ral numbers is related to the structure of elements of the vector of first terms. An algorithm for finding prime numbers on segments of large dimensions with a parallel calculation process has been built. The proposed algorithm is binary to algorithms for sifting subsequences of natural numbers by prime divisors. In these algorithms, it is not possible to parallelize the calculation process, since screening procedure requires storing the numerical information from the preceding steps (vector model of array processing).

The binary algorithm calculates compound numbers in each pair of arithmetic progressions with symmetric first terms simultaneously, using only vector of the first terms of arithmetic progressions, which makes possible processing of large-dimensional arrays.

Key words: *matrix model, multiplicative basis, sparse matrix, connectivity, smallest compound numbers.*

Отримано: 26.06.2024

УДК 517.95:519.63
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.19-26

К. В. Василишин

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО НЕЛІНІЙНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Задача про теплопровідність об'єктів у нелінійних середовищах зводиться до розв'язання крайових задач для нелінійного рівняння теплопровідності, де коефіцієнти рівняння або функція потужності теплових джерел залежать від температури за деяким законом. Серед чисельних методів розв'язання задач для нелінійних рівнянь математичної фізики можна виділити методи скінченних різниць, скінченних елементів, варіаційні та проекційні, а також ітераційні методи. Серед останньої групи методів найбільш привабливим є метод двобічних наближень завдяки можливості отримати зручну оцінку для похибки наближеного розв'язку і довести існування розв'язку вихідної задачі.

Теорія лінійних напівупорядкованих просторів була побудована Л. В. Канторовичем у другій половині 30-х років XX ст. Подальший розвиток цієї теорії пов'язаний з роботами М. А. Красносельського, H. Amann'a, В. І. Опойцева, Н. С. Курпеля, Б. А. Шувара, А.І. Колосова та інших.

Метою статті є розробка методу двобічних наближень на основі використання функцій Гріна для розв'язання першої крайової задачі для нелінійного одновимірного рівняння теплопровідності і дослідження його роботи при розв'язанні тестових задач. Для досягнення поставленої мети була проведена заміна невідомої функції і крайова задача зведена до інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке розглянуто як нелінійне операторне рівняння у напівупорядкованому банаховому просторі. Отримано умови існування єдиного додатного розв'язку задачі та умови двобічної збіжності до нього послідовних наближень. Розроблений метод програмно реалізовано та досліджено при розв'язанні тестових задач. Результати обчислювального експерименту проілюстровано графічною та табличною інформаціями.

Ключові слова: *нелінійна теплопровідність, нелінійна крайова задача, додатний розв'язок, функція Гріна, двобічний ітераційний метод, рівняння з ізотонним оператором, математичне моделювання.*

Вступ. Дослідження різних прикладних задач, в яких фігурують фізичні та хімічні об'єкти та процеси потребують використання методів математичного моделювання та апарату обчислювальної математики. Під час дослідження нелінійних стаціонарних процесів за допомогою математичного моделювання виникає необхідність розробки ефективних чисельних методів розв'язання початкових, крайових та початково-крайових задач для квазілінійних диференціальних рівнянь з коефіцієнтом, нелінійно залежним від температури [1-4]. В наш час існує багато методів чисельного аналізу такого типу задач. Серед них можна виділити, зокрема, методи теорії подібності, методи скінченних різниць, скінченних елементів, граничних інтегральних рівнянь [1, 5-8] або послідовних наближень з двобічним характером збіжності [9, 10]. Методи двобічних наближень надають можливість будувати дві послідовності функцій, які відповідно знизу та зверху апроксимують шуканий розв'язок задачі. Завдяки цьому при реалізації цих методів ми матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки наближень, а отже, і зручний критерій закінчення ітерацій. Це виділяє метод двобічних наближень як найбільш привабливий порівняно з іншими методами, які застосовуються для розв'язання крайових задач для стаціонарних рівнянь. Теоретичним підґрунтям методів двобічних наближень є теорія лінійних напівупорядкованих просторів, що була побудована Л. В. Канторовичем у другій половині 30-х років XX століття [11]. Подальший розвиток цієї теорії пов'язаний з роботами М. А. Красносельського [12], H. Amann'a [13], В. І. Опойцева [14], Н. С. Курпеля, Б. А. Шувара [15], А. І. Колосова [16] та інших.

1. Постановка задачі. Розглядатимемо задачу знаходження додатного розв'язку нелінійної крайової задачі вигляду

$$-\frac{d}{dx}\left(e^{\delta u}\frac{du}{dx}\right)=\lambda e^{\gamma u},\ 0<x<l, \tag{1}$$

$$u(0)=u(l)=0. \tag{2}$$

Задача (1), (2) є математичною моделлю процесу теплопровідності у випадку, коли коефіцієнт теплопровідності експоненціально залежить від температури і коли на $(0,l)$ наявні джерела тепловиділення розподілені за експоненціальним законом $f(u)=\lambda e^{\gamma u}$ (параметр λ характеризує їх потужність).

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [16-19].

2. Метод розв'язання. У задачі (1), (2) зробимо заміну $u=\frac{1}{\delta}\ln v$, де $v=v(x)$ – нова невідома функція. Тоді для функції v отримаємо крайову задачу

$$-\frac{d^2v}{dx^2}=\delta\lambda v^{\frac{\gamma}{\delta}},\ 0<x<l, \tag{3}$$

$$v(0)=v(l)=1. \tag{4}$$

Крайові умови (4) не є однорідними, тому робимо заміну $v=1+\theta$, де $\theta=\theta(x)$ – нова невідома функція, і отримуємо крайову задачу

$$-\frac{d^2\theta}{dx^2}=\delta\lambda(1+\theta)^{\frac{\gamma}{\delta}},\ 0<x<l,$$

$$\theta(0)=\theta(l)=0,$$

або (після перепозначення параметрів $\sigma=\frac{\gamma}{\delta}>0$ і $\mu=\delta\lambda=\frac{\gamma\lambda}{\sigma}>0$) отримуємо крайову задачу

$$-\frac{d^2\theta}{dx^2}=\mu(1+\theta)^{\sigma},\ 0<x<l, \tag{5}$$

$$\theta(0)=\theta(l)=0, \tag{6}$$

Для розв'язання задачі (5), (6) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [10, 17-19].

Задача (5), (6) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$\theta(x)=\mu\int_0^l G(x,s)(1+\theta(s))^{\sigma}\,ds, \tag{7}$$

де $G(x,s)=\frac{1}{l}\begin{cases}x(l-s), & 0\le x\le s,\\ s(l-x), & s\le x\le l,\end{cases}$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ на відрізку $[0,l]$.

Узагальненим розв'язком задачі (5), (6) назвемо функцію $\theta^* \in C[0,l]$, яка є розв'язком рівняння (7). Тоді розв'язком (узагальненим) вихідної задачі (1), (2) вважатимемо функцію $u^* = \dfrac{1}{\delta}\ln(1+\theta^*)$.

Оператор T, що визначається правою частиною інтегрального рівняння (7), діє у просторі $C[0,l]$ за правилом

$$T(\theta)(x) = \mu\int_0^l G(x,s)(1+\theta(s))^\sigma ds$$

і є цілком неперервним ізотонним оператором.

У конусі $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій з $C[0,l]$ виділимо інваріантний для оператора T конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ умовами

$$\mu\int_0^l G(x,s)(1+v_0(s))^\sigma ds \ge v_0(x) \text{ для всіх } x\in[0,l],$$

$$\mu\int_0^l G(x,s)(1+w_0(s))^\sigma ds \le w_0(x) \text{ для всіх } x\in[0,l].$$

Інваріантність конусного відрізка $< v_0, w_0 >$ означає, що

$$T(< v_0, w_0 >) \subset < v_0, w_0 >.$$

Позначимо $F(\theta) = \mu(1+\theta)^\sigma$. Оскільки $F(0) = \mu > 0$, то зазначений інваріантний конусний відрізок можна шукати у вигляді $< v_0, w_0 >= \\ =< 0, \beta >$. Тоді нерівності, що його визначають, набувають вигляду

$$\mu\int_0^l G(x,s)ds \ge 0 \text{ для всіх } x\in[0,l],$$

$$\mu(1+\beta)^\sigma \int_0^l G(x,s)ds \le \beta \text{ для всіх } x\in[0,l].$$

Перша з цих нерівностей завжди виконується, а другу можна записати у вигляді

$$M\mu(1+\beta)^\sigma \le \beta, \tag{8}$$

де $M = \max\limits_{x\in[0,l]}\int_0^l G(x,s)ds = \dfrac{l^2}{8}$.

Оскільки величина $\max\limits_{x\in[0,l]}(w^0(x) - v^0(x)) = \beta$ має бути якомога меншою для більш швидкої збіжності ітерацій, то при практичній реалізації ітераційного процесу слід взяти найменше β, що задовольняє нерівність (8), тобто найменший корінь рівняння

$$M\mu(1+\beta)^{\sigma} = \beta .$$

Сформуємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(x) = \mu\int_0^l G(x,s)(1+v^{(k)}(s))^{\sigma}\,ds\,,\ k=0,1,2,\dots, \tag{9}$$

$$w^{(k+1)}(x) = \mu\int_0^l G(x,s)(1+w^{(k)}(s))^{\sigma}\,ds\,,\ k=0,1,2,\dots, \tag{10}$$

$$v^{(0)}(x)=0\,,\ w^{(0)}(x)=\beta . \tag{11}$$

Збіжність послідовних наближень, що формуються за схемою (9)-(11), до єдиної на інваріантному конусному відрізку $<0,\beta>$ нерухомої точки оператора T гарантує виконання для всіх $\tau\in(0,1)$ умови u_0-увігнутості [2] $F(\tau\theta) > \tau F(\theta)$, яка у нашому випадку набуває вигляду

$$(1+\tau w)^{\sigma} > \tau(1+w)^{\sigma} .$$

Отже, за виконання перелічених умов справедлива така теорема.

Теорема. *Нехай* $<0,\beta>$ *– інваріантний конусний відрізок для ізотонного оператора* T *і виконано умову* u_0*-увігнутості. Тоді ітераційний процес (9)-(11) збігається у нормі простору* $C[0,l]$ *до єдиного на* $<0,\beta>$ *неперервного додатного розв'язку* θ^* *крайової задачі (5), (6), причому виконується ланцюг нерівностей*

$$0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \dots \le v^{(k)} \le \dots \le \theta^* \le \dots \le w^{(k)} \le \dots \le w^{(1)} \le w^{(0)} = \beta . \tag{12}$$

Нерівності (12) характеризують ітераційний процес (9)-(11) як метод двобічних наближень. Перевагою цього методу є те, що на кожній k-й ітерації для наближеного розв'язку $\theta^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(x)+v^{(k)}(x))$ матимемо зручну апостеріорну оцінку похибки:

$$\left\| u^* - \theta^{(k)} \right\| \le \frac{1}{2}\left\| w^{(k)} - v^{(k)} \right\| = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,l]}(w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) .$$

Тоді, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітерації слід проводити до виконання нерівності $\max\limits_{x\in[0,l]}(w^{(k)}(x)-v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$ і з точністю ε можна вважати, що $\theta^*(x)\approx\theta^{(k)}(x)$, а отже, $u^*(x)\approx\ln(1+\theta^{(k)}(x))$.

3. Обчислювальний експеримент. Проведемо обчислювальний експеримент для задачі (5), (6), у якій покладемо $\lambda=1$, $\delta=2$ і $\gamma=1$. Умови збіжності методу двобічних наближень перевіряються безпосередньо. Отримано, що $\beta = 0,2651$. Запустимо ітераційний процес вигляду (9)-(11) і задамо точність $\varepsilon = 10^{-6}$.

Ітераційний процес збігся із заданою точністю до розв'язку вихідної задачі за 4 ітерації. Результати ітерацій наведено на рис. 1 і у табл. 1 та 2.

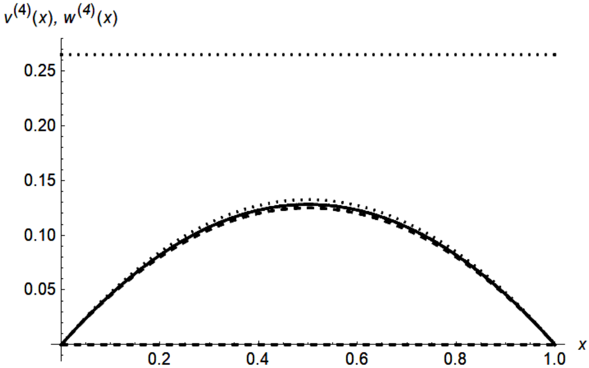

Рис. 1. *Графіки* $v^{(k)}(x)$ *і* $w^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Таблиця 1

Значення наближеного розв'язку $u^{(4)}(x)$

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$u^{(4)}(x)$	0,000000	0,046009	0,081907	0,107608	0,123052	0,128204
x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$u^{(4)}(x)$	0,123052	0,107608	0,081907	0,046009	0,0000	

Таблиця 2

Значення наближеного розв'язку $T^{(4)}(x)$

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$T^{(4)}(x)$	0,000000	0,044982	0,078725	0,102203	0,116050	0,120627
x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$T^{(4)}(x)$	0,116050	0,102203	0,078725	0,044982	0,000000	

Висновки. У роботі вперше запропоновано чисельний метод отримання додатного розв'язку першої крайової задачі для одновимірного рівняння теплопровідності з експоненціально нелінійним коефіцієнтом теплопровідності за допомогою методу двобічних наближень на основі використання функції Гріна. За допомогою цього методу можна проводити математичне моделювання різних процесів, пов'язаних з будівництвом, медициною, фізикою, біологією тощо.

Список використаних джерел:

1. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum Press, 1992.
2. Samarskii A. A., Mikhailov A. P. Principles of Mathematical Modelling: Ideas, Methods, Examples. London: CRC Press, 2001.
3. Frank-Kamenetskii D. A. Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics. Princeton: Princeton University Press, 1955.
4. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations. Berlin; New York: Walter de Gruyte, 1995.
5. Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes. New York: CRC Press, 2001.
6. Kudryashov N. A., Khlunov A. V., Chmykhov M. A. Thermal regimes of high burn-up nuclear fuel rod. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2010. Vol. 15, no. 5 P. 1240-1252.
7. Chen G., Zhou J., Ni W.-M. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear ellip-tic equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2000. Vol. 10, no. 7. P. 1565-1612.
8. Kumar M., Mishra G. An introduction to numerical methods for the solutions of partial differential equations. *Applied Mathematics.* 2011. Vol. 2, no. 11. P. 1327-1338.
9. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications.* 2018. Vol. 10, no. 2. P. 360-375.
10. Sidorov M. V. Method of two-sided approximations of the solution of the first boundary value problem for nonlinear ordinary differential equations based on the Green's function use. *Radio Electronics, Computer Science, Control.* 2019. no. 1 (48). P. 57-66.
11. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional Analysis. New York: Pergamon, 1982.
12. Krasnosel'skii M. A. Positive Solutions of Operator Equations. Groningen: Noordhoff, 1964.
13. Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. *SIAM Review.* 1976. Vol. 18, no. 4. P. 620-709.
14. Opojtsev V. I. A generalization of the theory of monotone and concave operators. *Transactions of the Moscow Mathematical Society.* 1979. Vol. 36. P. 243-279.
15. Shuvar B. A., Kopach M. I. Two-sided operator inequalities with nonmonotone operators. *Differential Equations.* 2006. Vol. 42. P. 586-590.
16. Kolosov A. I. A boundary value problem on a nonfixed interval. *Siberian Mathematical Journal*. 1976. Vol. 17, no. 6. P. 944-948.
17. Ламтюгова С. М., Поляков А. О., Сидоров М. В. Конструктивнее дослідження методами двосторонніх наближень крайових задач для напівлінійних еліптичних рівнянь другого порядку. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* 2023. № 1. С. 142-148.
18. Gybkina N. V., Lamtyugova S. M., Sidorov M. V. Two-sided approximations method based on the Green's functions use for construction of a positive solution of the Dirichlet problem for a semilinear elliptic equation. *Радіоелектроніка, інформатика, управління.* 2021. № 3 (58). С. 26-41.
19. Gybkina N., Sidorov M., Vasylyshyn K. Application of two-sided approximations method to solution of first boundary value problem for one-dimensional

nonlinear heat conductivity equation. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2021. № 4. С. 115-127.

APPLICATION OF THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS TO SOLVING THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR HEAT CONDUCTION EQUATION

The problem of heat conduction in nonlinear media reduces to solving boundary value problems for nonlinear heat conduction equations, where the coefficients of the equation or the function of the power of heat sources depend on temperature according to some law. Among the numerical methods for solving problems for nonlinear equations of mathematical physics, one can distinguish finite difference methods, finite element methods, variational and projection methods, as well as iterative methods. Among the latter group, the two-sided approximation method is particularly attractive due to its ability to provide a convenient estimate for the error of the approximate solution and to prove the existence of a solution to the original problem.

The theory of linear partially ordered spaces was developed by L. V. Kantorovich in the second half of the 1930s. Further development of this theory is associated with the works of M. A. Krasnosel'skii, H. Amann, V. I. Opojtsev, N. S. Kurpel, B. A. Shuvar, A. I. Kolosov etc.

The aim of this article is to develop a two-sided approximation method based on the use of Green's functions for solving the first boundary value problem for a one-dimensional nonlinear heat conduction equation and to investigate its performance when solving test problems. To achieve this goal, the unknown function was replaced, and the boundary value problem was reduced to a Hammerstein integral equation, which was considered as a nonlinear operator equation in a partially ordered Banach space. Conditions for the existence of a unique positive solution to the problem and conditions for two-sided convergence of successive approximations to it were obtained. The developed method was implemented in software and tested on solving test problems. The results of the computational experiment are illustrated with graphical and tabular information.

Key words: *nonlinear heat conduction, nonlinear boundary value problem, positive solution, Green's function, two-sided iterative method, equation with isotone operator, mathematical modeling.*

Отримано: 01.09.2024