

УДК 519.63

DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.70-80

В. А. Колесников, аспірант

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ МАСОПЕРЕНОСУ НА ГРАФІ

Процес масопереносу у пористому середовищі описується за допомогою рівняння Річардса-Клюта. Дане рівняння враховує дії капілярності та гравітації, що впливають на потоки маси, та дозволяє моделювати процес масопереносу, враховуючи межу повного насичення. Рівняння Річардса-Клюта є нелінійним еліптико-параболічним диференціальним рівнянням у часткових похідних, тому основними методами для знаходження його розв'язків та моделювання процесу масопереносу є чисельні методи.

У статті розглядається модель системи з'єднаних між собою труб, всередині яких відбувається процес масопереносу. Такі системи часто зустрічаються у сільському господарстві та активно використовуються при побудові іригаційних систем. У статті пропонується моделювати дані системи труб за допомогою графів, де труби представляються ребрами графу, а точки з'єднання або вільні кінці труб системи – вершинами графу.

Стаття містить означення рівняння Річардса-Клюта на графі у звичайній та слабкій формах. На ребрах графу розглянуті одновимірні рівняння Річардса-Клюта, в той час як на вершинах або задані крайові умови, або наведені рівняння, що моделює закон збереження маси. Також наведено означення розв'язку та слабого розв'язку рівняння Річардса-Клюта на графі. Також у статті доведена теорема про існування слабого розв'язку рівняння Річардса-Клюта на графі.

Для доведення теореми існування слабого розв'язку рівняння Річардса-Клюта на графі застосовується перетворення Кірхгофа та наводяться умови, що є аналогічними до умов, які використовуються в доведенні існування слабого розв'язку для рівняння Річардса-Клюта в звичайних областях в тривимірному просторі, та які визначаються в класичній роботі Альта та Лукхауса, що присвячена проблемам існування та єдиності слабких розв'язків еліптико-параболічних диференціальних рівнянь в часткових похідних.

Ключові слова: математичне моделювання, рівняння Річардса-Клюта, графи, слабкий розв'язок, теорема існування.

Вступ. Процес масопереносу у пористому середовищі є однією з важливих задач математичної фізики. Зазвичай його моделюють за допомогою рівняння Річардса-Клюта, що є нелінійним еліптико-

параболічним диференціальним рівнянням у часткових похідних. Через ці властивості відомо дуже мало аналітичних розв'язків рівняння Річардса-Клюта, більшість з яких отримано для дуже спрощених параметрів пористого середовища [1, 3]. Також ці властивості є причиною невеликої кількості апріорних оцінок для рівняння Річардса-Клюта. Класичні роботи [4, 5] містять теореми про існування, єдиність та регулярність розв'язків рівняння Річардса-Клюта, отримані в термінах загальних еліптико-параболічних рівнянь. Також важливими результатами є властивості межі між зонами повного насичення та ненасиченою зоною, де процес масопереносу описується еліптичним та параболічним рівняннями відповідно. Доведення неперервності та гладкості цієї межі можна знайти у роботах [6, 7].

Основним інструментом для розв'язання рівняння Річардса-Клюта є чисельні методи. Зазвичай для знаходження наближеного розв'язку використовують стандартні метод скінченних елементів (FEM) та метод скінченних об'ємів (FVM) у поєднанні зі зворотним кроком по часу. Проте існує багато модифікацій чисельних методів, що були створені для підвищення точності наближеного розв'язку [8] або для підвищення ефективності процесу моделювання [9]. Огляд сучасних чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса-Клюта можна знайти у роботах [10, 11]. Роботи [11, 12] також містять огляд програм, що використовуються для моделювання процесу масопереносу у пористому середовищі.

При використанні чисельних методів процес обчислень зазвичай зводиться до знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному кроці по часу. Матриця цієї системи конструюється таким чином, щоб виконувалися умови розрідженості, симетричності та діагональної переваги. Тоді систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна розв'язувати модифікованими для розріджених матриць методами Зейделя та спряжених градієнтів. Проте основною проблемою залишаються розмірності матриць. Необхідність у високій точності наближеного розв'язку призводить до потреби збільшення вузлів у просторовій сітці, що у випадку дво- або тривимірних рівнянь Річардса-Клюта несе за собою значне підвищення кількості необхідних обчислень, тим самим призводячи до суттєвого сповільнення процесу моделювання.

Ця стаття присвячена рівнянню Річардса-Клюта на графі як моделі процесу масопереносу у системі з'єднаних між собою труб. У статті формулюється рівняння Річардса-Клюта на графі у звичайній та слабкій формах та доводиться теорема про існування слабого розв'язку для рівняння Річардса-Клюта на графі. Дана постановка задачі дозволяє зменшити кількість обчислень при процесі моделювання процесу масопереносу у системі труб за рахунок того, що за-

мість тривимірної апроксимації кожна труба апроксимується як одновимірне ребро графу.

Постановка задачі. Розглянемо іригаційну систему, що складається з системи труб, що з'єднані між собою (рис. 1).

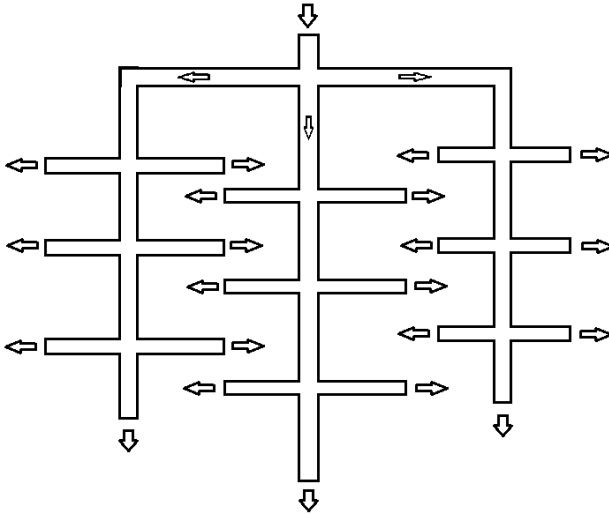


Рис. 1. Іригаційна система

Деякі з цих труб мають один відкритий кінець, що слугує або для під'єднання до системи подачі води (вхід маси), або для виходу цієї води для зрошення певної ділянки (вихід маси). Деякі труби обом кінцями під'єднані до кінців інших труб та слугують для переносу води. Варто зазначити, що в деяких трубах один з кінців може бути запаяним і, таким чином, на цьому кінці труби немає потоку води. Для моделювання процесу розповсюдження води чи маси цією системою труб використовують тривимірне рівняння Річардса-Клюта, де областю дослідження є внутрішнє середовище системи труб, що є підмножиною тривимірного простору. Розв'язання рівняння Річардса-Клюта в тривимірному випадку займає дуже багато часу та вимагає великої кількості обчислень, тому задля підвищення ефективності процесу моделювання розповсюдження маси системою труб ми пропонуємо нову модель даної системи, що базується на представленні системи труб як графу, що вкладений у дво- або тривимірний простір (рис. 2).

Тоді для моделювання потоку маси в одній трубі можна використовувати одновимірне рівняння Річардса-Клюта, чисельні методи для якого працюють набагато швидше.

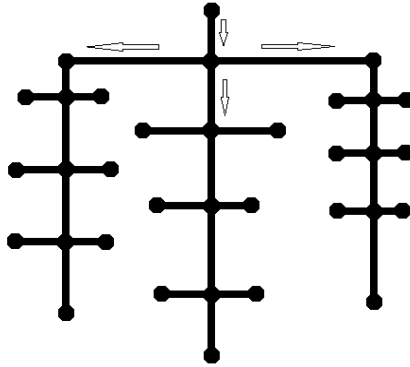


Рис. 2. Граф, що моделює іригаційну систему

Для того, щоб дана модель коректно представляла процес масопереносу у системі труб, повинні виконуватися наступні умови:

- 1) труби мають круговий переріз;
- 2) діаметри перерізу кожної труби нехтовно малий в порівнянні з її довжиною та рівні між собою для всіх труб;
- 3) значення розв'язку тривимірного рівняння Річардса-Клюта в будь-якій точці довільної труби не залежить від положення точки на перерізі труби.

Наведені умови дозволяють розглядати труби як відрізки у просторі \mathbb{R}^3 з одновимірним рівнянням Річардса-Клюта, що задане на них. Таким чином, ми можемо розглянути процес масопереносу на деякому графі, що вкладений в простір \mathbb{R}^3 .

Нехай $G = (V, E)$ – мультиграф без петель, що вкладений у простір \mathbb{R}^3 , тобто кожна $v \in V$ має координати (x_v, y_v, z_v) , а кожне ребро $e = (v_1, v_2) \in E$ є гладкою кривою, що з'єднує вершини v_1 та v_2 . Нехай $f_e : [0, L_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ – параметричне задання ребра e в тривимірному просторі, L_e – довжина ребра e , $|\nabla f_e(x)| = 1, x \in [0, L_e]$ (тобто f_e зберігає довжини), $f_e(0) = v_1, f_e(L_e) = v_2$. Різні ребра e_1 та e_2 не перетинаються окрім як в кінцевих точках. Будемо вважати, що граф G зв'язний. Тоді рівняння Річардса-Клюта

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K(\theta) \nabla h) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} + s, \quad (1)$$

де θ – коефіцієнт насиченості (безрозмірний), h – потенціал гідравлічного тиску (м), s – інтенсивність джерел (1/с), K – водопроник-

ність (м/с) середовища (залежить від насиченості), z – вертикальна координата, для потоку маси на ребрі e буде мати вигляд

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla_e \cdot (K(\theta)(\nabla_e h + i_z)) + s, \quad (2)$$

де i_z – вертикальний орт, ∇_e – похідна за напрямком уздовж ребра e . Залежності $K(\theta), \theta(h)$ представляють властивості пористого середовища у трубах та вважаються відомими. Будемо також вважати, що вони однакові для всіх ребер e .

Розділимо множину вершин V на дві підмножини V_b та V_i , що будуть відповідати крайовим та внутрішнім вершинам графа G відповідно, а саме нехай

$$V_b = \{v \in V : \exists! e \in E(e \in \text{Inc}(v))\}, \quad (3)$$

$$V_i = V \setminus V_b,$$

тобто крайовими вершинами назвемо ті вершини, інцидентними до яких є лише одне ребро. На крайових вершинах ми будемо задавати крайові умови для задачі масопереносу. Як і зазвичай, вони будуть задаватися одним з двох способів:

- 1) $\theta(v) = \theta^D$ або $h(v) = h^D$, $v \in V_b^1$ (умова першого роду);
- 2) $K(\theta)(\nabla_e h + i_z)|_{(x,y,z)=v} = q^D$, де $e \in \text{Inc}(v), v \in V_b^2$ (умова другого роду), де $V_b^1 \cup V_b^2 = V_b, V_b^1 \cap V_b^2 = \emptyset$.

У внутрішніх вершинах V_i виконується закон збереження маси, що виражається наступною формулою.

$$\sum_{k=1}^{N_1} K(\theta)(\nabla_e h + i_z)|_{n_{(x,y,z)=v}} = \sum_{k=1}^{N_2} K(\theta)(\nabla_e h + i_z)|_{n_{(x,y,z)=v}}, \quad (4)$$

де N_1, N_2 – кількість ребер e , для яких $f_e(0) = v$ або $f_e(L_e) = v$ відповідно. Окрім цього, повинна виконуватися умова неперервності потенціалу гідравлічного тиску h у внутрішніх вершинах.

Нехай θ^0 – неперервна на G функція. Тоді можна визначити початкову умову

$$\theta(x, y, z, 0) = \theta^0. \quad (5)$$

Означення. Функція $h : G \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ є розв'язком рівняння Річардса-Клюта на графі G , якщо h та визначена за нею $\theta(h)$ є неперервними на $G \times [0, T]$, задовольняють рівнянням (2) для всіх $e \in E, t \in (0, T)$ та умовам балансу маси (4) для всіх $v \in V_i, t \in (0, T)$, а також задовольняють початковій умові (5) та крайовим умовам на $v \in V_b$.

Слабка форма. Запишемо тепер рівняння Річардса-Клюта на графі G у слабкій формі та дамо означення слабого розв'язку для нього. Проте спочатку зробимо заміну змінних, що полегшить подальше доведення існування слабого розв'язку.

Застосуємо перетворення Кірхгофа та введемо нову змінну.

$$u = \int_0^h K(\theta(s)) ds. \quad (6)$$

Тоді рівняння (2) та (4) будуть мати наступний вигляд.

$$\frac{\partial \theta(u)}{\partial t} = \nabla_e \cdot (\nabla_e u + K(\theta) i_z) + s, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{N_1} (\nabla_e u + K(\theta) i_z) |_{n_{(x,y,z)=v}} = \sum_{k=1}^{N_2} (\nabla_e u + K(\theta) i_z) |_{n_{(x,y,z)=w}}. \quad (8)$$

Введемо до розгляду простори

$$L^r(e) = \left\{ u : e \rightarrow \mathbb{R} \mid u \circ f_e^{-1} \in L^r(0, L_e) \right\}, r \in \{1, 2, \infty\}, \quad (9)$$

що будуть представляти простори функцій, визначених на ребрах графу G . Також введемо аналогічні простори для всього графу.

$$L^r(G) = \bigoplus_{e \in E} L^r(e) \quad (10)$$

Пронумеруємо ребра $e \in E$ та розглянемо відображення $f_G : G \rightarrow [0, \sum_{e \in E} L_e]$, таке що

$$f_G(x, y, z) = f_{e_k}(x, y, z) + \sum_{i < k} L_{e_i}, (x, y, z) \in e_k.$$

Тоді за допомогою функції f_G можна визначити бієктивне відображення між просторами $L^r(G)$ та $L^r(0, \sum_{e \in E} L_e)$. Оскільки кількість ребер скінченна, то норми в цих просторах є еквівалентними, отже дана бієкція є гомеоморфізмом. Це означає, що простори $L^r(G)$ та $L^r(0, \sum_{e \in E} L_e)$ мають ті ж самі топологічні властивості.

Для довільних суміжних ребер e_1, e_2 за допомогою комбінації функцій f_{e_1}, f_{e_2} побудуємо функцію f_{e_1, e_2} , що неперервно відображає їх у відрізок $[0, L_{e_1} + L_{e_2}]$. Введемо за допомогою f_{e_1, e_2} наступний простір функцій на графі G .

$$H^1(G) = \bigcap_{e_1, e_2 : e_1 \in Adj(e_2)} \left\{ u : G \rightarrow \mathbb{R} \mid u |_{e_1 \cup e_2} \circ f_{e_1, e_2} \in H^1(0, L_{e_1} + L_{e_2}); \right. \\ \left. u |_{e \neq e_1, e_2} \circ f_e \in H^1(0, L_e) \right\}. \quad (11)$$

Як перетин банахових просторів, цей простір також є банаховим, причому функції з нього є неперервними у внутрішніх вершинах графу G , а звуження функції u з $H^1(G)$ на ребро $e \in E$ є функцією з $H^1(e)$. Нормою u в просторі $H^1(G)$ будемо вважати величину $\|u\|_{H^1(G)} = \sqrt{\sum_{e \in E} \|u|_e\|_{H^1(e)}^2}$. Можна побудувати гомеоморфізм між простором $H^1(G)$ та деяким замкненим лінійним підпростором банахового простору $\bigoplus_{e \in E} H^1(e)$.

Для представлення функцій з крайовою умовою $u(v) = u^D$, $v \in V_b^1$ введемо також простір

$$V_G = \{u \in H^1(G) \mid u(v) = 0, v \in V_b^1\}. \quad (12)$$

Домножимо тепер рівняння (7) на тестову функцію $\eta \in V_G$ та проінтегруємо частинами, сумуючи за всіма ребрами $e \in E$. Тоді, за рахунок рівняння балансу маси (8) у внутрішніх вузлах, ми маємо наступне рівняння.

$$\sum_{e \in E} \int_e \frac{\partial \theta(u)}{\partial t} \eta + \sum_{e \in E} \int_e (\nabla_e u + K(\theta)(i_z, e)) \nabla_e \eta = \sum_{e \in E} \int_e s \eta, \quad (13)$$

де (i_z, e) – скалярний добуток між векторами, що задають вертикальний напрямок та напрямок ребра відповідно.

Означення. Функція $u \in u^D + L^2(0, T; V_G)$ є слабким розв'язком рівняння Річардса-Клюта на графі G , якщо виконуються наступні умови:

1) $\theta(u) \in L^\infty(0, T; L^1(G)); \frac{\partial \theta(u)}{\partial t} \in L^2(0, T; V_G^*);$

$\nabla_e u + K(\theta(u))i_z, s(\theta(u)) \in L^2((0, T) \times G);$

2) для всіх $\eta \in L^2(0, T; V) \cap W_1^1(0, T; L^\infty(G)), \eta(T) = 0$ виконується

$$\int_0^T \sum_{e \in E} \int_e \frac{\partial \theta(u)}{\partial t} \eta + \int_0^T \sum_{e \in E} \int_e (\theta(u) - \theta^0) \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0; \quad (15)$$

3) для всіх $\eta \in L^2(0, T; V)$ виконується

$$\int_0^T \sum_{e \in E} \int_e \frac{\partial \theta(u)}{\partial t} \eta + \int_0^T \sum_{e \in E} \int_e (\nabla_e u + K(\theta)(i_z, e)) \nabla_e \eta = \int_0^T \sum_{e \in E} \int_e s \eta; \quad (15)$$

Основні результати. Визначимо наступні функції.

$$\Psi(z) = \sup_{\sigma \in R} \int_0^1 (z - \theta(s\sigma)) \sigma ds, \quad (16)$$

$$\Theta(z) = \Psi(\theta(z)). \quad (17)$$

Нехай для параметрів рівняння Річардса-Клюта виконуються наступні умови:

- 1) $\theta(u)$ монотонна по u та має C^1 -первісну;
- 2) $K(\theta(u))$ неперервна по u ;
- 3) $|\nabla u + K(\theta(z))e| + |s(\theta(z))| \leq c(1 + \Theta(z))^{1/2} + |\nabla u|$.

Нехай також для початкової θ^0 та крайової u^D функцій виконуються умови:

- 1) $\Psi(\theta^0) \in L^1(G)$ та $\exists u^0 : \theta^0 = \theta(u^0)$;
- 2) $u_D \in L^2(0, T; H^1(G)) \cap L^\infty((0, T) \times G)$, $\frac{\partial u^D}{\partial t} \in L^1(0, T; L^\infty(G))$.

Дані умови та означення слабкого розв'язку є аналогічними до умов та означення слабкого розв'язку для одновимірного рівняння Річардса-Клюта, що описані у класичній роботі [4]. За рахунок гомеоморфізму просторів $L^1(G)$ та $L^1(0, \sum_{e \in E} L_e)$ та властивостей банахового простору

$H^1(G)$ можна провести міркування, аналогічні до тих, що застосовуються при доведенні теореми про існування слабкого розв'язку у роботі [4] із заміною процедури інтегрування по області Ω на процедуру інтегрування по графу G та отримати наступний результат.

Теорема. За вищенаведених умов існує слабкий розв'язок рівняння Річардса-Клюта на графі G .

Центральною величиною у доведенні цього результату є так званий інтеграл енергії, що у випадку рівняння Річардса-Клюта на графі G має наступну форму.

$$\int_0^T \sum_{e \in E} \int_e (\Theta(u) + |\nabla u|^2). \quad (18)$$

Зауваження 1. Ребра графа G не обов'язково мають бути прямими відрізками, в загальному випадку вони можуть задаватися гладкою функцією. Виходячи з цього, (i_z, e) в рівнянні буде неперервною функцією від положення точки на ребрі $e \in E$.

Зауваження 2. Площі перерізів труб можуть бути різними. Тоді рівняння (7) для ребер графу залишається незмінним, а рівняння балансу маси набуває нової форми.

$$\sum_{k=1}^{N_1} S_e K(\theta)(\nabla_e h + i_z)|_{n_{(x,y,z)=v}} = \sum_{k=1}^{N_2} S_e K(\theta)(\nabla_e h + i_z)|_{n_{(x,y,z)=v}}, \quad (18)$$

де S_e – площа поперечного перерізу труби, що відповідає ребру $e \in E$.

Зауваження 3. Для доведення теореми про існування слабкого розв'язку використовується процедура Гальоркіна та відповідно базис Гальоркіна для наближення слабкого розв'язку рівняння Річардса-Клюта. Варто відзначити, що у випадку рівняння Річардса-Клюта на графі простори $H^1(G)$ та V_G містять лише неперервні у внутрішніх вершинах графу функції, тому функції з базису Гальоркіна теж є неперервними у точках $v \in V_i$.

Зауваження 4. Серед вказаних умов на джерела є наступне включення $s(\theta(u)) \in L^2((0, T) \times G)$, проте досить часто у прикладних задачах джерела та стоки моделюють за допомогою точкових функцій, таких як дельта-функція, що не належить L^2 . Проте, якщо на ребрі e у певній точці ми хочемо змоделювати точкове джерело чи сток, то ми можемо провести наступну процедуру додавання уявного ребра з уявним потенціалом. Для цього ми розбиваємо ребро e на два ребра e_1 та e_2 , а до нової внутрішньої вершини v під'єднуємо уявне ребро e_{1m} (рис. 3). У випадку джерела ми в якості початкової умови встановлюємо на ребрі e_{1m} значення повного насичення, а замість гравітаційного потенціалу з полем g , що на звичайних ребрах представляється за допомогою доданків з вектором i_z , ми введемо на e_{1m} уявний потенціал з полем g_{1m} , направленим до внутрішньої вершини v , так що під його дією потік маси буде виходити з ребра e_{1m} та розподілятися між ребрами e_1 та e_2 , тобто у ребрі e . Інтенсивність джерела можна контролювати за допомогою параметрів уявного потенціалу.

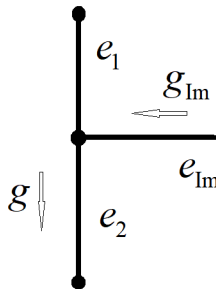


Рис. 3. Додавання ребра для моделювання точкового джерела

Висновки. У статті досліджено рівняння Річардса-Клюта на графі у звичайній та слабкій формах. За допомогою цього рівняння можна ефективніше моделювати процеси масопереносу в системі з'єднаних між собою труб за рахунок представлення труби як ребра графу. Такі системи труб є головними атрибутами іригаційних систем та широко використовуються в аграрному секторі. За умов, аналогічних до тих, що описані в роботі [4], отримано результат стосовно існування слабого розв'язку рівняння Річардса-Клюта на графі, внаслідок чого процедура пошуку розв'язку на графі за допомогою чисельних методів є коректною.

Для подальших досліджень можна виділити питання єдиності та регулярності слабких розв'язків, які можна спробувати довести методами, аналогічними до методів, викладених у [4]. Також можна розглянути випадок, коли місця з'єднання труб у системі є певними колекторами маси та, маючи ненульовий об'єм, також можуть зберігати масу всередині себе. Тим самим, рівня балансу маси для вершин графу повинне тоді включати в себе, окрім потоків з інцидентних ребер, ще й значення коефіцієнту насиченості у самих вершинах.

Список використаних джерел:

1. Srivastava R., Jim Yeh T.-C. Analytical Solutions for One-Dimensional, Transient Infiltration Toward the Water Table in Homogeneous and Layered Soil. *Water Resources Research*. 1991. Vol. 27. № 5. P. 753-762. URL: <https://doi.org/10.1029/90WR02772>.
2. Broadbridge P., Daly E., Goard J. Exact Solutions of the Richards Equation With Nonlinear Plant-Root Extraction. *Water Resources Research*. 2017. Vol. 53. P. 9679-9691. URL: <https://doi.org/10.1002/2017WR021097>.
3. De Luca D. L., Cepeda J. M. Procedure to Obtain Analytical Solutions of One-Dimensional Richards' Equation for Infiltration in Two-Layered Soils. *Journal of Hydrologic Engineering*. 2016. Vol. 21. № 7. URL: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.0001356](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001356).
4. Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z*. 1983. Vol. 183. № 1. P. 311-341. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01176474>.
5. Bertsch M., Hulshof J. Regularity Results for an Elliptic-Parabolic Free Boundary Problem. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1986. Vol. 297. № 1. P. 337-350. URL: <https://doi.org/10.2307/2000472>.
6. Degtyarev S. P. Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem I: Elliptic problem with a parameter. *Ukr. Math. Vystnyk*. 2014. Vol. 11. № 1. P. 15-48.
7. Degtyarev S. P. Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem II: smooth solution. *Ukr. Math. Vystnyk*. 2014. Vol. 11. № 1. P. 447-479.
8. Zha Y., Yang J., Yin L., Zhang Y., Zeng W., Shi L. A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil. *Journal of Hydrology*. 2017. Vol. 551. P. 56-69. DOI: 10.1007/11823285_121.

9. Shahraiyini H. T., Ataie-Ashtiani B. Mathematical Forms and Numerical Schemes for the Solution of Unsaturated Flow Equations. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. 2012. Vol. 138. № 1. P. 63-72. URL: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)IR.1943-4774.0000377](https://doi.org/10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000377)
10. Farthing M. W., Ogden F. L. Numerical Solution of Richards' Equation: A Review of Advances and Challenges. *Soil Science Society of America Journal*. 2017. Vol. 81. № 6. P. 1257-1269. URL: <https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058>
11. Zha Y., Yang J., Zeng J., Tso C.-H. M., Zeng W., Shi L. Review of numerical solution of Richardson-Richards equation for variably saturated flow in soils. *WIREs Water*. 2019. Vol. 6. № 5. URL: <https://doi.org/10.1002/wat2.1364>
12. Колесников В. А. Аналіз побудови чисельних методів для розв'язання рівняння Річардса-Клута. *Ж. Обч. Пр. Мат.* 2023. № 1. С. 28-38. URL: <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2023.1.03>

EXISTENCE THEOREM FOR MASS TRANSFER PROBLEM ON GRAPH

The mass transfer process in a porous medium is described using the Richards-Klute equation. This equation describes mass flows due to the actions of gravity and capillarity and allows modeling the mass transfer process with saturation limit. The Richards-Klute equation is a nonlinear elliptic-parabolic partial differential equation, so the main methods for solving it and modeling the mass transfer process are numerical methods.

The article considers a model of a system of interconnected pipes, inside which the process of mass transfer takes place. Such systems are often found in agriculture and are actively used in the construction of irrigation systems. The article proposes to model pipe system using graphs, where pipes are represented by graph edges, and connection points or free ends of system pipes are represented by graph vertices.

The article contains the definitions of the Richards-Klute equation on a graph in the usual and weak forms. On the edges of the graph, one-dimensional cases of the Richards-Klute equation are considered, while on the vertices either the boundary conditions are given or the equation that models the law of mass conservation is given. The definitions of the solution and weak solution of the Richards-Klute equation on the graph are also given. Also, the theorem of the existence of a weak solution of the Richards-Klute equation on a graph is proved.

To prove the theorem of the existence of a weak solution of the Richards-Klute equation on a graph, the Kirchhoff transformation is used and conditions are given that are analogous to the conditions used in the proof of the existence of a weak solution of the Richards-Klute equation in regular domains in three-dimensional space, and which are defined in the classical work [1], which is devoted to the problems of existence and uniqueness of weak solutions of elliptic-parabolic partial differential equations.

Key words: *mathematical modeling, Richards-Klute equation, graphs, weak solution, existence theorem.*

Отримано: 3.11.2023