УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.45-63

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В.О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

УМОВИ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ШТЕЙНЕРА В ПОЛІНОРМОВАНОМУ ПРОСТОРІ, В ЯКІЙ ВІДХИЛЕННЯ МІЖ ЕЛЕМЕНТАМИ ВИЗНАЧАЮТЬСЯ З ДОПОМОГОЮ СУБЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

Важливе місце серед екстремальних задач займає класична задача Штейнера, яка полягає у відшуканні в заданій множині лінійного нормованого простору такої точки (точки Штейнера), сума відстаней до якої від кількох фіксованих точок цього простору не буде перевищувати суми відстаней від них до будь-якої іншої точки допустимої множини (буде мінімальною) (див., наприклад, [1, с. 314]).

У класичній задачі Штейнера приймається, що всі відрізки лінійного нормованого простору є «однорідними». Проте на практиці їх довжинам приписують різні «вагові» характеристики. В результаті приходять до, так званої, «зваженої» задачі Штейнера (див., наприклад, [2, с. 468; 3, 4]), яка, в свою чергу, є частковим випадком задачі, в якій суми відстаней між фіксованими точками лінійного простору і точками його множини, що визначалися зваженими нормами, замінено на суми відстаней між цими точками, які, взагалі кажучи, визначаються різними нормами, заданими на розглядуваному лінійному просторі. Внаслідок такої заміни отримаємо узагальнену задачу Штейнера в полінормованому просторі [5].

Як відомо, виникають задачі, зокрема задачі наближення, в яких міра відхилення між фіксованими елементами та елементами заданої множини є, так званою «викривленою метрикою».

Задача, що розглядається в статті, отримується внаслідок заміни в узагальненій задачі Штейнера в полінормованому просторі суми відстаней між фіксованими точками лінійного простору і точками множини допустимих елементів, які визначаються різними нормами, заданими на лінійному просторі, сумою відхилень між зазначеними точками, які визначаються невід’ємними неперервними сублінійними функціоналами, заданими на відповідних лінійних нормованих просторах. У статті для цієї задачі встановлено деякі умови існування екстремального елемента (точки Штейнера), які узагальнюють відповідні результати, отримані, зокрема, у праці [6] для задачі

найкращої апроксимації елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору.

Ключові слова: *лінійний нормований простір, полінормований простір, сублінійний функціонал, задача Штейнера, точка Штейнера, екстремальний елемент, умови існування екестремального елемента.*

Вступ. У статті встановлено еквівалентність узагальненої задачі Штейнера в полінормованому просторі, в якій відхилення між елементами визначаються з допомогою невід'ємних неперервних сублінійних функціоналів, деякій задачі найкращого в розумінні невід'ємного неперервною сублінійного функціонала наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору.

З урахуванням еквівалентності цих екстремальних задач встановлено умови існування екстремального елемента для узагальненої задачі Штейнера, які узагальнюють результати праці [6] щодо існування екстремального елемента для задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору.

Постановка задачі. Нехай Y – лінійний над полем дійсних чисел простір, $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$, – норми, задані на Y. Тоді $\left(Y,\|\bullet\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ є полінормованим простором (див, наприклад, [5]). Нехай, крім того, для кожного $i\in\{1,\dots,m\}$ на просторі $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$ задано невід'ємний неперервний сублінійний функціонал p_i (див., наприклад, [7, c. 13-25]), $Y^m=Y\times\ldots\times Y$ – m-арний декартів (прямий) добуток множини Y, $\left(a_1,\dots,a_m\right)\in Y^m$, $V\subset Y$.

Поставимо задачу відшукання величини

$$\beta_V^*\left(a_1,\dots,a_m\right)=\inf_{y\in V}\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y\right). \tag{1}$$

Задачу (1) будемо називати узагальненою задачею Штейнера в полінормованому просторі $\left(Y,\|\bullet\|_i, i=\overline{1,m}\right)$, в якій відхилення між елементами a_i, $i=\overline{1,m}$, та $y\in V$ визначаються з допомогою невід'ємних неперервних сублінійних функціоналів p_i, $i=\overline{1,m}$, заданих на лінійних нормованих просторах $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$.

Якщо існує елемент $y^*\in V$ такий, що

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y^*\right)=\inf_{y\in V}\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y\right)=\beta_V^*\left(a_1,\dots,a_m\right),$$

то його будемо називати узагальненою точкою Штейнера в множині V для фіксованих точок $a_1,...,a_m$ полінормованого простору $\left(Y,\|\bullet\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ у випадку, коли відхилення від точок a_i, $i=\overline{1,m}$, до точок множина V є значеннями відповідних невід'ємних неперервних сублінійних функціоналів p_i, $i=\overline{1,m}$, заданих на лінійних нормованих просторах $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$ (у розумінні сублінійних функціоналів p_i, $i=\overline{1,m}$), або екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1).

Актуальність теми. Зрозуміло, що актуальність задачі відшукання величини (1) та її екстремального елемента – узагальненої точки Штейнера уже випливає зі змісту узагальненої точки Штейнера, адже це точка $y^* \in V$, для якої

$$\sum_{i=1}^{m} p_i\left(a_i - y^*\right) \le \sum_{i=1}^{m} p_i\left(a_i - y\right), y \in V .$$

Актуальність задачі відшукання величини (1) підсилюється ще й тим, що її частковими випадками є низка відомих екстремальних задач. Так, зокрема, при $p_i = c_i \|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, де $c_i > 0$, $i=\overline{1,m}$, задача (1) стає задачею відшукання величини

$$\inf_{y\in V} \sum_{i=1}^{m} c_i \|a_i - y\|_i \tag{2}$$

та її екстремального елемента, яку можна назвати «зваженою» задачею Штейнера в полінормованому просторі $\left(Y,\|\bullet\|_i, i=\overline{1,m}\right)$.

Задача (2) розглядалась у праці [5], в якій встановлено деякі умови екстремальності її допустимого елемента.

Задача (1) у випадку, коли $p_i = c_i\|\bullet\|$, $i=\overline{1,m}$, де $c_i > 0$, $i=\overline{1,m}$, стає задачею відшукання величини

$$\inf_{y\in V} \sum_{i=1}^{m} c_i \|a_i - y\| \tag{3}$$

та її екстремального елемента (так званою, «зваженою» задачею Штейнера в лінійному нормованому просторі $\left(Y,\|\bullet\|\right)$), яка досліджувалась, зокрема, у праці [3].

При $p_i = \|\bullet\|$, $i=\overline{1,m}$, задача (1) зводиться до класичної задачі Штейнера

$$\inf_{y\in V} \sum_{i=1}^{m} \|a_i - y\| \tag{4}$$

(див, наприклад, [1, с. 314; 2, с. 517]).

При $m=1$, $p_1=\|\bullet\|$ із задачі (1) отримуємо задачу відшукання величини

$$\inf_{y\in V}\|a_1-y\|, \tag{5}$$

яка є задачею найкращого наближення елемента a_1 лінійного нормованого простору $\left(Y,\|\bullet\|\right)$ множиною $V\subset Y$ (див, наприклад, [6, с. 11]).

Зрозуміло, що результати загального характеру, отримані при дослідженні задачі відшукання величини (1) та її екстремального елемента, становлять самостійний інтерес, а також можуть бути використані для отримання відповідних результатів для задач, які вкладаються у схему постановки задачі (1), зокрема, для задач відшукання величин (2)-(5).

Мета роботи. Важливим питанням дослідження задачі (1) є встановлення умов існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (1), що стало метою цієї роботи.

Допоміжні твердження. Нехай, $y^1=\left(y_1^1,\dots,y_m^1\right)$, $y^2=\left(y_1^2,\dots,y_m^2\right)\in Y^m$, $\alpha\in R$. Покладемо

$$y^1+y^2=\left(y_1^1+y_1^2,\dots,y_m^1+y_m^2\right),\ \alpha y^1=\left(\alpha y_1^1,\dots,\alpha y_m^1\right).$$

Легко переконатися, що так означені операції додавання елементів множини Y^m та множення дійсних чисел на ці елементи задовольняють аксіоми лінійного простору. Тому Y^m, з означеними вище операціями, є лінійним над полем дійсних чисел простором. Якщо в цьому просторі для кожного $y=\left(y_1,\dots,y_m\right)\in Y^m$ покласти $\left\|\left(y_1,\dots,y_m\right)\right\|_{Y^m}=\sum_{i=1}^m\|y_i\|_i$, то відповідність $\left(y_1,\dots,y_m\right)\in Y^m\to\sum_{i=1}^m\|y_i\|_i$ є нормою, заданою на Y^m, і, отже, $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$ є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором (див, наприклад, [5]).

Твердження 1. *Функціонал* $p\left(y_1,\dots,y_m\right)=\sum_{i=1}^m p_i\left(y_i\right)$, $\left(y_1,\dots,y_m\right)\in Y^m$, *є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом, заданим на* Y^m.

Твердження 2. *Відображення*

$$\left(y_1,\dots,y_m\right)\in Y^m\to p\left(\left(a_1,\dots,a_m\right)-\left(y_1,\dots,y_m\right)\right) \tag{6}$$

є неперервним на лінійному нормованому просторі $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$.

Твердження 3. *Якщо норми* $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$, *задані на лінійному над полем дійсних чисел просторі* Y, *попарно еквівалентні, то множини замкнених локально компактних підмножин лінійних нормованих просторів* $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, *рівні між собою.*

Доведення. Для $i\in\{1,...,m\}$ позначимо через σ_i – множину замкнених локально компактних підмножин лінійного нормованого простору $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$. Нехай $i,j\in\{1,...,m\}$. Переконаємося, що $\sigma_i=\sigma_j$. Для цього спочатку доведемо, що будь-яка множина V із σ_i належить σ_j. Оскільки норми $\|y\|_i$ та $\|y\|_j$ є еквівалентними нормами, заданими на Y, то існують числа $c_{ij}>0$, $c_{ji}>0$ такі, що $\|y\|_i\le c_{ij}\|y\|_j$, $\|y\|_j\le c_{ji}\|y\|_i$, $y\in Y$.

Виберемо довільну послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k\in V$, $k=1,2,...$, обмежену у розумінні норми $\|\bullet\|_j$, тобто для якої існує число $c>0$ таке, що $\|y_k\|_j\le c$, $k=1,2,...$. З урахуванням зазначеного вище маємо, що $\|y_k\|_i\le c_{ij}\|y_k\|_j\le c_{ij}c$, $k=1,2,...$. Це означає, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є послідовністю множини V обмеженою у розумінні $\|\bullet\|_i$. Оскільки за припущенням $V\in\sigma_i$, то з послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\{y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ таку, що $\lim\limits_{l\to\infty}y_{k_l}=y_0$ у розумінні $\|\bullet\|_i$ ($\lim\limits_{l\to\infty}\|y_{k_l}-y_0\|_i=0$), причому $y_0\in V$, оскільки V є замкненою множиною простору $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$. Маємо далі, що $\|y_{k_l}-y_0\|_j\le c_{ji}\|y_{k_l}-y_0\|_i$, $k=1,2,...$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{l\to\infty}\|y_{k_l}-y_0\|_j=0$, оскільки $\lim\limits_{l\to\infty}\|y_{k_l}-y_0\|_i=0$.

Отже, доведено, що з будь-якої обмеженої послідовності множини V лінійного нормованого простору $\left(Y,\|\bullet\|_j\right)$ можна вибрати підпослідовність, яка збігається у розумінні $\|\bullet\|_j$ до елемента множини V. Звідси випливає, що $V\in\sigma_j$. Тому $\sigma_i\subset\sigma_j$. Аналогічно доводиться, що $\sigma_j \subset \sigma_i$. З двох останніх співвідношень одержуємо, що $\sigma_i = \sigma_j$ для будь-яких $i, j \in \{1,...,m\}$. Тому $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_m$.

Твердження доведено.

Зауваження 1. Легко переконатися також, що у випадку, коли норми $\|\bullet\|_i$, $i = \overline{1,m}$, задані на Y, є попарно еквівалентними, то множини обмежених підмножин лінійних нормованих просторів $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, множини їх необмежених послідовностей, множини послідовностей $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k \in Y$, $k = 1, 2, ...$, для яких $\lim\limits_{k \to \infty} \|y_k\|_i = +\infty$, де $i \in \{1,...,m\}$, тощо, є однаковими.

Твердження 4. *Нехай для множини* $V \subset Y$ $M = \left\{ \left(\underbrace{y,...,y}_{m\ разів} \right) : y \in V \right\}$. *Для того щоб множина* M *була локально компактною множиною лінійного нормованого простору* $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$, *необхідно і достатньо, щоб з будь-якої послідовності* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k \in V$, $k = 1, 2, ...$, *обмеженої у кожному лінійному нормованому просторі* $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i = \overline{1,m}$, *можна було вибрати підпослідовність, збіжну у кожному з цих просторів.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай множина M є локально компактною множиною лінійного нормованого простору $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$, а $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ послідовність точок множини V, яка обмежена у кожному лінійному нормованому просторі $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, тобто існують числа $c_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, для яких $\|y_k\|_i \le c_i$, $k = 1, 2, ...$, для всіх $i \in \{1,...,m\}$. Тоді $\left\|(y_k,...,y_k)\right\|_{Y^m} = \sum\limits_{i=1}^{m} \|y_k\|_i \le \sum\limits_{i=1}^{m} c_i$. Отже, $\left\{(y_k,...,y_k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю множини M. Оскільки M є локально компактною множиною простору $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$, то існує збіжна до $\left(y_1^*,...,y_m^*\right) \in Y^m$ підпослідовність $\left\{\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\right\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{(y_k,...,y_k)\right\}_{k=1}^{\infty}$, тобто

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)-\left(y_1^*,...,y_m^*\right)\right\|_{Y^m}=\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left\|y_{k_l}-y_i^*\right\|_i=0\,. \qquad (7)$$

Оскільки для $i\in\{1,...,m\}$ $0\le\left\|y_{k_l}-y_i^*\right\|_i\le\sum_{i=1}^{m}\left\|y_{k_l}-y_i^*\right\|_i$, $l=1,2,...$, то з урахуванням (7) одержимо, що $\lim_{l\to\infty}y_{k_l}=y_i^*$. Це й означає, що підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ збігається до y_i^* у просторі $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$.

Отже, ми показали, що коли множина M є локально компактною множиною простору $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$, то з будь-якої послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ обмеженої відносно кожної з норм $\|\bullet\|_i$, можна виділити підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, збіжну в кожному з просторів $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай множина $V\subset Y$ така, що з будь-якої обмеженої в кожному з просторів $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$ послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k\in V$, $k=1,2,...$, можна вибрати підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, що збігається відносно кожної з норм $\|\bullet\|_i$ до деякого елемента y_i^*, $i=\overline{1,m}$, то множина M є локально компактною множиною простору $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$.

Дійсно, нехай $\left\{\left(y_k,...,y_k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю множини M, тобто існує число $c>0$ таке, що

$$\left\|\left(y_k,...,y_k\right)\right\|_{Y^m}=\sum_{i=1}^{m}\|y_k\|_i\le c\,,\ k=1,2,.... \qquad (8)$$

Зі співвідношення (8) одержуємо, що для будь-якого $i\in\{1,...,m\}$: $\|y_k\|_i\le c$, $k=1,2,...$. Звідси випливає, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю кожного нормованого простору $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$. За умовою твердження 3 з цієї послідовності можна вибрати таку підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, яка збігається до y_i^* в просторі $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, тобто $\lim_{l\to\infty}\left\|y_{k_l}-y_i^*\right\|_i=0$, $i=\overline{1,m}$.

З урахуванням цього одержуємо, що

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)-\left(y_1^*,...,y_m^*\right)\right\|_{Y^m}=\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left\|y_{k_l}-y_i^*\right\|_i=0\,.$$

Звідси випливає, що в просторі $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$

$$\lim_{l\to\infty}\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)=\left(y_1^*,...,y_m^*\right).$$

Отже, доведено, що з будь-якої обмеженої послідовності точок множини M можна виділити збіжну в просторі $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$ підпослідовність. Тому M є локально компактною множиною простору $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$.

Твердження доведено.

Твердження 5. *Нехай, як і вище, для множини* $V\subset Y$ $M=\left\{\left(y,...,y\right):y\in V\right\}$. *Для того щоб множина* M *була локально компактною та замкненою множиною лінійного нормованого простору* $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$, *необхідно і достатньо, щоб з будь-якої обмеженої в кожному просторі* $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, *послідовності точок множини* V *можна було вибрати підпослідовність збіжну у кожному з цих просторів до однієї і тієї ж точки множини* V.

Доведення. *Необхідність.* Нехай множина M є локально компактною та замкненою множиною простору $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$, а $\left\{y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ послідовність точок множини V, яка є обмеженою в кожному просторі $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$. Згідно з твердженням 4 з послідовності $\left\{y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, яка збігається в просторі $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$ до деякого елемента $y_i^*\in Y$, $i=\overline{1,m}$, тобто $\lim\limits_{l\to\infty}\left\|y_{k_l}-y_i^*\right\|_i=0$, $i=\overline{1,m}$. Для $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ маємо, що

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)-\left(y_1^*,...,y_m^*\right)\right\|_{Y^m}=\lim_{l\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left\|y_{k_l}-y_i^*\right\|_i=0\,,$$

причому $\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\in M$, $l=1,2,...$. Оскільки за умовою M є замкненою множиною, то $\left(y_1^*,...,y_m^*\right)\in M$. Це означає, що існує

$y^* \in V$, для якого $y^* = y_1^* = ... = y_m^*$. Тому $\lim\limits_{l\to\infty} y_{k_l} = y^*$ у розумінні норми $\|\bullet\|_i$, $i = \overline{1,m}$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай множина $V \subset Y$ є такою, що з будь-якої обмеженої в кожному просторі $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$ послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k \in V$, $k = 1, 2, ...$, можна вибрати підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, що збігається у розумінні $\|\bullet\|_i$, $i = \overline{1,m}$, до деякого $y^* \in V$. Переконаємося, що M є локально компактною та замкненою множиною простору $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$.

Згідно із зазначеним вище та твердженням 4 M є локально компактною множиною. Переконаємося, що вона замкнена. Припустимо, що $\left(y_1^*, ..., y_m^*\right)$ є граничною точкою множини M. Тоді існує послідовність точок $\left(y_k, ..., y_k\right) \in M$, $k = 1, 2, ...$, що

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\left(y_k, ..., y_k\right) - \left(y_1^*, ..., y_m^*\right)\right\|_{Y^m} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left\|y_k - y_i^*\right\|_i = 0 .$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|y_k - y_i^*\right\|_i = 0$, $i = \overline{1,m}$, причому $y_k \in V$, $k = 1, 2, ...$. Згідно з умовою тоді $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_i^* = y^*$ в розумінні норми $\|\bullet\|_i$, $i = \overline{1,m}$, де $y^* \in V$. Отже, гранична точка $\left(y_1^*, ..., y_m^*\right)$ така, що $\left(y_1^*, ..., y_m^*\right) = \left(y^*, ..., y^*\right) \in M$, оскільки $y^* \in V$. Оскільки граничні точки множини M цій множині належать, то M є замкненою множиною.

Достатність доведено.

Твердження доведено.

Твердження 6. *Нехай полінормований простір* $\left(Y, \|\bullet\|_i, i = \overline{1,m}\right)$ *такий, що* $\|\bullet\|_i$, $i = \overline{1,m}$, *є попарно еквівалентними,* $V \subset Y$, $M = \left\{\left(y, ..., y\right) : y \in V\right\}$. *Для того щоб множина* M *була локально компактною та замкненою множиною лінійного нормованого простору* $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$, *необхідно і достатньо, щоб множина* V *була локально компактною та замкненою множиною в кожному просторі* $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i = \overline{1,m}$.

Доведення. Нехай M є замкненою локально компактною множиною простору $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$, та $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є послідовністю множини V, обмеженою у просторі $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, де $i \in \{1,...,m\}$. Оскільки норми $\|\bullet\|_i$ є попарно еквівалентними нормами, заданими на Y, то $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю в кожному просторі $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i = \overline{1,m}$ (див. зауваження 1). Згідно твердження 5 з послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, яка збігається до $y^* \in V$ в кожному просторі $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$. Звідси випливає локальна компактність та замкненість множини V у будь-якому просторі $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$.

Нехай тепер множина V є замкненою і локально компактною множиною в деякому просторі $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i \in \{1,...,m\}$, і, отже, в усіх цих просторах (див. твердження 3). Виберемо послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k \in V$, $k = 1,2,...$, обмежену в просторі $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$. Оскільки V є локально компактною та замкненою множиною в просторі $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, то з послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, яка збігається до $y^* \in V$ в усіх просторах $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$. Згідно з твердженням 5 M є замкненою локально компактною множиною.

Твердження доведено.

Задача найкращого у розумінні невід’ємного неперервного сублінійного функціонала наближення в просторі $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$, еквівалентна задачі відшукання величини (1). Розглянемо в лінійному нормованому просторі $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$ задачу найкращого у розумінні сублінійного функціонала p наближення елемента $(a_1,...,a_m) \in Y^m$ множиною $M = \{(y,...,y) : y \in V\}$, яка є діагоналлю множини $V^m = V \times ... \times V$, тобто задачу відшукання величини

$$E_M^p(a_1,...,a_m) = \inf_{(y,...,y)\in M} p\left((a_1,...,a_m) - (y,..,y)\right) \tag{9}$$

та її екстремального елемента.

Теорема 1. *Справедлива рівність*

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m\right)=\inf_{y\in V}\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y\right)=$$
$$=\inf_{(y,..,y)\in M}p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y,..,y\right)\right)=E_M^p\left(a_1,...,a_m\right). \tag{10}$$

Для того щоб елемент $y^*\in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб елемент $\left(y^*,...,y^*\right)$ був екстремальним елементом для величини (9).

Доведення. Нехай $y\in V$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y\right)=p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y,..,y\right)\right)\geq\inf_{(y,..,y)\in M}p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y,..,y\right)\right).$$

Тому

$$\inf_{y\in V}\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y\right)\geq\inf_{(y,..,y)\in M}p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y,..,y\right)\right). \tag{11}$$

З іншого боку, якщо $\left(y,...,y\right)\in M$, то $y\in V$ та

$$p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y,..,y\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y\right)\geq\inf_{y\in V}\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y\right).$$

Звідси випливає, що

$$\inf_{(y,..,y)\in M}p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y,..,y\right)\right)\geq\inf_{y\in V}\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y\right). \tag{12}$$

Врахувавши (11) та (12), робимо висновок про справедливість співвідношення (10). Нехай $y^*\in V$ є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1). Тоді $\left(y^*,...,y^*\right)\in M$ і згідно з (10)

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y^*\right)=p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y^*,..,y^*\right)\right)=$$
$$=\inf_{y\in V}\sum_{i=1}^{m}p_i\left(a_i-y\right)=\inf_{(y,..,y)\in M}p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y,..,y\right)\right). \tag{13}$$

Звідси слідує, що $\left(y^*,...,y^*\right)\in M$ є екстремальним елементом для величини (9). Припустимо тепер, що $\left(y^*,...,y^*\right)\in M$ є екстремальним елементом для величини (9). Тоді $y^*\in V$ та мають місце рівності (13). Тому y^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (1).

Теорема 2 (теорема існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (1)). *Нехай для задачі відшукання величини (1) множина* $M=\left\{\left(y,...,y\right)\in Y^m : y\in V\right\}$ *є локально компактною та замкненою множиною простору* $\left(Y^m,\left\|\bullet\right\|_{Y^m}\right)$.

Якщо ця множина обмежена або будь-яка її необмежена послідовність $\left\{\left(y_k,...,y_k\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ *містить підпослідовність* $\left\{\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\right\}_{l=1}^{\infty}$ *таку, що* $\lim\limits_{l\to\infty}\left\|\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\right\|_{Y^m}=+\infty$ *і* $\lim\limits_{l\to\infty}p\left(-y_{k_l},...,-y_{k_l}\right)=+\infty$, *то екстремальний елемент для величини (1) існує.*

Доведення. Зрозуміло, що коли M є локально компактною замкненою та обмеженою множиною лінійного нормованого простору $\left(Y^m,\left\|\bullet\right\|_{Y^m}\right)$, то вона є компактом цього простору. Згідно з твердженням 2 відображення

$$\left(y_1,...,y_m\right)\in Y^m\to p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y_1,...,y_m\right)\right)$$

неперервне на $\left(Y^m,\left\|\bullet\right\|_{Y^m}\right)$. Тоді внаслідок узагальненої теореми Вейєрштрасса, існує точка $\left(y^*,...,y^*\right)\in M$ ($y^*\in V$) така, що

$$\inf_{(y,..,y)\in M} p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y,..,y\right)\right)=p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y^*,..,y^*\right)\right).$$

Це означає, що вектор $\left(y^*,...,y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (9). Згідно з теоремою 1 y^* буде екстремальним елементом для величини (1). У цьому випадку теорему доведено.

Переконаємося, що за виконання умов теореми екстремальний елемент для величини (1) існує і в тому випадку, коли M є необмеженою множиною.

З урахуванням (9) для кожного $k=1,2,...$ одержуємо, що

$$E_M^p\left(a_1,...,a_m\right)=\inf_{(y,..,y)\in M} p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y,..,y\right)\right)<E_M^p\left(a_1,...,a_m\right)+\frac{1}{k}. \quad (14)$$

З (14) та означення інфімуму випливає, що для $k=1,2,...$ існує точка $\left(y_k,..,y_k\right)\in M$ така, що

$$E_M^p\left(a_1,...,a_m\right)\le p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y_k,..,y_k\right)\right)<E_M^p\left(a_1,...,a_m\right)+\frac{1}{k}. \quad (15)$$

Внаслідок півадитивності функціонала p для $k=1,2,...$ маємо, що

$$p(-y_k,...,-y_k)=p\Big(\big((a_1,...,a_m)-(y_k,..,y_k)\big)+(-a_1,...,-a_m)\Big)\le$$
$$\le p\big((a_1,...,a_m)-(y_k,..,y_k)\big)+p(-a_1,...,-a_m)\ .$$

З урахуванням цього співвідношення та співвідношення (15) одержуємо, що

$$p(-y_k,...,-y_k)<E_M^p(a_1,...,a_m)+\frac{1}{k}+p(-a_1,...,-a_m)\le$$
$$\le E_M^p(a_1,...,a_m)+p(-a_1,...,-a_m)+1=\theta. \tag{16}$$

Отже,

$$0\le p(-y_k,...,-y_k)<\theta\ ,\ k=1,2,...\ , \tag{17}$$

оскільки має місце співвідношення (16) та за припущенням $p_i(y)\ge 0$, $i=\overline{1,m}$, $y\in Y$. Це означає, що послідовність $\{p(-y_k,...,-y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою. Зі співвідношення (17) та умов теореми випливає, що послідовність $\{(y_k,...,y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ також є обмеженою послідовністю лінійного нормованого простору $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$.

Припустимо, що $\{(y_k,...,y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є необмежною послідовністю цього простору. Тоді за умовою теореми з неї можна виділити таку підпослідовність $\left\{\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\right\}_{l=1}^{\infty}$, що $\lim\limits_{l\to\infty}\left\|\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\right\|_{Y^m}=+\infty$ та $\lim\limits_{l\to\infty}p\left(-y_{k_l},...,-y_{k_l}\right)=+\infty$, що суперечить (17). Отже, послідовність $\{(y_k,...,y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю множини M. Оскільки за умовою теореми M є локально компактною та замкненою множиною лінійного нормованого простору $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$, то існує її підпослідовність, що збігається, до $\left(y_1^*,...,y_m^*\right)\in M$. Оскільки $\left(y_1^*,...,y_m^*\right)\in M$, то існує $y^*\in V$, для якого $\left(y_1^*,...,y_m^*\right)=\left(y^*,...,y^*\right)$.

Переконаємося, що $\left(y^*,...,y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (9). Дійсно, згідно (15)

$$E_M^p(a_1,...,a_m)\le p\Big((a_1,...,a_m)-\left(y_{k_l},..,y_{k_l}\right)\Big)<E_M^p(a_1,...,a_m)+\frac{1}{k_l}\ .$$

Якщо в цій нерівності перейти до границі при $l \to \infty$ та врахувати, що відображення $(y_1,...,y_m) \in Y^m \to p\left((a_1,...,a_m)-(y_1,...,y_m)\right)$ неперервне на $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$ (див. твердження 2), то одержимо, що

$$E_M^p\left(a_1,...,a_m\right) = p\left(\left(a_1,...,a_m\right)-\left(y^*,...,y^*\right)\right), \tag{18}$$

причому $\left(y^*,...,y^*\right) \in M$, тобто $y^* \in V$.

Рівність (18) означає, що $\left(y^*,...,y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (9). Згідно з теоремою 1 y^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай в задачі відшукання величини (1) норми* $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$, *є попарно еквівалентними,* V *є замкненою локально компактною множиною лінійних нормованих просторів* $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$.

Якщо множина V, *крім того, є обмеженою множиною цих просторів або будь-яка її необмежена в розумінні норм* $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$, *послідовність* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *містить підпослідовність* $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ *таку, що* $\lim\limits_{l\to\infty}\left\|y_{k_l}\right\|_i = +\infty$, $i=\overline{1,m}$, *та* $\lim\limits_{l\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m} p_i\left(-y_{k_l}\right) = +\infty$, *то екстремальний елемент для величини (1) існує.*

Доведення. Оскільки за умовою наслідку норми $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$, є попарно еквівалентними, а V – замкнена локально компактна множина лінійних нормованих просторів $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, то згідно з твердженням 6 множина $M = \left\{(y,...,y) \in Y^m : y \in V\right\}$ є локально компактною та замкненою множиною лінійного нормованого простору $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$.

Переконаємося, що коли V є обмеженою множиною лінійних нормованих просторів $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, то M є обмеженою множиною простору $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$. Дійсно з обмеженості множини V в лінійних нормованих просторах $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, випливає, що існують числа $\theta_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, такі, що $\|y\|_i \le \theta_i$, $y \in V$, $i = \overline{1,m}$. Тому для всіх $(y,...,y) \in M$ ($y \in V$) маємо, що $\|(y,...,y)\|_{Y^m} = \sum_{i=1}^{m} \|y\|_i \le \sum_{i=1}^{m} \theta_i$. Це й означає, що множина M є обмеженою в просторі $\left(Y^m, \|\bullet\|_{Y^m}\right)$, якщо V є обмеженою множиною просторів $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i = \overline{1,m}$.

Переконаємося, крім того, що за умов наслідку для будь-якої необмеженої послідовності $\left\{(y_k,...,y_k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ точок $(y_k,...,y_k) \in M$, $y_k \in V$, $k = 1,2,...$, можна вибрати підпослідовність $\left\{\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\right\}_{l=1}^{\infty}$, для якої $\lim_{l\to\infty} \left\|\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\right\|_{Y^m} = +\infty$ та $\lim_{l\to\infty} p\left(-y_{k_l},...,-y_{k_l}\right) = +\infty$.

Оскільки за умовою норми $\|\bullet\|_i$, $i = \overline{1,m}$, є еквівалентними на Y, то для $k = 1,2,...$, $i \in \{1,...,m\}$

$$\|(y_k,...,y_k)\|_{Y^m} = \|y_k\|_1 + ... + \|y_k\|_i + ... + \|y_k\|_m \le$$
$$\le c_{1i}\|y_k\|_i + ... + \|y_k\|_i + ... + c_{mi}\|y_k\|_i = (c_{1i} + ... + 1 + ... + c_{mi})\|y_k\|_i .$$

Звідси випливає необмеженість послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k \in V$, $k = 1,2,...$, у розумінні будь-якої норми $\|\bullet\|_i$. Згідно з умовами наслідку тоді існує підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ цієї послідовності така, що $\lim_{l\to\infty} \left\|y_{k_l}\right\|_i = +\infty$, $i = \overline{1,m}$, та $\lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{m} p_i\left(-y_{k_l}\right) = +\infty$. Оскільки $\left\|\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\right\|_{Y^m} = \sum_{i=1}^{m} \left\|y_{k_l}\right\|_i$, то з попередніх співвідношень одержуємо, що $\lim_{l\to\infty} \left\|\left(y_{k_l},...,y_{k_l}\right)\right\|_{Y^m} = +\infty$ та $\lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{m} p_i\left(-y_{k_l}\right) = +\infty$.

Отже, ми показали, що за умов наслідку 1 виконуються всі умови теореми 2. Тоді екстремальний елемент для величини (1) існує.

Наслідок доведено.

Наслідок 2. *Нехай в задачі відшукання величини (1) норми* $\|\bullet\|_i$, $i = \overline{1,m}$, *є попарно еквівалентними,* V *є замкненою локально компактною множиною лінійних нормованих просторів* $\left(Y, \|\bullet\|_i\right)$, $i = \overline{1,m}$.

Якщо множина V*, крім того, є обмеженою множиною цих просторів або будь-яка її необмежена в розумінні норм* $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$*, послідовність* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *містить підпослідовність* $\{y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ *таку, що* $\lim\limits_{l\to\infty}\|y_{k_l}\|_i=+\infty$, $i=\overline{1,m}$, *та* $\lim\limits_{l\to\infty}p_{i_0}\left(-y_{k_l}\right)=+\infty$ *для деякого* $i_0\in\{1,\dots,m\}$*, то екстремальний елемент для величини (1) існує.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 1.

Наслідок 3. *Якщо в задачі відшукання величини (1) для кожного* $i\in\{1,\dots,m\}$ *існує число* $c_i>0$ *таке, що* $p_i(y)\ge c_i\|y\|_i$, $y\in Y$*, а множина* $M=\{(y,\dots,y):y\in V\}$ *є замкненою локально компактною множиною простору* $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$*, то екстремальний елемент для величини (1) існує.*

Справедливість наслідку випливає з теореми 2.

Наслідок 4. *Якщо в задачі відшукання величини (1) для кожного* $i\in\{1,\dots,m\}$ p_i *є нормою на* Y*, яка еквівалентна нормі* $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$*, а множина* $M=\{(y,\dots,y):y\in V\}$ *є замкненою локально компактною множиною простору* $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$*, то екстремальний елемент для величини (1) існує.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 3.

Наслідок 5. *Нехай в задачі відшукання величини (1) норми* $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$*, є попарно еквівалентними та для кожного* $i\in\{1,\dots,m\}$ *існує число* $c_i>0$ *таке, що* $p_i(y)\ge c_i\|y\|_i$, $y\in Y$.

Якщо V *є замкненою локально компактною множиною лінійних нормованих просторів* $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$*, то екстремальний елемент для величини (1) існує.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 2.

Умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (1) у скінченновимірному підпросторі.

Теорема 3. *Нехай в задачі відшукання величини (1) для кожного* $i\in\{1,\dots,m\}$ *існує число* $c_i>0$ *таке, що* $p_i(y)\ge c_i\|y\|_i$, $y\in Y$*, а* *множина V є скінченновимірним підпростором простору Y, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1) існує.*

Доведення. Нехай V є скінченновимірним підпростором простору Y. Тоді існують лінійно незалежні вектори $y^1,...,y^n$ цього простору такі, що $V=\left\{y=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j y^j : \alpha_j \in R,\ j=\overline{1,n}\right\}$. Як і вище, позначимо через $M=\{(y,...,y): y\in V\}$. Легко переконатися, що M є n - вимірним підпростором простору Y^m, породженим векторами $\left(y^1,...,y^1\right)$, …, $\left(y^n,...,y^n\right)$. Як відомо (див., наприклад, [6, с. 21]), будь-який скінченновимірний підпростір лінійного нормованого простору є локально компактною та замкненою множиною.

Отже, M є локально компактною та замкненою множиною простору $\left(Y^m,\|\bullet\|_{Y^m}\right)$. Згідно з наслідком 3 екстремальний елемент для величини (1) існує.

Теорему доведено.

Наслідок 6. *Якщо в задачі відшукання величини (1) для кожного $i\in\{1,...,m\}$ p_i є нормою на Y, яка еквівалентна нормі $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$, а V є скінченновимірним підпростором простору Y, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1) існує.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 4, оскільки в розглядуваному випадку M є замкненою локально компактною множиною (див. доведення теореми 3).

Наслідок 7. *Нехай в задачі відшукання величини (1) норми $\|\bullet\|_i$, $i=\overline{1,m}$, є попарно еквівалентними та для кожного $i\in\{1,...,m\}$ $p_i(y)=c_i\|y\|_i$, $y\in Y$, $c_i>0$. Якщо V є скінченновимірним підпростором простору Y, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1) існує.*

Справедливість наслідку випливає з наслідку 5, оскільки V є замкненою локально компактною множиною в кожному лінійному полінормованому просторі $\left(Y,\|\bullet\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$.

Висновки. Для узагальненої задачі Штейнера в полінормованому просторі, в якій відхилення між елементами визначаються з допомогою сублінійних функціоналів (див. задачу (1)):

- встановлено її еквівалентність деякій задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору (див. теорему 1);
- з допомогою цієї еквівалентної задачі (9) встановлено теорему існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (1) (див. теорему 2);
- умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (1), встановлені в теоремі 2, конкретизовано на деякі часткові випадки (див. наслідки 1-5);
- розглянуто випадок задачі (1), коли множина її допустимих елементів є скінченновимірним підпростором (див. теорему 3 та наслідки 6, 7).

Список використаних джерел:

1. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. Москва: Наука, 1967. 460 с.
2. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Москва: Наука, 1973. 552с.
3. Рубинштейн Г. Ш. Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве. *Сиб. матем. журн.* 1965. Вып. 6. № 3. С. 711-714.
4. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови існування екстремального елемента для узагальненої задачі Штейнера в метричному просторі обмежених замкнених множин лінійного нормованого простору. *Вісник Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки.* Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. Вип. 14. С. 8-13.
5. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови екстремальності допустимого елемента для узагальненої задачі Штейнера в деякому полінормованому просторі. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип. 23. С. 29-43.
6. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. Москва: Наука, 1976. 320 с.
7. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Ленинград: ЛГУ, 1968. 178 с.

THE EXISTENCE CONDITIONS OF THE EXTREMAL ELEMENT FOR THE GENERALIZED PROBLEM OF STEINER IN POLYNORMATED SPACE IN WHICH THE DEVIATION BETWEEN THE ELEMENTS IS DETERMINED WITH THE HELP OF SUBLINEAR FUNCTIONALS

An important place among extremal problems is occupied by the classic Steiner problem, which consists in finding in a given set of linear normed space such a point (Steiner point) to which the sum of the distanc-

es from several fixed points of this space will not exceed the sum of the distances from them to any – some other point of the admissible set (will be minimal) [1, p. 314].

In the classic Steiner problem, it is assumed that all segments of the linear normed space are «homogeneous». However, in practice, different «weight» characteristics are attributed to their lengths. As a result, we arrive at the so-called «weighted» Steiner problem [2, p. 468; 3, 4], which, in turn, is a partial case for the problem in which the sum of the distances between fixed points of linear space and points of its set, which were determined by weighted norms, were replaced by sums of distances between these points, which, generally speaking, are determined by different norms set on the considered linear space. As a result of this substitution, we obtain the generalized Steiner problem in a polynormed space [5].

As you know, there are problems, in particular approximation problems, in which the measure of deviation between fixed elements and elements of a given set is the so-called «distorted metric».

The problem considered in the article is obtained as a result of replacing in the generalized Steiner problem in the polynormed space the sum of the distances between fixed points of the linear space and the points of the set of admissible elements, which are determined by various norms given on the linear space, by the sum of the deviations between the specified points, which are determined by by non-negative continuous sublinear functionals defined on the corresponding linear normed spaces. The article establishes some sufficient conditions for the existence of an extremal element (Steiner point) for this problem, which generalize the relevant results obtained, in particular, in [6] for the problem of the best approximation of an element of a linear normed spase by a convex set of this space.

Key words: *the linear normed space, the polynormed space, the sublinear functional, the Steiner's problem, the point of Steiner, the extremal element, the existence conditions of the extremal element.*

Отримано: 16.11.2023