УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.101-108

О. І. Радзієвська*, канд. фіз.-мат. наук,
І. Б. Ковальська**, канд. фіз.-мат. наук

* Національний університет харчових технологій, м. Київ,
** Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ПОХІДНОЇ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Встановлення властивостей апроксимаційних характеристик досліджуваних функцій є однією з основних задач теорії наближень. Якщо, виходячи з інформації про поведінку узагальненої похідної деякої функції *f*, можна прогнозувати поведінку послідовності найкращих наближень цієї функції поліномами, то тоді йде мова про постановку і доведення прямих теорем теорії наближень.

Якщо ж досліджуються властивості самої функції $f \in X$ і її узагальнених похідних, спираючись на поведінку послідовності найкращих наближень, тобто, встановлюються диференціально-різницеві характеристики функції f на основі вивчення поведінки послідовності її найкращих наближень, то тоді кажуть про доведення обернених теорем теорії наближень.

Дослідження прямих та обернених теорем починається з робіт 1910-1912 років Бернштейна, Валле Пуссена, Джексона та інших. Вони були продовжені багатьма вченими (Н. І. Ахієзер, М. Г. Крейн, Ж. Фавар, Б. В. Стєчкін, С. М. Нікольський, А. Ф. Тіман, А. Зігмунд, В. К. Дзядик, О. І. Степанець). Ще й досі в теорії наближень залишається багато важливих і не розв'язаних задач, зокрема таких, як поширення прямих та обернених теорем на нові класи функцій та встановлення найкращих значень сталих у відповідних нерівностях. При цьому з'являється можливість формулювати нові задачі, зокрема, задачі математичного моделювання вже для цілих класів функцій, які описують досліджувані процеси.

У статті розглядається обернена теорема – за властивостями послідовності найкращих наближень робиться висновок про властивості самого елемента *f* деякого банахового простору *X* і його узагальнених похідних, а також встановлюються співвідношення між константами Сеге за різними еквівалентними системами елементів банахового простору.

Ключові слова: *найкращі наближення, узагальнені похідні, обернені теореми, константи Сеге, диференціальні характеристики, банахів простір.*

Вступ. Встановлення властивостей апроксимаційних характеристик досліджуваних функцій є однією з основних задач теорії наближень. Якщо, виходячи з інформації про поведінку узагальненої похідної деякої функції f, можна прогнозувати поведінку послідовності $E_n\left(f\right)$ найкращих наближень цієї функції поліномами P_n, то тоді йде мова про постановку і доведення прямих теорем теорії наближень.

Якщо ж досліджуються властивості самої функції $f \in X$ і її узагальнених похідних, спираючись на поведінку послідовності $E_n\left(f\right)$, тобто, встановлюються диференціально-різницеві характеристики функції f на основі вивчення поведінки послідовності її найкращих наближень, то тоді кажуть про доведення обернених теорем теорії наближень.

Дослідження прямих та обернених теорем починається з робіт 1910-1912 років Бернштейна [2], Валле Пуссена, Джексона та інших. Вони були продовжені багатьма вченими (Н. І. Ахієзер, М. Г. Крейн, Ж. Фавар, Б. В. Стєчкін, С. М. Нікольський, А. Ф. Тіман, А. Зігмунд [3], В. К. Дзядик, О. І. Степанець [4, 5]). Ще й досі в теорії наближень залишається багато важливих і не розв'язаних задач, зокрема таких, як поширення прямих та обернених теорем на нові класи функцій та встановлення найкращих значень сталих у відповідних нерівностях. При цьому з'являється можливість формулювати нові задачі, зокрема, задачі математичного моделювання вже для цілих класів функцій, які описують досліджувані процеси.

Постановка задачі. Нехай X – банаховий простір, X^* – спряжений йому простір, $\left\{\varphi_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ – повна мінімальна система функцій в просторі X. Тоді для даної послідовності існує спряжена система $\left\{\varphi_m^*\right\}_{m=1}^{\infty}$, яка належить простору X^*.

Означення. Нехай $\left\{\lambda_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел і для елемента $f \in X$ ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\lambda_m\left(f,\varphi_m^*\right)\varphi_m$ збігається до деякого елемента $g \in X$. Тоді вектор g називається похідною вектора f, яка позначається $g \overset{\text{def}}{=} \partial_{\varphi}^{\lambda} f$, тобто

$$\partial_{\varphi}^{\lambda} f = \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m\left(f,\varphi_m^*\right)\varphi_m \tag{1}$$

Множину всіх векторів, для яких існує ∂_φ^λ – похідна, будемо позначати через $V\left(\partial_\varphi^\lambda\right)$.

Вектор

$$T_n(\varphi)=\sum_{m=1}^{n} c_m\varphi_m, \qquad (2)$$

де c_m – довільні комплексні числа, будемо називати поліномом степеня n за системою $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$. В силу мінімальності системи $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ коефіцієнти c_m в (2) визначаються однозначно за вектором $T_n(\varphi)$. Тобто

$$\left(T_n(\varphi),\varphi_l^*\right)=\left(\sum_{m=1}^{n} c_m\varphi_m,\varphi_l^*\right)=c_l.$$

Величину

$$E_n(f,\varphi_m)=\inf_{T_n(\varphi)}\left\|f-T_n(\varphi)\right\|_X, \ \forall n\in N \qquad (3)$$

будемо називати найкращим наближенням вектора f поліномами степеня не вище n за системою $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$. Крім того будемо вважати $E_0(f,\varphi)=\|f\|_X$. З означення $E_n(f,\varphi_m)$ слідує, що

$$E_n(f,\varphi_m)\ge E_{n+1}(f,\varphi_m), \ n=0, 1, 2, \ldots.$$

Також, в силу повноти системи $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, $E_n(f,\varphi_m)\to 0$ при $n\to\infty$.

Сталі

$$\mu_n\left(\partial_\varphi^\lambda\right) = \sup_{\|T_n(\varphi)\|=1}\left\|\partial_\varphi^\lambda T_n(\varphi)\right\|_X, \ n=1,2,\ldots \qquad (4)$$

будемо називати константами Сеге ∂_φ^λ – похідної (див. [1, 3, 6]). В силу лінійної незалежності векторів φ_m такі сталі існують і

$$\mu_{n+1}\left(\partial_\varphi^\lambda\right) \ge \mu_n\left(\partial_\varphi^\lambda\right) > 0.$$

Використовуючи введені вище позначення, сформулюємо наступне твердження.

Теорема 1. Нехай константи Сеге $\mu_n\left(\partial_\varphi^\lambda\right)$ оператора узагальненого диференціювання і найкращі наближення $E_n(f,\varphi)$ вектора f за системою $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ задовольняють умови

$$\frac{\mu_n\left(\partial_\varphi^\lambda\right)}{\mu_m\left(\partial_\varphi^\lambda\right)} \le C,\ \forall m,n \in N \ \text{ таких, що } 2m \ge n \tag{5}$$

і збігається ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m\left(\partial_\varphi^\lambda\right) E_m\left(f,\varphi\right) < \infty\ . \tag{6}$$

Тоді $f \in V\left(\partial_\varphi^\lambda\right)$ і

$$E_n\left(\partial_\varphi^\lambda f,\varphi\right) \le 8C\left\{\mu_n\left(\partial_\varphi^\lambda\right) E_n\left(f,\varphi\right) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu_m\left(\partial_\varphi^\lambda\right)\frac{1}{m}\ E_m\left(f,\varphi\right).\right. \tag{7}$$

Доведення. Спочатку встановимо, що при заданих умовах теореми існує ∂_φ^λ – похідна для f .

Виберемо для $\forall\varepsilon > 0$ поліноми $T_n\left(\varphi\right),$ для яких

$$\left\| f - T_n\left(\varphi\right)\right\|_X \le \left(1+\varepsilon\right) E_n\left(f,\varphi\right) \tag{8}$$

і покажемо, що послідовність $\partial_\varphi^\lambda T_{n_l}\left(\varphi\right),\ де\ \left\{n_l\right\}_{l=1}^{\infty}$ – деяка зростаюча послідовність натуральних чисел, є фундаментальною. Далі замість $\left\|\cdot\right\|_X$ будемо писати $\left\|\cdot\right\|.$

Нехай s та j – натуральні числа і $s > j$, тоді

$$\partial_\varphi^\lambda T_{n_s}\left(\varphi\right) - \partial_\varphi^\lambda T_{n_j}\left(\varphi\right) = \sum_{l=j}^{s-1} \partial_\varphi^\lambda\left(T_{n_{l+1}}\left(\varphi\right) - T_{n_l}\left(\varphi\right)\right), \tag{9}$$

де $T_{n_{l+1}}\left(\varphi\right) - T_{n_l}\left(\varphi\right)$ – поліном степеня n_{l+1} за системою $\left\{\varphi_m\right\}_{m=1}^{\infty}$.

Із співвідношень (4) і (8) слідує, що

$$\left\|\partial_\varphi^\lambda\left(T_{n_{l+1}}\left(\varphi\right) - T_{n_l}\left(\varphi\right)\right)\right\| \le \mu_{n_{l+1}}\left(\partial_\varphi^\lambda\right)\ \left\|T_{n_{l+1}}\left(\varphi\right) - T_{n_l}\left(\varphi\right)\right\| \le$$

$$\le \mu_{n_{l+1}}\left(\partial_\varphi^\lambda\right)\ f - T_{n_{l+1}}\left(\varphi\right) + \mu_{n_{l+1}}\left(\partial_\varphi^\lambda\right) f - T_{n_l}\left(\varphi\right) \le$$

$$\mu_{n_{l+1}}\left(\partial_\varphi^\lambda\right)\left(1+\varepsilon\right)\left(E_{n_{l+1}}\left(f,\varphi\right) + E_{n_l}\left(f,\varphi\right)\right) \le 2\,\mu_{n_{l+1}}\left(\partial_\varphi^\lambda\right)\left(1+\varepsilon\right) E_{n_l}\left(f,\varphi\right)$$

Підставимо одержану нерівність в (9):

$$\left\|\partial_\varphi^\lambda\left(T_{n_s}\left(\varphi\right) - T_{n_j}\left(\varphi\right)\right)\right\| \le 2\left(1+\varepsilon\right)\sum_{l=j}^{s-1} \mu_{n_{l+1}}\left(\partial_\varphi^\lambda\right)\ E_{n_l}\left(f,\varphi\right) \tag{10}$$

Зі співвідношень (5) і (6) слідує, що для послідовності $n_l = 2^{l-1}n,\ l \in N,$ ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}\mu_{n_{l+1}}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)E_{n_l}\left(f,\varphi\right) \tag{11}$$

збігається.

Отже з нерівності (10) слідує фундаментальність послідовності $\partial_{\varphi}^{\lambda}T_{n_j}(\varphi)$, а це означає, що існує елемент $g\in X$, для якого $\left\|g-\partial_{\varphi}^{\lambda}T_{n_j}(\varphi)\right\|\to 0$ при $j\to\infty$ і який за означенням називається $\partial_{\varphi}^{\lambda}$ – похідною вектора f.

Переходимо в (10) до границі при $s\to\infty$ і отримуємо:

$$\left\|\partial_{\varphi}^{\lambda}f-\partial_{\varphi}^{\lambda}T_{n_j}(\varphi)\right\|\le(1+\varepsilon)\sum_{l=j}^{\infty}\mu_{n_{l+1}}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)E_{n_l}\left(f,\varphi\right). \tag{12}$$

Оскільки $\partial_{\varphi}^{\lambda}T_{n_j}(\varphi)$ – поліном степеня n_j за системою $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$, то

$$E_{n_j}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}f,\varphi\right)\le\left\|\partial_{\varphi}^{\lambda}f-\partial_{\varphi}^{\lambda}T_n(\varphi)\right\|\le(1+\varepsilon)\,2\sum_{l=j}^{\infty}\mu_{n_{l+1}}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)E_{n_l}\left(f,\varphi\right).$$

Враховуючи довільність $l\in N$ і $n_l=2^{l-1}n,$ маємо:

$$E_n\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}f,\varphi\right)\le 2\sum_{l=1}^{\infty}\mu_{2^l n}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)E_{2^{l-1}n}\left(f,\varphi\right). \tag{13}$$

Далі, в силу нерівності (5): $\mu_{2^l n}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)\le 2C\mu_m\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right),\ \ 2^{l-2}n+1\le m,$

З того, що послідовність найкращих наближень незростаюча, маємо:

$$E_{2^{l-1}n}\left(f,\varphi\right)\le E_m\left(f,\varphi\right),\ \ m\le 2^{l-1}n.$$

Крім того $\dfrac{1}{2^{l-2}n}\le\dfrac{2}{m}$, якщо $m\le 2^{l-1}n.$

Враховуючи ці нерівності при $l=2,3,\ldots$, одержуємо

$$\begin{aligned}\mu_{2^l n}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)E_{2^{l-1}n}\left(f,\varphi\right)&=\mu_{2^l n}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)\frac{2^{l-2}n}{2^{l-2}n}E_{2^{l-1}n}\left(f,\varphi\right)\le\\ &\le 4C\sum_{m=2^{l-2}n+1}^{2^{l-1}n}\frac{1}{m}\mu_m\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)E_m\left(f,\varphi\right).\end{aligned} \tag{14}$$

З нерівності (13) слідує, що

$$E_n\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}f,\varphi\right)\le 2\left(\mu_{2^l n}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)E_n\left(f,\varphi\right)+\sum_{l=2}^{\infty}\mu_{2^l n}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)E_{2^{l-1}n}\left(f,\varphi\right)\right).$$

Застосовуючи нерівність (14) і те, що з умови (5) випливає нерівність $\mu_{2n}\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right)\le C\mu_n\left(\partial_{\varphi}^{\lambda}\right),$ отримуємо співвідношення:

$$E_n\left(\partial_\varphi^\lambda f,\varphi\right)\le 2\left(C\mu_n\left(\partial_\varphi^\lambda\right)E_n(f,\varphi)+\sum_{l=2}^{\infty}4C\sum_{m=2^{l-2}n+1}^{2^{l-1}n}\frac{1}{m}\mu_m\left(\partial_\varphi^\lambda\right)E_m(f,\varphi)\right)\le$$

$$\le 8C\left(\mu_n\left(\partial_\varphi^\lambda\right)E_n(f,\varphi)+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m}\mu_m\left(\partial_\varphi^\lambda\right)E_m(f,\varphi)\right).$$

Отже, **теорема доведена**.

Далі розглянемо співвідношення між константами Сеге за різними системами елементів банахового простору. В банаховому просторі X дві системи елементів $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ і $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ називають еквівалентними, якщо знайдеться такий обмежений і обмежено оборотний оператор A, який діє в X, що

$$A\ \varphi_m = \psi_m\ ,\ m\in N \tag{15}$$

Справедливе таке твердження.

Теорема 2. Нехай системи елементів $\{\varphi_m\}$ і $\{\psi_m\}$ еквівалентні. Тоді:

1) якщо одна з систем скінченна, лінійно-незалежна і повна, то і друга система така ж;
2) якщо система $\{\varphi_m\}$ скінченно лінійно-незалежна, тоді константи Сеге операторів узагальненого диференціювання ∂_φ^λ і ∂_ψ^λ за системами $\{\varphi_m\}$ і $\{\psi_m\}$ з оператором A з (15) зв'язані співвідношеннями:

$$\left(\|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\right)^{-1}\mu_n\left(\partial_\psi^\lambda\right)\le\mu_n\left(\partial_\varphi^\lambda\right)\le\|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\ \mu_n\left(\partial_\psi^\lambda\right). \tag{16}$$

Доведення. Перша частина теореми одразу випливає з того, що оператор A обмежений і обмежено-оборотний. Покажемо справедливість співвідношення (16).

Оскільки $\|Af\|\le\|A\|\|f\|$ і $\|f\|=\left\|A^{-1}\cdot A\cdot f\right\|\le\left\|A^{-1}\right\|\|Af\|$, то

$$\left\|A^{-1}\right\|\|Af\|\le\|f\|\le\left\|A^{-1}\right\|\|Af\|. \tag{17}$$

З того, що $A\,T_n(\varphi)\ =\ T_n(\varphi)$ і $A\,\partial_\varphi^\lambda T_n(\varphi)=\partial_\psi^\lambda T_n(\psi)$, використовуючи (17), одержуємо:

$$\left\|A^{-1}\right\|\le\left\|\partial_\varphi^\lambda\ T_n(\varphi)\right\|\le\left\|A^{-1}\right\|\ \left\|\partial_\psi^\lambda T_n(\psi)\right\|. \tag{18}$$

З означення констант Сеге (4) випливає нерівність:

$$\left\|\partial_\psi^\lambda T_n(\psi)\right\|=\mu_n\left(\partial_\psi^\lambda\right)\left\|A\,T_n(\varphi)\right\|\le\mu_n\left(\partial_\psi^\lambda\right)\|A\|\left\|T_n(\varphi)\right\|. \tag{19}$$

Отже, враховуючи (4), (18) і (19), отримуємо нерівність (16).

Теорема доведена.

Висновок. У статті доведено обернену теорему – за властивостями послідовності найкращих наближень $E_n(f,\varphi)$ робиться висновок про властивості самого елемента f деякого банахового простору X і його узагальнених похідних, а також встановлюються співвідношення між константами Сеге за різними еквівалентними системами елементів цього банахового простору.

Список використаних джерел:

1. Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных. *Изд-во АН СССР. Серия матем.* 1981. Т. 45. С. 3-22.
2. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. *Соч.* Москва: Изд- во АН СССР, 1952. № 1. С. 11-104.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Москва: Мир, 1965. Т. 1.
4. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
5. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. II. 468 с.
6. Szego G. Uber einen satz des Hern Serge Bernstein. *Schrift. Konigsberg. Gelehrten Gesellschaft*. 1928. Vol. 5. №4. P. 59-70.

THE INVERSE THEOREM FOR THE GENERALIZED DERIVATIVE IN BANACH SPACES

Establishing the properties of the approximation characteristics of the studied functions is one of the main tasks of the theory of approximations. If, based on information about the behavior of the generalized derivative of some function *f*, it is possible to predict the behavior of the sequence of the best approximations of this function by polynomials, then we are talking about stating and proving direct theorems of the theory of approximations.

If the properties of the function $f \in X$ itself and its generalized derivatives are studied, relying on the behavior of the sequence best approximations, i.e., the differential-difference characteristics of the function *f* are established based on the study of the behavior of the sequence of its best approximations, then we speak of the proof of inverse theorems of approximation theory.

The study of direct and inverse theorems begins with the works of Bernstein, Valle Poussin, Jackson and others in 1910-1912. They were continued by many scientists (N. I. Ahiezer, M. G. Crane, J. Favar, B. V. Stechkin, S. M. Nikolskyi, A. F. Timan, A. Zygmund, V. K. Dzyadyk, O. I. Stepanets). There are still many important and unsolved problems in the theory of approximations, in particular, such as extending direct and inverse theorems to new classes of functions and establishing the best values of constants in the corresponding inequalities. At the same time, it becomes possible to formulate new problems, in particular, problems of mathematical modeling already for whole classes of functions, that describe the studied processes.

This article considers the inverse theorem – based on the properties of the sequence of best approximations, a conclusion is made about the properties of the element *f* of some Banach space *X* and its generalized derivatives. As well as the relations between Szego constants for different equivalent systems of elements of the Banach space are established.

Keywords: *the best approximations, generalized derivatives, inverse theorems, Szego constants, differential characteristics, Banach space.*

Отримано: 14.11.2023

УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2023-24.108-118

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗНАЧЕННЯ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Екстремальні задачі та їх практичні застосування знаходилися під пильною увагою математиків з давніх часів. Важливий крок в розвиток екстремальних задач зробив П. Л. Чебишев, який ще у 50-х роках XIX століття заклав основи розділу конструктивної теорії функцій – теорії наближення.

Суттєву роль у формуванні теорії наближення функцій відіграла теорема Карла Вейєрштрасса про збіжність до нуля послідовності найкращих наближень многочленами неперервної функції. Як відомо, теорема Вейєрштрасса є неконструктивною – вона не містить оцінок швидкості наближення. Завдяки роботам Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, Валле-Пуссена та ін. такі оцінки стали з'являтися в роботах по теорії наближення.

При цьому на перших етапах розвитку теорії наближення проводилось вивчення наближень окремих функцій. Початок нового періоду, більш глибокого дослідження величин відхилень функцій від їх наближаючих многочленів, відноситься до 30-40-х років XX століття і пов'язаний з іменами А. М. Колмогорова, С. М. Нікольського, Ж. Фавара, Н. І. Ахієзера, М. Г. Крейна, Б. Надя. Завдяки їхнім працям основний акцент в теорії наближень зміщується в бік вивчення найкращих наближень чи інших апроксимаційних характеристик для класів функцій, які мають певні диференціально-різницеві чи гладкісні властивості. Зокрема, у 1936 році Ж. Фавар обчислив точні значення найкращих рівномірних наближень тригонометричними многочленами порядку не вищого $n-1$ на класах диференційовних 2π-періодичних функцій, r-ті (r – натуральне) по-