. \quad (11)$$

Варто зауважити, що у (11) притискаюча сила P_0 записана в розмірних величинах, надалі для зручності аналізу числових результатів введемо безрозмірну величину $\bar{P}_0 = P_0 / a_0 \theta$.

Процес знаходження функцій контактної тиску $p_1(x)$, $p_2(x)$ і так далі при кроках розбиття t_1, t_2, \dots, t_n наведено в роботі [8] і полягає у розв'язуванні системи рівнянь (10), при заміні відповідних безрозмірних параметрів рівняння та додавання до правої частини (10), розв'язків отриманих на попередньому кроці.

Фізико-механічні параметри матеріалів контактних пар. Числові розрахунки отримано шляхом редукції нескінченної системи алгебричних рівнянь (10), при $V = 1 \text{ м/с}$, $\Delta t = 100 \text{ с}$ для таких двох контактних пар БрАЖНМц9-4-4-1 — Al_2O_3 —40% TiO_2 та БрАЖНМц9-4-4-1 — $\text{Mo-Mo}_2\text{C}$. Дослідження проводилось при наступних параметрах [7]: для пари БрАЖНМц9-4-4-1 — Al_2O_3 —40% TiO_2 : $\frac{E_B}{E_0} = \frac{72 \text{ ГПа}}{78,5 \text{ ГПа}} = 0.92$, $k_1 = 0.31$, $k_2 = 2.2 \cdot 10^{-7}$, для пари БрАЖ-

$$\text{НМц9-4-4-1 — Mo-Mo}_2\text{C: } \frac{E_B}{E_0} = \frac{63 \text{ ГПа}}{78,5 \text{ ГПа}} = 0.8, \quad k_1 = 0.31,$$

$$k_2 = 3.8 \cdot 10^{-7} \text{ та } \nu_0 = 0.34.$$

Числові результати та аналіз особливостей зношування півплощини захищеної шаром Вінклера. Забезпечення умови рівноваги штамп здійснюється в наступний спосіб: для $t_0 = 0$ задаємо значення

$\frac{a_0}{R}$ та знаходимо $p_0(x)$, що задовольняє умову рівноваги (9).

На наступному кроці при $t > 0$, $t \in [0, t_1 = \Delta t]$ задаємо значення

$\frac{a_1}{R} > \frac{a_0}{R}$ та знаходимо розв'язок за запропонованою методикою, а за

умовою рівноваги на цьому кроці $\bar{P}_1 = \bar{P}_0$, де $\bar{P}_1 = P / \theta a_1$, коригуємо значення $\frac{a_1}{R}$ (збільшуємо або зменшуємо). Для наступного проміжку часу $t \in [t_i, t_{i+1} = t_i + \Delta t]$ при $i \geq 2$ використовуємо аналогічну схему описану вище, забезпечуємо умову $\bar{P}_i = \bar{P}_0$.

Варто відзначити, що при малих початкових областях контакту $\frac{a_0}{R} < 0.1$ контактний тиск для всіх штампів практично співпадає.

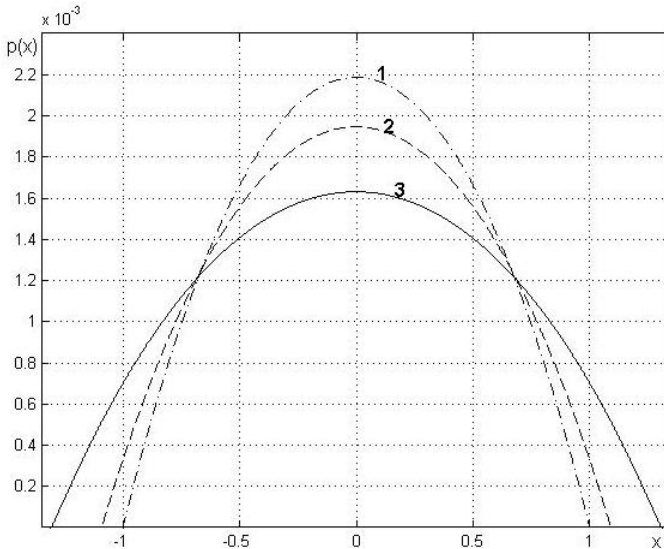


Рис. 2. Контактний тиск для штампів циліндричної форми

На рис. 2 наведено контактний тиск для пари БрАЖНМц9-4-4-1 — $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-}40\%\text{TiO}_2$ і штамп є циліндричної форми при заданій силі $\bar{P} = 0.0029$, $h_B = 1$ та $t_0 = 0$, $t_1 = 100\text{c}$, $t_2 = 200\text{c}$ було знайдено відповідні області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.1118$, $\frac{a_1}{R} = 0.122$, $\frac{a_2}{R} = 0.16$.

Крива 1 на цьому рисунку та наступних відповідає часу t_0 , крива 2 — t_1 , крива 3 — t_2 .

Для гіперболічного штампів (пара БрАЖНМц9-4-4-1 — $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-}40\%\text{TiO}_2$) при $\bar{P} = 0.0029$, $\varepsilon = 0.1$ і при заданих вище маємо параметрах, маємо: $\frac{a_0}{R} = 0.1125$, $\frac{a_1}{R} = 0.1281$, $\frac{a_2}{R} = 0.175$. Для цього ж штампів

па і пари БрАЖНМЦ9-4-4-1 — Мо-Мо₂С при $\bar{P} = 0.0024$, маємо $\frac{a_0}{R} = 0.1125$, $\frac{a_1}{R} = 0.1287$, $\frac{a_2}{R} = 0.195$ контактний тиск, показаний на рис. 3.

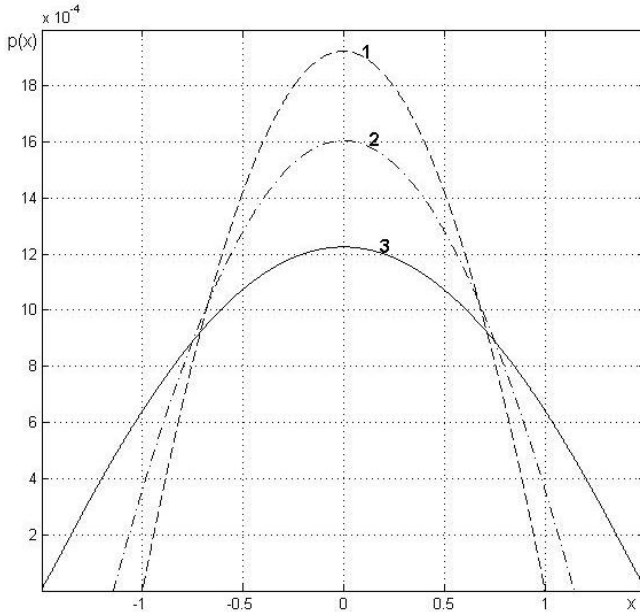


Рис. 3 Контактний тиск для штампa гіперболічної форми

Запропонований спосіб дає можливість для різних пар матеріалів із використанням розбиття по часу порахувати величину зношування покриття в довільний момент часу і будь якій точці області контакту, із використанням знайдених різних областей зношування, контактний тиск для яких показаний на рис. 2 — рис. 5.

Суттєвою складністю при моделюванні таких процесів є пошук та підбір фізико-механічних параметрів покриття та основи, які б задовольняли умови задачі та використовувались на практиці.

Наприклад, на рис. 4 побудовано контактний тиск для пари БрАЖНМЦ9-4-4-1 — Al₂O₃-40%TiO₂ і штамп є циліндричної форми, при заданій силі $\bar{P}_0 = 0.0191$, $h_B = 1$ та t_0, t_1, t_2 , описаних вище, було знайдено відповідні області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.2009$, $\frac{a_1}{R} = 0.238$,

$$\frac{a_2}{R} = 0.3312.$$

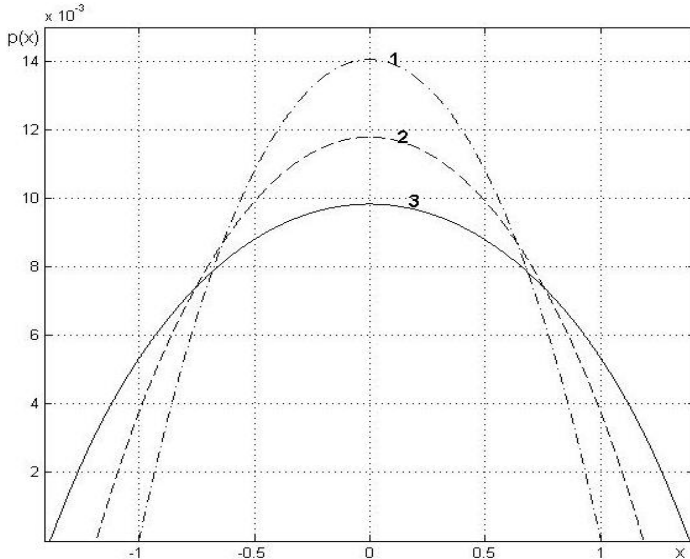


Рис. 4. Контактний тиск для штампа циліндричної форми

Для пари БрАЖНМц9-4-4-1 — Мо-Мо₂C і циліндричного штампа при силі $\bar{P} = 0.0167$ та t_0, t_1, t_2 , маємо $\frac{a_0}{R} = 0.2009$,

$$\frac{a_1}{R} = 0.2505, \quad \frac{a_2}{R} = 0.373.$$

На рис. 5 побудовано контактний тиск для пари БрАЖНМц9-4-4-1 — Al₂O₃-40%TiO₂ і штамп є параболічної форми при заданій силі $\bar{P}_0 = 0.0191$, $h_B = 1$ та t_0, t_1, t_2 , заданих вище, було знайдено відпові-

дні області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.21$, $\frac{a_1}{R} = 0.258$, $\frac{a_2}{R} = 0.4$.

Для пари БрАЖНМц9-4-4-1 — Al₂O₃-40%TiO₂ і штамп є еліптичної форми при заданій силі $\bar{P}_0 = 0.0191$, $h_B = 1$ та t_0, t_1, t_2 було знай-

дено відповідні області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.195$, $\frac{a_1}{R} = 0.230$,

$$\frac{a_2}{R} = 0.3312.$$

Також було проведено чисельні розрахунки для побудови контактного тиску при $t_0 = 0$, $t_1 = 75c$, $t_2 = 150c$ для різних штампів з метою перевірки впливу розбиття по часу на стійкість запропонованого алгоритму.

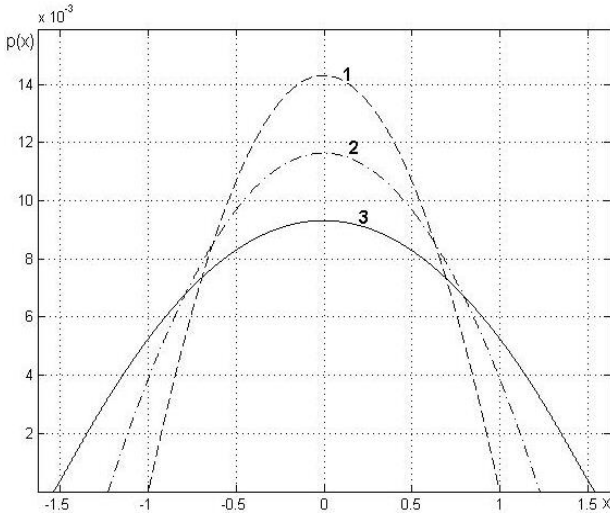


Рис. 5. Контактний тиск для штампa параболічної форми

В якості прикладу на рис. 6 наведено графік контактного тиску для пари БрАЖНМц9-4-4-1 — Мо-Мо₂Сі параболічного штампa при $\bar{P} = 0.0059$, $h_B = 1$ та t_0, t_1, t_2 , заданих вище, було знайдено відповідні області контакту $\frac{a_0}{R} = 0.15$, $\frac{a_1}{R} = 0.177$, $\frac{a_2}{R} = 0.265$.

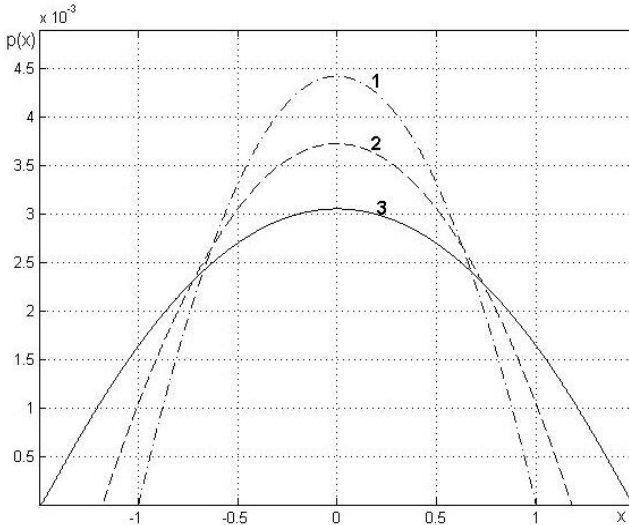


Рис. 6. Контактний тиск для штампa параболічної форми

Для штампів циліндричної форми при однаковій початковій області контакту та матеріалів для яких побудовано рис. 6 розрахунки областей зношування є наступні: $\bar{P} = 0.0064$, $\frac{a_0}{R} = 0.15$, $\frac{a_1}{R} = 0.17$, $\frac{a_2}{R} = 0.24$.

Висновок. У статті для контактної задачі про зношування покриття проведено підбір та аналіз основних параметрів зношування таких як: коефіцієнт Пуассона, модуль Юнга, коефіцієнт тертя, коефіцієнт інтенсивності зношування, які б задовольняли обрану модель зношування. Відповідно до наведених в роботі контактних пар матеріалів досліджено і проаналізовано особливості зношування покриття для різних за формою штампів, що мають різні співвідношення параметри зношування. У результаті числових експериментів встановлено, що при однаковій притискаючій силі процес зношування (області зношування) значно відрізняється для скінченних штампів (циліндричний, еліптичний) та нескінченних (гіперболічний, параболічний) штампів. Також важливим аспектом з точки зору обчислювальної складності є вибір кроку розбиття та пошук проміжних областей зношування і забезпечення для них умови рівноваги у кожному моменті часу. Цим методом можна розрахувати час ефективної роботи фрикційної пари, за який механізм не вийде з ладу і забезпечується безперебійна робота.

В середовищі для інженерних розрахунків Matlab реалізовано імітаційну модель задачі та розроблено відповідні програмні модулі із використанням вбудованих математичних бібліотек та візуальних компонентів. Виконано числовий аналіз результатів та проведено їх верифікацію через порівняння із відповідними теоретичними результатами отриманими в роботах [6, 7, 8].

Список використаних джерел:

1. Бусяк Ю. М., Ткачук А. В., Дєміна Н. А. та ін. Проблема забезпечення захищеності корпусов легкобронированих машин: постановки и подходы к решению. *Проблемы машиностроения*. 2015. № 1. С. 40-45.
2. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва: Наука, 2001. 478 с.
3. Калякин А. А. О взаимодействии штампа со слоистым упругим основанием. *Прикладная механика и техническая физика*. 2006. Т. 47, № 3. С. 165-175.
4. Максимук О. В. Контактна задача про зношування пружного тіла з тонким покриттям. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2000. Вип. 57. С. 88-92.
5. Максимук О. В., Махніцький Р. М., Щербина Н. М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій:

- монографія. Львів: Національна академія наук України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. 396 с.
6. Сачук Ю. В., Максимук О. В. Контактна задача про взаємодію жорстких штампів із пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2015. № 22. С. 117-124.
 7. Утенков В. М., Зайцев А. Н. Исследование триботехнических характеристик перспективных износостойких плазменных покрытий при трении скольжения без смазки. *Известия высших учебных заведений*. 2013. № 11. С. 81-89.
 8. Sachuk Yu. V., Maksymuk O. V. Contact Problem of Wear of the Elastic half plane with winkler's coating caused by punches of canonical shapes. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 228, Issue 2, 2018. P. 173-179
 9. Selvadurai A.P.S., Scarpas T., Kringos N. On a Winkler ligament contact between a rigid disc and an elastic halfspace. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2008. Vol. 3, No.10. P. 1875-1883.
 10. Siau T., Bayen A. An Introduction to MATLAB Programming and Numerical Methods for Engineers. New York: Academic Press, 2014. 311 p.
 11. Vanini S.A., Shahba M., Kordani N. Numerical investigation of sliding frictional contact in functionally graded steels (FGS). *Materials Research*. 2014. Vol. 17, № 6. P. 1478-1484.
 12. Whitehouse D. J. Handbook of Surface and Nanometrology. Second Edition. Warwick: University of Warwick Coventry UK, 2011. 957 p.

SIMULATION OF THE WEAR PROCESS OF A THIN COATING OF AN ELASTIC SEMI-PLANE BY STAMPS OF THE CANONICAL FORM

In the article, using mathematical modeling methods, the contact interaction of rigid bodies (stamps) of canonical form with an elastic half-plane protected by a Winkler coating is investigated, taking into account the wear of the intermediate layer.

Under the conditions of a flat problem of the theory of elasticity based on the abrasive wear model, which is expressed through a linear relationship between the intensity of wear and the work of friction forces, the main integro-differential equation of the problem for determining the contact pressure between the stamp and the coating is constructed.

A technique for solving an integro-differential equation using Chebyshev polynomials has been developed, which reduces the problem to an infinite system of linear algebraic equations. A time-stepping algorithm was proposed for solving the equation. According to the algorithm, the working time of the friction pair with wear is divided into small time segments and the assumption is made that the contact area and contact pressure are constant at each time interval.

When constructing graphs of contact pressure at different fixed moments of time for the variable area of wear (contact), which, according to

the assumption, is constant at each fixed step of the breakdown of the time of operation of the friction pair, an algorithm was used to reduce the obtained numerical data to one coordinate system, taking into account the proportionality of the ratio of the current area of the contact at the corresponding moment of time to the initial contact area at the moment of time equal to zero (problem without wear).

The selection and analysis of contact pairs with various physical and mechanical parameters that would satisfy the selected mathematical model were carried out. For the dimensionless quantities described in the work, reverse calculations were carried out with the transition to dimensional quantities.

For two different pairs of materials, based on the given force applied to the stamp, the corresponding initial contact area and the wear area were numerically calculated by the semi-inverse method at the given time intervals of the friction pair's operation. The characteristics of wear of the coating for four canonical forms of stamps were studied and analyzed.

Key words: *contact interaction, integro-differential equations, orthogonal Chebyshev polynomials, physical and mechanical parameters, wear of thin coating.*

Отримано: 16.10.2022