УДК 517.927
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.27-36

**К. Г. Геселева,** канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

# ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛОКАЦІЙНОГО ТА КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДІВ РОЗВ′ЯЗУВАННЯ ОДНОГО ТИПУ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Математичними моделями багатьох задач природознавства й техніки є різні типи диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних, диференціально-функціональних, інтегро-функціональних рівнянь та їхніх систем. При дослідженні математичних моделей широко використовуються якісні й аналітичні методи теорії диференціальних рівнянь і методи обчислювальної математики. Серед великої кількості наближених методів, що мають широку область застосування при розв'язуванні різних прикладних задач, спостерігається спільний недолік, характерна риса якого степенева збіжність та обчислювальна нестійкість. Крім того, знаходження достатньо точних наближень за допомогою проекційних методів часто пов'язане з необхідністю розв'язувати системи рівнянь високих порядків, що виявляється достатньо важкою задачею. Прагнення спростити громіздкі обчислювальні схеми приводить до розвитку та дедалі ширшого застосування методу колокації та колокаційно-ітеративного методу.

Інтегро-функціональні рівняння досить широко застосовуються в різних областях науки, зокрема, до таких рівнянь зводяться рівняння з відхиленням аргументу як нейтрального типу так із запізненням.

У статті розглядається один тип інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. Детально описаний процес перетворення такого рівняння до рівняння значно простішої структури. Показано, що при виконанні певних умов початкове та отримане після спрощення рівняння рівносильні. Сформульовано теорему існування розв'язку вище зазначеного рівняння, описані ідеї застосування колокаційного та колокаційно-ітеративного методів до одного типу інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю.

**Ключові слова:** *один тип інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю, рівняння Фредгольма другого роду, інтегральне рівняння з малою нелінійністю, функціональне рівняння, цілком неперервний оператор, обернений оператор, наближений розв'язок, колокаційний та колокаційно-ітеративний методи.*

**Вступ.** При дослідженні різних типів задач теоретичного і прикладного характеру широке застосування мають диференціальні, інтегральні та інтегро-функціональні рівняння [3, 4, 6]. Оскільки побудова точних розв'язків таких рівнянь можлива лише в окремих випадках, то великого значення набувають методи побудови наближених розв'язків цих рівнянь. Одними з таких методів є колокаційний метод та одне з його можливих узагальнень, – колокаційно-ітеративний метод [1, 2, 5].

У цій статті розглядаються питання можливості застосування згаданих методів до одного типу лінійного інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю.

**Основна частина.** Розглянемо один тип інтегро-функціонального рівняння з малою нелінійністю. Рівняння дещо простішої структури автор розглядав у [1, 3, 4]. Побудуємо наближені розв'язки такого рівняння за допомогою колокаційного та колокаційно-ітеративного методів.

**Перетворення інтегро-функціонального рівняння з малою нелінійністю.** У просторі $L_2[a,b]$ – дійсних і вимірних на проміжку $[a,b]$ функцій, сумовних з квадратом, розглянемо інтегро-функціональне рівняння вигляду

$$y(x)-p(x)y\big(h(x)\big)=f(x)+\int_a^b H_1(x,t)y(t)dt+\int_a^b H_2(x,t)y\big(h(t)\big)dt+ \tag{1}$$
$$+\varepsilon\int_a^b G(x,t)F\big(t,y(t)\big)dt,\ x\in[a,b],$$

$$y(x)=\psi(x),\ x\notin[a,b], \tag{2}$$

де $f(x),\psi(x)$ – задані відповідно на $[a,b]$ та за його межами відомі функції, а $y(x)$ – шукана функція з $L_2[a,b]$. Відносно функцій $h(x)$, $p(x)$, $H_1(x,t), H_2(x,t), G(x,t)$ припускаємо, що вони, відповідно, на проміжку $[a,b]$ і в квадраті $[a,b]^2=[a,b]\times[a,b]$ задовольняють умови:

$$\left|p(x)\right|\le\bar{p}<\infty, \tag{3}$$

$h(x)$ – диференційовна на $[a,b]$ і

$$h'(x)\ge l>0,\ x-h(x)\ge\sigma>0, \tag{4}$$

$$\int_a^b\int_a^b H_i^2(x,t)dxdt=H_i^2<\infty,\ i=1,2, \tag{5}$$

$$\int_a^b\int_a^b G^2(x,t)dxdt=G^2<\infty. \tag{6}$$

Функція $F(t,y)$ в області $D=\{a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$ вимірна за $t$ при всіх $y$ і неперервна за $y$ при всіх $t$ (умова Каратеодорі) і задовольняє умову Ліпшиця

$$\left|F(t,y)\right| \le \alpha(t) + \beta|y|,$$

$$\left|F(t,y) - F(t,\bar{y})\right| \le L|y-\bar{y}|, \tag{7}$$

де $\beta, L$ – деякі додатні сталі, $\alpha(t) \in L_2[a,b]$.

Покажемо, що рівняння (1) при виконанні умов (3)-(7) можна звести до інтегрального рівняння з малою нелінійністю [2, 3, 5]. Для цього необхідно виконати ряд перетворень.

Для початку, перепишемо другий інтеграл правої частини рівняння (1) з урахуванням умови (2) так:

$$\int_a^b H_2(x,t)\, y(h(t))\, dt = \int_a^{h^{-1}(a)} H_2(x,t)\, y(h(t))\, dt + \int_{h^{-1}(a)}^{b} H_2(x,t)\, y(h(t))\, dt =$$

$$= \int_a^{h^{-1}(a)} H_2(x,t)\, \psi(h(t))\, dt + \int_{h^{-1}(a)}^{b} H_2(x,t)\, y(h(t))\, dt =$$

$$= \varphi(x) + \int_{h^{-1}(a)}^{b} H_2(x,t)\, y(h(t))\, dt,$$

де $\varphi(x) = \int_a^{h^{-1}(a)} H_2(x,t)\, \psi(h(t))\, dt$ – відома функція.

У силу умови (4) неперервна функція $s = h(t)$ буде зростаючою і для неї існуватиме обернена функція $t = h^{-1}(s),\ dt = \dfrac{ds}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}$. Но-

вими межами інтегрування будуть значення $a, h(b)$. Тоді останній інтеграл набере вигляду

$$\int_{h^{-1}(a)}^{b} H_2(x,t)\, y(h(t))\, dt = \int_a^{h(b)} \frac{H_2\left(x, h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)} y(s)\, ds = \int_a^b \tilde{H}(x,s)\, y(s)\, ds,$$

$$\tilde{H}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{H_2\left(x, h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}, & s \in [a, h(b)], \\ 0, & s \in (h(b), b],\ x \in [a,b]. \end{cases} \tag{8}$$

Слід відмітити, що оператор $\tilde{H}$, який визначається рівністю

$$\left(\tilde{H}v\right)(x)=\int_a^b \tilde{H}(x,t)v(t)dt,\ \forall v(x)\in L_2[a,b], \tag{9}$$

з урахуванням умов (4)-(5) буде Фредгольмовим.

Дійсно,

$$\int_a^b\int_a^b \tilde{H}^2(x,s)\,dxds=\int_a^b\int_a^b \frac{H_2{}^2\left(x,h^{-1}(s)\right)}{\left(h'\left(h^{-1}(s)\right)\right)^2}dxds\le\int_a^b\int_a^b \frac{H_2{}^2\left(x,h^{-1}(s)\right)}{h^2}dxds=$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_a^b\int_a^b H_2{}^2\left(x,h^{-1}(s)\right)dxds\le\frac{H_2{}^2}{h^2}<\infty.$$

З урахуванням приведених міркувань рівняння (1) з умовою (2) запишеться таким чином

$$y(x)-p(x)y(h(t))=f(x)+\int_a^b H_1(x,t)\,y(t)\,dt+$$

$$+\varphi(x)+\int_a^b \tilde{H}(x,s)\,y(s)\,ds+\varepsilon\int_a^b G(x,t)\,F\left(t,y(t)\right)dt,$$

або так

$$y(x)-p(x)y(h(t))=f_1(x)+\int_a^b T(x,t)y(t)dt+\varepsilon\int_a^b G(x,t)F\left(t,y(t)\right)dt, \tag{10}$$

де

$$f_1(x)=f(x)+\varphi(t)=f(t)+\int_a^{h^{-1}(a)} H_2(x,t)\psi\left(h(t)\right)dt, \tag{11}$$

$$T(x,t)=H_1(x,t)+\tilde{H}(x,t),\ (x,t)\in[a,b]^2. \tag{12}$$

Розглянемо інтегральний цілком неперервний оператор $H_1$, який має вигляд

$$\left(H_1v\right)(x)=\int_a^b H_1(x,t)v(t)\,dt,\ \forall v(x)\in L_2[a,b],$$

і оператор $S$ такий, що

$$(Sv)(x)=\begin{cases} v(x),\ x\in\left[a,h^{-1}(a)\right],\\ v(x)-p(x)v\left(h(x)\right),\ x\in\left[h^{-1}(a),b\right],\end{cases} \tag{13}$$

де $v(x)$ – довільна функція з $L_2[a,b]$.

Зазначимо, що цей оператор, як і оператор $H_1$, діє з $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Легко показати, що оператор $S$ лінійний. Умови (3), (4) гарантують його обмеженість. Дійсно,

$$S = sup\frac{(Sv)(x)}{v(x)} \le 1 + \left|\frac{p^2(x)}{h^{'}(x)}\right|^{1/2} \le 1 + \frac{\overline{p}}{\sqrt{l}} < \infty,$$

де $sup$ береться по $v(x) \in L_2[a,b]$, $v(x) \ne 0$.

Ці ж умови говорять про те, що оператор $S$ оборотний. Обернений до нього оператор має вигляд

$$\left(S^{-1}v\right)(x) = \begin{cases} v(x),\ x \in \left[a, h^{-1}(a)\right], \\ v(x) + \sum\limits_{i=1}^{S} v(h^i(x)\prod\limits_{k=0}^{i-1} p\left(h^k(x)\right), \end{cases} \tag{14}$$

$$x \in \Delta s,\ s = \overline{1,m}.$$

Тут, як і надалі,

$$\Delta s = \left[c_{s-1}, c_s\right],\ c_0 = a,\ c_s = h^{-1}(c_{s-1}),\ c_m = b,\ h^k(x) = h\left(h^{k-1}(x)\right),\ s = \overline{1,m}.$$

Іншими словами, вираз (14) – це розв'язок функціонального рівняння

$$y(x) - p(x)y(h(x)) = u(x),\ x \in [a,b], \tag{15}$$

$$y(x) = \psi(x),\ x \notin [a,b],$$

(де $u(x)$ – відома, $y(x)$ – шукана функції) який будується за допомогою методу кроків. Умова (3) гарантує той факт, що кількість кроків $m$ скінченна і $m \le \dfrac{b-a}{\sigma}$.

Неважко переконатись в тому, що оператор $S^{-1}$, так як і оператор $S$, лінійний і обмежений. Таким чином, враховуючи вище сказане, ми можемо розглядати рівняння (1) як операторне рівняння

$$(Sy)(x) = f(x) + (Ty)(x) + (Fy)(x), \tag{16}$$

де $f(x)$ – задана, $y(x)$ – шукана функції з $L_2[a,b]$.

Нехай $(Sy)(x) = u(x)$, тоді $y(x) = (S^{-1}u)(x)$ і ми від рівняння (13) переходимо до рівняння

$$u(x) = f(x) + \left(\tilde{T}u\right)(x) + \varepsilon(\Phi u)(x). \tag{17}$$

Зауважимо, що $\Phi(t,u(t)) = F(t,(S^{-1}u)(t))$, а оператор $\tilde{T} = TS^{-1} = H_1S^{-1} + \tilde{H}S^{-1}$ Фредгольмів як суперпозиція Фредгольмового і лінйного обмеженого операторів [2]. Іншими словами, застосувавши згадану вище заміну, ми перетворюємо інтегро-функціональне рівняння (1) в інтегральне рівняння з малою нелінійністю

$$u(x) = f(x) + \int_a^b \tilde{T}(x,t)u(t)\,dt + \varepsilon(\Phi u)(x). \tag{18}$$

з цілком неперервним інтегральним оператором $\tilde{T}$, ядро якого

$$\tilde{T}(x,t) = \begin{cases} T(x,t) + \sum\limits_{i=1}^{m-s} T\left(x, \left(h^{-1}\right)^k (t)\right),\ t \in \Delta s, \\ T(x,t),\ t \in (c_{m-1}, b),\ s = \overline{1, m-1},\ x \in (a,b), \end{cases}$$

де $\left(h^{-1}\right)^k (t) = h^{-1}\left(\left(h^{-1}\right)^{k-1}(t)\right)$.

Справедлива теорема.

**Теорема 1.** *Рівняння (1) з умовою (2) при виконанні умов (3)-(7) є рівносильним інтегральному рівнянню з малою нелінійнісю (18) з цілком неперервним оператором* $\tilde{T}$.

**Метод колокації.** Ідея методу колокації стосовно рівняння (1) полягає в тому, що наближений розв'язок $y_m(x)$ шукаємо у вигляді

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \varphi_j(x)$$

і визначаємо з функціонального рівняння

$$\begin{gathered} y_m(x) - p(x) y_m(h(x)) = f(x) + \int_a^b H_1(x,t) y_m(t)\,dt + \\ + \int_a^b H_2(x,t) y_m(h(t))\,dt + \varepsilon \int_a^b G(x,t) F(t, y_m(t))\,dt,\ x \in [a,b], \\ y_m(x) = \psi(x),\ x \notin [a,b], \end{gathered} \tag{19}$$

де $\{\varphi_j(x)\}$ – система лінійно незалежних на $[a,b]$ функцій, $j = \overline{1,m}$, а невідомі параметри $a_j = a_j(n)$ знаходимо з умови

$$\gamma_m(x_i) = 0,\ i = \overline{0,n}, \tag{20}$$

$$\begin{gathered} \gamma_m(x) = y_m(x) - p(x) y_m(h(x)) - f(x) - \int_a^b H_1(x,t) y_m(t)\,dt - \\ - \int_a^b H_2(x,t) y_m(h(t))\,dt - \varepsilon \int_a^b G(x,t) F(t, y_m(t))\,dt. \end{gathered} \tag{21}$$

Для знаходження параметрів $a_j$ одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j = b_i,\ i=\overline{1,n}, \tag{22}$$

в якій $\beta_{ij}$ обчислюється за формулою

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - \tilde{T}_j(x_i),\ b_i = f(x_i),\ i=\overline{1,n}, \tag{23}$$

$$\tilde{T}_j(x) = \int_a^b \tilde{T}(x,t)\varphi_j(t)dt.$$

Систему рівнянь (22) доцільно записати у векторному вигляді $\Lambda a_k = b_k$.

**Теорема 2.** *Якщо матриця $\Lambda$ невироджена, то існуватиме єдиний розв'язок системи рівнянь (22) і наближений розв'язок $y_m(x)$ знаходиться однозначно.*

**Зауваження.** *Часто за вузли колокації беруть рівномірно розподілену на проміжку $[a,b]$ систему точок, тобто $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$.*

**Колокаційно-ітеративний метод.** Застосуємо до рівняння (1) колокаційно-ітеративний метод. Наближений розв'язок $y_k(x)$ визначаємо згідно формул

$$y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b H_1(x,t)z_k(t)dt + \\ + \int_a^b H_2(x,t)z_k(h(t))dt + \varepsilon\int_a^b G(x,t)F(t, y_{k-1}(t))dt,\ x\in[a,b], \tag{24}$$

$$y_k(x) = \psi(x),\ x\notin[a,b],\ k=1,2,...$$

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + \omega_k(x), \tag{25}$$

$$\omega_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(x),$$

$$\eta_j(x) = \left(S^{-1}\varphi_j\right)(x).$$

Невідомі параметри $a_j^k = a_j^k(n)$ знаходимо з умови $\gamma_k(x_i) = 0$, де $x_i \in [a,b]$, $i=\overline{1,n}$ – вузли колокації та

$$\gamma_k(x) = f(x) + \int_a^b H_1(x,t) z_k(t)\,dt + \int_a^b H_2(x,t) z_k(h(t))\,dt -$$
$$- y_k(x) + p(x) y_k(h(x)) + \varepsilon \int_a^b G(x,t) F(t, y_{k-1}(t))\,dt,\ x \in [a,b]. \tag{26}$$

За початкове наближення будемо брати розв’язок такого функціонального рівняння

$$y_0(x) - p(x) y_0(h(x)) = s_0(x),\ x \in [a,b],$$
$$y_0(x) = 0,\ x \notin [a,b],$$

в якому $s_0(x)$ – довільна фіксована функція з $L_2[a,b]$, для зручності можна взяти $s_0(x) = 0$ або $s_0(x) = f(x)$.

Система функцій $\{\eta_j(x)\}$ шукається з рівняння

$$\eta_j(x) - p(x)\eta_j(h(x)) = \varphi_i(x),\ x \in [a,b],$$
$$\eta_j(x) = 0,\ x \notin [a,b],\ i = \overline{1,n},$$

де система функцій $\{\varphi_i(x)\} \in L_2[a,b]$ задана і лінійно незалежна.

Значення функції $\{\eta_j(x)\}$, $j = \overline{1,m}$ у точках $c_s = h^{-1}(c_{s-1})$ будемо брати середнє арифметичне односторонніх границь, якщо вони існують, а в точках $c_0 = a$, $c_m = b$ – односторонні границі справа та зліва відповідно.

Увівши позначення

$$\mathcal{E}_k(x) = f(x) + \int_a^b H_1(x,t) y_{k-1}(t)\,dt + \int_a^b H_2(x,t) y_{k-1}(h(t))\,dt -$$
$$- y_{k-1}(x) + p(x) y_{k-1}(h(x)) + \varepsilon \int_a^b G(x,t) F(t, y_{k-1}(t))\,dt,\ x \in [a,b]$$

і підставляючи функцію $z_k(x)$, визначену формулою (24), у вираз (26) для знаходження параметрів $a_j^k$ одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k,\ i = \overline{1,n}, \tag{27}$$

в якій

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - H_j(x_i),\ b_i^k = \mathcal{E}_k(x_i),$$

$$H_j(x)=\int_a^b H_1(x,t)\eta_j(t)\,dt+\int_a^b H_2(x,t)\eta_j(h(t))\,dt,\ j=\overline{1,n},$$

$$\eta_j(x)=\left(S^{-1}\varphi_j\right)(x),$$

$$b_i^k=\mathcal{E}_k(x_i).$$

Систему рівнянь (27) можна записати у вигляді $\Lambda a_k=b_k$, де $b_k$, $a_k$ – записані у векторному вигляді та $\Lambda$ – згадана вище матриця, складена з елементів $\beta_{ij}$.

Зауважимо, що за наближення до шуканого розв’язку можна взяти як функцію $y_k(x)$, так і функцію $z_k(x)$. Слід звернути увагу на той факт, що на основі аналізу формул (24)-(26) при $\omega_k(x)=0, k=1,2,3,\ldots,$ наближення $y_k(x)$ знаходиться методом послідовних наближень.

Алгоритми (19)-(21) і (24)-(26) побудови наближених розв’язків рівняння (1) є рівносильними відповідним алгоритмам колокаційного та колокаційно-ітеративного методів для інтегрального рівняння з малою нелінійністю.

**Висновки.** У статті розглянуто задачу побудови наближених розв’язків одного типу інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. Показано, що при виконанні певних умов ці рівняння шляхом деяких перетворень можна звести до інтегрального рівняння з малою нелінійністю. До згаданих інтегро-функціональних рівнянь застосовано колокаційний та колокційно-ітеративний методи знаходження наближених розв’язків.

## Список використаних джерел:

1. Heseleva K. Collocation-iterative method of solving one type of integro-functional equation. *IV International Scientific and Practical Internet Conference «Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity»*. May 25-26, 2023, Vinnytsia. P. 70-72.
2. Геселева К. Г. Наближені методи розв’язування інтегро-функціональних рівнянь: монографія. Кам’янець-Подільський: ФОП Панькова А. С., 2022. 144 с.
3. Геселева К. Г. Колокаційний та колокаційно ітеративний методи розв’язання інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки:* зб. наук. пр. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 19-27.
4. Геселева К. Г. Колокаційно-ітеративний метод розв’язування лінійних інтегро-функціональних рівнянь. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. пр. Кам’янець-

Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2017. Вип. 16. С. 41-48.
5. Поселюжна В. Б., Семчишин Л. М. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь: монографія. Тернопіль: ТНЕУ, 2013. 203 с.
6. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Верлань Д. Ф. Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. 144 с.

## RESEARCH OF COLLOCATION AND COLLOCATION-ITERATE METHODS FOR SOLUTION OF ONE TYPE OF INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH SMALL NONLINEARITY

Different types of differential, integral, integro-differential, differential-functional, integro-functional equations and their systems are mathematical models of many problems of natural science and technology. In the study of mathematical models, qualitative and analytical methods of the theory of differential equations and methods of computational mathematics are widely used. Among the large number of approximate methods that have a wide range of application in solving various applied problems, a common drawback is observed, the characteristic feature of which is power-law convergence and computational instability. In addition, finding sufficiently accurate approximations using projection methods is often associated with the need to solve systems of high-order equations, which turns out to be quite a difficult task. The desire to simplify cumbersome computational schemes leads to the development and increasingly widespread use of the collocation method and the collocation-iterative method.

Integro-functional equations are quite widely used in various fields of science, in particular, such equations are reduced to equations with a deviation of the argument as a neutral type and with a delay.

The article considers one type of integro-functional equation with small nonlinearity. The process of transforming such an equation into an equation of a much simpler structure is described in detail. It is shown that under certain conditions, the initial equation and the equation obtained after simplification are equivalent. The existence theorem of the solution of the above-mentioned equation is formulated, the ideas of applying collocation and collocation-iterative methods to one type of integro-functional equation with small nonlinearity are described.

**Key words:** *one type of integro-functional equations with small nonlinearity, Fredholm equation of the second kind, integral equation with small nonlinearity, functional equation, completely continuous operator, inverse operator, approximate solution, collocation and collocation-iterative methods.*

Отримано: 14.09.2024