УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.52-69

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЧЕБИШОВСЬКОГО ЦЕНТРА КІЛЬКОХ ТОЧОК ДЕЯКОГО ПОЛІНОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ВІДНОСНО МНОЖИНИ ЦЬОГО ПРОСТОРУ

У різних розділах математичної науки виникають задачі, пов’язані з необхідністю наближення найкращим чином складних математичних об’єктів більш простими і зручними у користуванні.

Важливий клас задач теорії наближення утворюють задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів. До задач найкращого одночасного наближення кількох елементів можна віднести задачу відшукання чебишовського центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно множини цього простору.

Ця задача полягає у відшуканні в заданій множині лінійного нормованого простору такої точки (відносного чебишовського центра), максимальна відстань до якої від кожної з кількох фіксованих точок простору була б найменшою, тобто не перевищувала максимальної відстані від кожної з кількох заданих точок до будь-якої іншої точки цієї множини.

З єдиних позицій задачі найкращої одночасної апроксимації кількох елементів лінійного нормованого простору опуклими множинами цього простору розглядалися, зокрема, у працях [1, 2]. На практиці доводиться мати справу з такими задачами, у яких при відшуканні чебишовського центра кількох заданих точок лінійного нормованого простору відносно множини цього простору фігурують зважені відстані. Задача відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра розглядалась, зокрема, у праці [3]. У цій праці встановлено критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору, основані на співвідношенні двоїстості для відповідної екстремальної задачі.

Якщо в задачі про чебишовський центр кількох точок лінійного нормованого простору, в якій відстані між точками визначаються зваженими нормами, зважені норми замінити, взагалі кажучи, різними нормами, заданими на відповідному лінійному просторі, то отримаємо задачу про чебишовський

центр кількох точок деякого полінормованого простору, яка розглядається у цій роботі.

Зрозуміло, що задачі про чебишовський центр кількох точок лінійного нормованого простору, про які йшла мова вище є частковими випадками задачі про чебишовський центр кількох точок деякого полінормованого простору.

Ключові слова: *лінійний нормований простір, полінормований простір, чебишовський центр, екстремальний елемент, умови екстремальності допустимого елемента.*

Вступ. У роботі доведено еквівалентність задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох точок полінормованого простору деякій задачі найкращого наближення елемента в деякому лінійному нормованому просторі. Для випадку, коли множина, відносно якої розглядається задача про відшукання узагальненого чебишовського центра кількох точок полінормованого простору, є опуклою, отримано співвідношення двоїстості для цієї задачі, яке покладено в основу встановлення умов екстремальності її допустимого елемента.

Постановка задачі. Нехай X – лінійний над полем дійсних чисел простір, $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$, – норми, задані на X, тобто $\left(X,\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ є полінормованим простором (див., наприклад, [4]), $(a_1,...,a_m)\in X^m$, де $X^m = X\times...\times X$ – m-арний декартів (прямий) добуток множини X, $V\subset X$.

Поставимо задачу відшукання величини:

$$\beta_V^*(a_1,...,a_m) = \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i. \tag{1}$$

Якщо існує елемент $x^*\in V$, для якого

$$\max_{1\le i\le m}\left\|a_i - x^*\right\|_i = \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i = \beta_V^*(a_1,...,a_m),$$

то його будемо називати узагальненим чебишовським центром для точок a_i, $i=\overline{1,m}$, полінормованого простору $\left(X,\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини V цього простору або просто екстремальним елементом для величини (1).

З урахуванням цього задачу відшукання величини (1) будемо називати задачею відшукання узагальненого чебишовського центра для точок a_i, $i=\overline{1,m}$, полінормованого простору $\left(X,\|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини V цього простору.

Актуальність теми. Актуальність задачі (1) відшукання чебишовського центра $x^*\in V$ кількох точок a_i, $i=\overline{1,m}$, полінормованого простору $\left(X, \|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ відносно множини V цього простору випливає уже зі змісту поняття узагальненого чебишовського центра, адже для x^* $\max\limits_{1\le i\le m}\|a_i - x^*\|_i \le \max\limits_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i$ для всіх $x \in V$.

Задача про чебишовський центр кількох точок a_i , $i=\overline{1,m},$ полінормованого простору $\left(X, \|\cdot\|_i, i=\overline{1,m}\right)$ знаходить застосування, зокрема, при вирішенні питань вибору оптимальних місць розташування центрів обслуговування.

Зауважимо, що задача (1) у випадку, коли $\|\cdot\|_i = \|\cdot\|$, $i=\overline{1,m},$ співпадає із задачею відшукання величини

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|, \tag{2}$$

яка є класичною задачею відшукання відносного чебишовського центра точок a_i , $i=\overline{1,m},$ лінійного нормованого простору $\left(X, \|\cdot\|\right)$.

У випадку, коли $\|\cdot\|_i = c_i\|\cdot\|$, де $c_i > 0$, $i=\overline{1,m},$ $\|\cdot\|$ є нормою, заданою на $X,$ задача (1) набере вигляду

$$\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m} c_i\|a_i - x\|. \tag{3}$$

Задача (3) є задачею відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра точок a_i , $i=\overline{1,m},$ у множині $V \subset X$.

Як частковий випадок задачі (1) при $m=1$ $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|$ отримаємо задачу відшукання величини

$$\inf_{x\in V}\|a_1 - x\|, \tag{4}$$

яка є задачею найкращого наближення елемента a_1 лінійного нормованого простору $\left(X, \|\cdot\|\right)$ множиною V цього простору.

Актуальність задачі відшукання величини (1) підвищується внаслідок того, що результати загального характеру, отримані при дослідженні задачі (1), можуть слугувати для отримання відповідних результатів для задач (2)-(4) та інших задач, які вкладаються у схему постановки задачі (1).

Мета роботи. Важливою проблемою дослідження задачі відшукання величини (1) та інших задач, які вкладаються в її постановку, є встановлення умов екстремальності її допустимих елементів, що стало метою роботи.

Лінійні нормовані простори $\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$ та $\left(X^m\right)^* = \left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)^*$. В m-арному декартовому (прямому) добутку $X^m = \{\left(x_1,\ldots,x_m\right):$

$x_i \in X, i=\overline{1,m}\}$ лінійного над полем дійсних чисел простору X покладемо для $x=(x_1,...,x_m)$, $y=(y_1,...,y_m)\in X^m$, $\alpha \in R$:

$$x+y=(x_1+y_1,...,x_m+y_m),\ \alpha x=(\alpha x_1,...,\alpha x_m).$$

Легко переконатися, що X^m, з означеними вище операціями, є лінійним над полем дійсних чисел простором.

Теорема 1. *Якщо для кожного елемента* $(x_1,...,x_m)\in X^m$ *покласти* $\|(x_1,...,x_m)\|_{X^m}=\max\limits_{1\le i\le m}\|x_i\|_i$, *то* $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ *буде лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором.*

Для того щоб елемент φ *належав простору* $\left(X^m\right)^*=\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)^*$, *спряженому з* $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$, *необхідно і достатньо, щоб існували єдиним способом визначені функціонали* $f_i\in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, *де* $X_i^*=\left(X,\|\cdot\|_i\right)^*$ *– простір спряжений з* $X_i=\left(X,\|\cdot\|_i\right)$, $i=\overline{1,m}$, *такі, що*

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i),\ (x_1,...,x_m)\in X^m, \tag{5}$$

причому справедлива рівність

$$\|\varphi\|_{\left(X^m\right)^*}=\sum_{i=1}^{m}\|f_i\|_{X_i^*}. \tag{6}$$

Доведення. Нехай $(x_1,...,x_m)\in X^m$. Тоді $\|(x_1,...,x_m)\|_{X^m}=$ $=\max\limits_{1\le i\le m}\|x_i\|_i\ge 0$. Якщо $(x_1,...,x_m)=(0,...,0)\in X^m$, то $\|x_i\|_i=\|0\|_i=0$, і, отже,

$$\|(x_1,...,x_m)\|_{X^m}=\|(0,...,0)\|_{X^m}=\max_{1\le i\le m}\|0\|_i=0.$$

Навпаки, якщо $\|(x_1,...,x_m)\|_{X^m}=\max\limits_{1\le i\le m}\|x_i\|_i=0$, то $\|x_i\|_i=0, i=\overline{1,m}$. Звідси випливає, що $x_i=0$, $i=\overline{1,m}$, і, отже, $(x_1,...,x_m)=(0,...,0)\in X^m$. Тому величина $\|(x_1,...,x_m)\|_{X^m}=\max\limits_{1\le i\le m}\|x_i\|_i$ задовольняє першу аксіому норми.

Для $(x_1,...,x_m)\in X^m$ та $\alpha\in R$ маємо, що

$$\|\alpha(x_1,...,x_m)\|_{X^m}=\|(\alpha x_1,...,\alpha x_m)\|_{X^m}=\max_{1\le i\le m}\|\alpha x_i\|_i=$$

$$=|\alpha|\max_{1\le i\le m}\|x_i\|_i=|\alpha|\|(x_1,...,x_m)\|_{X^m}.$$

З цих співвідношень випливає, що для величини $\|(x_1,...,x_m)\|_{X^m}=\max\limits_{1\le i\le m}\|x_i\|_i$ виконується друга аксіома норми.

Для всіх $(x_1,...,x_m)$, $(y_1,...,y_m)\in X^m$ маємо, що

$$\|(x_1,...,x_m)+(y_1,...,y_m)\|_{X^m}=\|(x_1+y_1,...,x_m+y_m)\|_{X^m}=\max_{1\le i\le m}\|x_i+y_i\|_i\le$$

$$\le\max_{1\le i\le m}\left(\|x_i\|_i+\|y_i\|_i\right)\le\max_{1\le i\le m}\|x_i\|_i+\max_{1\le i\le m}\|y_i\|_i=\|(x_1,...,x_m)\|_{X^m}+\|(y_1,...,y_m)\|_{X^m}.$$

Отже, величина $\|(x_1,...,x_m)\|_{X^m}=\max\limits_{1\le i\le m}\|x_i\|_i$, $(x_1,...,x_m)\in X^m$, задовольняє третю аксіому норми.

Тому $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ є лінійним над полем дійсних чисел нормованим простором.

Нехай $\varphi\in\left(X^m\right)^*$. Для $(x_1,...,x_m)\in X^m$ маємо, що

$$\varphi(x_1,...,x_m)=\varphi(x_1,0,...,0)+\varphi(0,x_2,...,0)+...+\varphi(0,0,...,x_m)=$$

$$=f_1^{\varphi}(x_1)+f_2^{\varphi}(x_2)+...+f_m^{\varphi}(x_m),\tag{7}$$

де $f_i^{\varphi}(x_i)=\varphi(0,...,0,x_i,0,...,0)$, $x_i\in X$, $i=\overline{1,m}$.

Переконаємося, що для $i\in\{1,...,m\}$ функціонали $f_i^{\varphi}(x_i)$, $x_i\in X$, є лінійними на X. Дійсно для $x_i,y_i\in X$ будемо мати, що

$$f_i^{\varphi}(x_i+y_i)=\varphi(0,...,0,x_i+y_i,0,...,0)=\varphi(0,...,0,x_i,0,...,0)+$$

$$+\varphi(0,...,0,y_i,0,...,0)=f_i^{\varphi}(x_i)+f_i^{\varphi}(y_i).$$

Адитивність функціонала $f_i^{\varphi}(x_i)$, $x_i\in X$, встановлено. Переконаємося у його однорідності. Для $\alpha\in R$, $x_i\in X$ одержимо, що

$$f_i^{\varphi}(\alpha x_i)=\varphi(0,...,0,\alpha x_i,0,...,0)=\varphi\left(\alpha(0,...,0,x_i,0,...,0)\right)=$$

$$=\alpha\varphi(0,...,0,x_i,0,...,0)=\alpha f_i^{\varphi}(x_i).$$

Для $i\in\{1,...,m\}$ лінійність функціонала $f_i^{\varphi}(x_i)$, $x_i\in X$, встановлено.

Переконаємося в його обмеженості. Маємо, що

$$\left|f_i^{\varphi}(x_i)\right|=\left|\varphi(0,...,0,x_i,0,...,0)\right|\le\|\varphi\|_{\left(X^m\right)^*}\|(0,...,0,x_i,0,...,0)\|_{X^m}=$$

$$=\|\varphi\|_{\left(X^m\right)^*}\max\left\{\|0\|_1,...,\|0\|_{i-1},\|x_i\|_i,\|0\|_{i+1},...,\|0\|_m\right\}=\|\varphi\|_{\left(X^m\right)^*}\|x_i\|_i,\ x_i\in X.$$

Це означає, що лінійний функціонал $f_i^{\varphi}(x_i)$, $x_i \in X$, є обмеженим на $\left(X, \|\cdot\|_i\right)$. Тому він є неперервним на $X_i = \left(X, \|\cdot\|_i\right)$ і, отже, $f_i^{\varphi} \in X_i^* = \left(X, \|\cdot\|_i\right)^*$. Отже, в поданні (7) $f_i^{\varphi} \in X_i^*$, $i = \overline{1,m}$, що й потрібно було встановити.

Нехай тепер

$$\varphi(x_1,...,x_m) = f_1(x_1) + .. + f_m(x_m),\ (x_1,...,x_m) \in X^m, \tag{8}$$

де $f_i \in X_i^*$, $i = \overline{1,m}$.

Оскільки для $(x_1,...,x_m)$, $(y_1,..., y_m)$, $\alpha \in R$ внаслідок (8) маємо, що

$$\varphi\left((x_1,...,x_m) + (y_1,...,y_m)\right) = \varphi(x_1 + y_1,...,x_m + y_m) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i + y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(f_i(x_i) + f_i(y_i)\right) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{m} f_i(y_i) = \varphi(x_1,...,x_m) + \varphi(y_1,...,y_m),$$

$$\varphi\left(\alpha(x_1,...,x_m)\right) = \varphi(\alpha x_1,...,\alpha x_m) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\alpha x_i) = \alpha\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) = \alpha\varphi(x_1,...,x_m),$$

то функціонал φ є лінійним функціоналом, заданим на X^m. Переконаємося в його обмеженості на $\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$. Для $(x_1,...,x_m) \in X^m$ маємо, що

$$\left|\varphi(x_1,...,x_m)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)\right| \le \sum_{i=1}^{m}\left|f_i(x_i)\right| \le \sum_{i=1}^{m}\|f_i\|_{X_i^*}\|x_i\|_i \le$$

$$\le \max_{1\le i\le m}\|x_i\|_i\left(\sum_{i=1}^{m}\|f_i\|_{X_i^*}\right) = \left(\sum_{i=1}^{m}\|f_i\|_{X_i^*}\right)\left\|(x_1,...,x_m)\right\|_{X^m}.$$

Звідси випливає, що функціонал φ є обмеженим на X^m та

$$\|\varphi\|_{(X^m)^*} \le \sum_{i=1}^{m}\|f_i\|_{X_i^*}. \tag{9}$$

Отже, $\varphi \in \left(X^m\right)^*$, має місце подання (5) та співвідношення (9).

Переконаємося в єдиності подання (5).

З (5) одержуємо, що для $i \in \{1,...,m\}$, $x_i \in X$

$$\varphi(0,...,0,x_i,0,...,0) = f_1(0) + ... + f_{i-1}(0) + f_i(x_i) + f_{i+1}(0) + ... + f_m(0) = f_i(x_i).$$

Отже, для будь-якого подання (5) функціонала $\varphi \in \left(X^m\right)^*$ одержуємо, що

$$\varphi\left(x_1,...,x_m\right)=\sum_{i=1}^{m} f_i\left(x_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\varphi\left(0,...,0,x_i,0,...0\right)=\sum_{i=1}^{m} f_i^{\varphi}\left(x_i\right).$$

Єдиність подання (5) для функціонала $\varphi\in\left(X^m\right)^*$ встановлено.

Переконаємося, що для подання (5) функціонала $\varphi\in\left(X^m\right)^*$ має місце рівність (6).

Відомо, що для кожного $i\in\{1,...,m\}$

$$\| f_i\|_{X_i^*}=\sup_{\|x\|_i\le 1} f_i\left(x\right). \tag{10}$$

Нехай $\varepsilon>0$. Зі співвідношення (10) випливає, що існує елемент $x_i^{\varepsilon}\in\left(X,\|\cdot\|_i\right)$, такий, що $\left\|x_i^{\varepsilon}\right\|_i\le 1$, а $f_i\left(x_i^{\varepsilon}\right)\ge\| f_i\|_{X_i^*}-\dfrac{\varepsilon}{n}$, $i=\overline{1,m}$.

Звідки $\varphi\left(x_1^{\varepsilon},...,x_m^{\varepsilon}\right)=f_1\left(x_1^{\varepsilon}\right)+...+f_m\left(x_m^{\varepsilon}\right)\ge\sum_{i=1}^{m}\| f_i\|_{X_i^*}-\varepsilon$, причому $\left\|\left(x_1^{\varepsilon},...,x_m^{\varepsilon}\right)\right\|_{X^m}=\max_{1\le i\le m}\left\|x_i^{\varepsilon}\right\|_i\le 1$.

Тому

$$\|\varphi\|_{\left(X^m\right)^*}=\sup_{\left\|\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}\le 1}\varphi\left(x_1,...,x_m\right)\ge\varphi\left(x_1^{\varepsilon},...,x_m^{\varepsilon}\right)\ge\sum_{i=1}^{m}\| f_i\|_{X_i^*}-\varepsilon.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon>0$, одержимо, що

$$\|\varphi\|_{\left(X^m\right)^*}\ge\sum_{i=1}^{m}\| f_i\|_{X_i^*}. \tag{11}$$

Зі співвідношень (9) та (11) випливає справедливість рівності (6).

Теорему доведено.

Еквівалентність задачі відшукання величини (1) деякій задачі найкращого наближення елемента $\left(a_1,...,a_m\right)$ в лінійному нормованому просторі $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$. Позначимо через $D=\left\{\left(x,...,x\right)\in X^m : x\in V\right\}$ – діагональ множини $V^m=V\times\cdots\times V$ та розглянемо у просторі $\left(X^m,\|\cdot\|_{X^m}\right)$ задачу відшукання величини

$$\inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D}\left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Має місце рівність*

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m\right)=\inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D}\left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}. \tag{13}$$

Для того щоб елемент $x^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб елемент $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$ був екстремальним елементом для величини (12).

Доведення. Нехай $x \in V$. Тоді

$$\max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i = \left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x,...,x\right)\right\|_{X^m} \ge \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D}\left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m},$$

оскільки $\left(x,...,x\right) \in D$.

Звідки випливає, що

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m\right) = \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i \ge \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D}\left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}. \quad (14)$$

Нехай тепер $\left(x_1,...,x_m\right) \in D$. Це означає, що існує елемент $x \in V$, для якого $\left(x_1,...,x_m\right) = \left(x,...,x\right)$. З урахуванням цього одержуємо, що

$$\left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m} = \left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x,...,x\right)\right\|_{X^m} =$$

$$= \left\|\left(a_1 - x,...,a_m - x\right)\right\|_{X^m} = \max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i \ge \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i .$$

Звідси випливає, що

$$\inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D}\left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m} \ge \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i = \beta_V^*\left(a_1,...,a_m\right). \quad (15)$$

Зі співвідношень (14), (15) випливає справедливість рівності (13).

Нехай x^* є екстремальним елементом для величини (1). Тоді $x^* \in V$, $\left(x^*,...,x^*\right) \in D$ і (див. (1), (13))

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m\right) = \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i = \max_{1\le i\le m}\left\|a_i - x^*\right\|_i =$$

$$= \left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x^*,...,x^*\right)\right\|_{X^m} = \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D}\left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}.$$

Це й означає, що елемент $\left(x^*,...,x^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (12), що й потрібно було встановити.

Нехай тепер $\left(x_1^*,...,x_m^*\right) = \left(x^*,...,x^*\right) \in D$ є екстремальним елементом для величини (12). Тоді $x^* \in V$ і згідно (1), (13)

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m\right) = \inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D}\left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m} =$$

$$= \left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x^*,...,x^*\right)\right\|_{X^m} = \max_{1\le i\le m}\left\|a_i - x^*\right\|_i = \inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\|a_i - x\|_i .$$

Звідси випливає, що x^* є екстремальним елементом для величини (1), що й потрібно було встановити.

Теорему доведено.

Співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (1). Рівність (13) дозволяє встановити, так зване, співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (1).

Теорема 3. *Якщо в задачі відшукання величини (1) V є опуклою множиною лінійного простору X, то для цієї задачі має місце таке співвідношення двоїстості*

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x\right\|_i=$$

$$=\max\left\{\sum_{i=1}^m f_i\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^m f_i\right)\left(x\right):\ f_i\in X_i^*, i=\overline{1,m}, \sum_{i=1}^m\left\|f_i\right\|_{X_i^*}\le 1\right\}. \quad (16)$$

Доведення. Легко переконатися, що множина D є опуклою множиною простору X^m (див., наприклад, [5,с.31]). З урахуванням зазначеного, теореми 2 та теореми 2.3.1 [6, с.28] одержимо, що

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m\right)=\inf_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D}\left\|\left(a_1,...,a_m\right)-\left(x_1,...,x_m\right)\right\|_{X^m}=$$

$$=\max\left\{\varphi\left(a_1,...,a_m\right)-\sup_{\left(x_1,....,x_m\right)\in D}\varphi\left(x_1,...,x_m\right):\varphi\in\left(X^m\right)^*,\left\|\varphi\right\|_{\left(X^m\right)^*}\le 1\right\}=$$

$$=\varphi^*\left(a_1,...,a_m\right)-\sup_{\left(x_1,....,x_m\right)\in D}\varphi^*\left(x_1,...,x_m\right), \quad (17)$$

де $\varphi^*\in\left(X^m\right)^*$, $\left\|\varphi^*\right\|_{\left(X^m\right)^*}\le 1$.

Відповідно до теореми 1 існують функціонали $f_i^*\in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, такі, що

$$\varphi^*\left(x_1,...,x_m\right)=\sum_{i=1}^m f_i^*\left(x_i\right),\ \left(x_1,...,x_m\right)\in X^m, \quad (18)$$

$$\left\|\varphi^*\right\|_{\left(X^m\right)^*}=\sum_{i=1}^m\left\|f_i^*\right\|_{X_i^*}\le 1. \quad (19)$$

Внаслідок (1), (17) та (18) одержимо, що

$$\beta_V^*\left(a_1,...,a_m\right)=\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x\right\|_i=$$

$$=\sum_{i=1}^m f_i^*\left(a_i\right)-\sup_{\left(x_1,...,x_m\right)\in D}\sum_{i=1}^m f_i^*\left(x_i\right)=\sum_{i=1}^m f_i^*\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\sum_{i=1}^m f_i^*\left(x\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^m f_i^*\left(a_i\right)-\sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^m f_i^*\right)\left(x\right), \quad (20)$$

де $f_i^*\in X_i^*, i=\overline{1,m}, \sum_{i=1}^m\left\|f_i^*\right\|_{X_i^*}\le 1$ (див. (19)).

Для будь-яких інших функціоналів $f_i \in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_{X_i^*} \le 1$ та $x \in V$ отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} f_i\ (a_i) - \sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^{m} f_i \right)(x) \le \sum_{i=1}^{m} f_i\ (a_i) - \left(\sum_{i=1}^{m} f_i \right)(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f_i\ (a_i) - \sum_{i=1}^{m} f_i\ (x) = \sum_{i=1}^{m} f_i\ (a_i - x) \le \sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_{X_i^*} \|a_i - x\|_i \le$$

$$= \max_{1\le i\le m} \|a_i - x\|_i \sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_{X_i^*} \le \max_{1\le i\le m} \|a_i - x\|_i .$$

Звідси та рівності (20) випливає, що для будь-яких $f_i \in X_i^*$, $i=\overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} \| f_i \|_{X_i^*} \le 1$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i\ (a_i) - \sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^{m} f_i \right)(x) \le \inf_{x\in V} \max_{1\le i\le m} \|a_i - x\|_i = \sum_{i=1}^{m} f_i^*(a_i) - \sup_{x\in V}\left(\sum_{i=1}^{m} f_i^* \right)(x),$$

де $f_i^* \in X_i^*, i=\overline{1,m}, \sum_{i=1}^{m} \| f_i^* \|_{X_i^*} \le 1$.

Тому має місце співвідношення (16).

Теорему доведено.

Критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (1), оснований на співвідношенні двоїстості (16). Зрозуміло, що коли для $x^* \in V$ $\max_{1\le i\le m} \|a_i - x^*\|_i = 0$, то x^* є екстремальним елементом для величини (1) за будь-яких умов, оскільки в цьому випадку для всіх $x \in X$, в тому числі і для $x \in V$, виконується нерівність $\max_{1\le i\le m} \|a_i - x\|_i \ge 0 = \max_{1\le i\le m} \|a_i - x^*\|_i$.

У зв'язку з цим в подальших міркуваннях будемо припускати, що для $x^* \in V$ $\max_{1\le i\le m} \|a_i - x^*\|_i > 0$.

Теорема 4. *Нехай в задачі відшукання величини (1) V є опуклою множиною, $x^* \in V$, $\max_{1\le i\le m} \|a_i - x^*\|_i > 0$ та*

$$I(x^*) = \left\{ i \in \{1,\dots,m\} : \max_{1\le i\le m} \|a_i - x^*\|_i = \|a_i - x^*\|_i \right\}.$$

Для того щоб елемент x^* *був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували функціонали* $f_i^* \in X_i^*$, $i \in I\left(x^*\right)$*, такі, що:*

1) $\sum_{i \in I\left(x^*\right)} \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} = 1;$

2) $f_i^*\left(a_i - x^*\right) = \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \left\| a_i - x^* \right\|_i, \ i \in I\left(x^*\right);$

3) $\max_{x \in V} \left(\sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^* \right)(x) = \left(\sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^* \right)\left(x^*\right).$

Доведення. *Необхідність.* Нехай для $x^* \in V$ $\max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i > 0$ та $I\left(x^*\right) = \left\{ i \in \{1, \ldots, m\} : \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i = \left\| a_i - x^* \right\|_i \right\}$. Припустимо, що x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Позначимо через $f_i^* \in X_i^*$, $i = \overline{1, m}$, функціонали, такі, що $\sum_{i=1}^{m} \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \le 1$ і які реалізують максимум у правій частині рівності (16). З урахуванням цієї рівності одержуємо, що

$$\beta_V^*\left(a_1, \ldots, a_m\right) = \inf_{x \in V} \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x \right\|_i = \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i = \sum_{i=1}^{m} f_i^*\left(a_i\right) - \sup_{x \in V} \left(\sum_{i=1}^{m} f_i^* \right)(x) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} f_i^*\left(a_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} f_i^* \right)\left(x^*\right) = \sum_{i=1}^{m} f_i^*\left(a_i - x^*\right) \le \sum_{i=1}^{m} \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \left\| a_i - x^* \right\|_i \le$$

$$\le \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i \sum_{i=1}^{m} \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \le \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i. \quad (21)$$

Із співвідношення (21) випливає, що в ньому потрібно замінити всі знаки нерівності на рівності. Тому:

$$\sum_{i=1}^{m} \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} = 1; \quad (22)$$

$$\sup_{x \in V} \left(\sum_{i=1}^{m} f_i^* \right)(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} f_i^* \right)\left(x^*\right); \quad (23)$$

$$f_i^*\left(a_i - x^*\right) = \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \left\| a_i - x^* \right\|_i, \ i = \overline{1, m}; \quad (24)$$

$$\left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \left\| a_i - x^* \right\|_i = \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i, \; i = \overline{1, m}. \qquad (25)$$

Зі співвідношення (25) одержимо, що для $i \in \{1, ..., m\} \setminus I\left(x^*\right)$ $f_i^* = 0$. Дійсно, для цих i маємо, що $\left\| a_i - x^* \right\|_i < \max\limits_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i$. Якщо припустити, що $f_i^* \neq 0$, то $\left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} > 0$. Тому $\left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \left\| a_i - x^* \right\|_i < \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \max\limits_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i$, що суперечить (25).

Отже, для всіх $i \in \{1, ..., m\} \setminus I\left(x^*\right)$ $f_i^* = 0$. З урахуванням цього з (22)-(24) отримаємо рівності 1)-3) відповідно.

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що $x^* \in V$, $\max\limits_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i > 0$, $I\left(x^*\right) = \left\{ i \in \{1, ..., m\} : \max\limits_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i = \left\| a_i - x^* \right\|_i \right\}$ та мають місце співвідношення 1)-3). Переконаємося, що в цьому випадку, x^* є екстремальним елементом для величини (1). Для будь-якого $x \in V$ з урахуванням умов 1)-3) одержуємо, що:

$$\sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*(x) \le \sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*\left(x^*\right), \; \sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*(-x) \ge \sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*\left(-x^*\right);$$

$$\sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*(a_i - x) \ge \sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*\left(a_i - x^*\right);$$

$$\max_{i \in I\left(x^*\right)} \left\| a_i - x \right\|_i \ge \sum_{i \in I\left(x^*\right)} \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \left\| a_i - x \right\|_i \ge \sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*(a_i - x) \ge \sum_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*\left(a_i - x^*\right) =$$

$$= \sum_{i \in I\left(x^*\right)} \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \left\| a_i - x^* \right\|_i = \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i.$$

Звідси випливає, що для $x \in V$

$$\max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x \right\|_i \ge \max_{i \in I\left(x^*\right)} \left\| a_i - x \right\|_i \ge \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i.$$

Це й означає, що

$$\inf_{x \in V} \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x \right\|_i = \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i,$$

тобто x^* є екстремальним елементом для величини (1).

У цьому випадку достатність доведено.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай в задачі відшукання величини (2)* V *є опуклою множиною,* $x^* \in V$, $\max\limits_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\| > 0$ *та*

$$I\left(x^*\right) = \left\{ i \in \{1, ..., m\} : \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\| = \left\| a_i - x^* \right\| \right\} .$$

Для того щоб елемент $x^* \in V$ був екстремальним для величини (2), необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X^* = \left(X, \|\cdot\| \right)^*$, $i \in I\left(x^*\right)$, такі, що:

1) $\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} \left\| f_i^* \right\|_{X^*} = 1;$

2) $f_i^*\left(a_i - x^*\right) = \left\| f_i^* \right\|_{X^*} \left\| a_i - x^* \right\|, \; i \in I\left(x^*\right);$

3) $\max\limits_{x \in V} \left(\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^* \right)(x) = \left(\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^* \right)\left(x^*\right).$

Наслідок 2. *Нехай для задачі відшукання величини (1) виконуються всі умови теореми 4 та* V *є підпростором простору* X .

Для того щоб елемент $x^* \in V$ був екстремальним для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X_i^*$, $i \in I\left(x^*\right)$, для яких виконуються умови 1), 2) теореми 4 та умова 3) $\left(\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^* \right)(x) = 0$ для всіх $x \in V$.

Наслідок 3. *Нехай для задачі відшукання величини (1) виконуються всі умови теореми 4 та* V *є підпростором простору* X *, породженим його векторами* $x_1, ..., x_n$ *, тобто*

$$V = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j : \alpha_j \in R, \, j = \overline{1, n} \right\} .$$

Для того щоб елемент $x^* \in V$ був екстремальним для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X_i^*$, $i \in I\left(x^*\right)$, для яких виконуються умови 1), 2) теореми 4 та умова 3) $\left(\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^* \right)\left(x_j\right) = 0$, $j = \overline{1, n}$.

Наслідок 4. *Нехай для задачі відшукання величини (1) виконуються всі умови теореми 4 та V є опуклим конусом з вершиною в точці 0 простору X.*

Для того щоб елемент $x^* \in V$ був екстремальним для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X_i^*$, $i \in I\left(x^*\right)$, для яких виконуються умови 1), 2) теореми 4 та умова 3) $\left(\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*\right)\left(x^*\right) = 0$, $\left(\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*\right)(x) \le 0$ для всіх $x \in V$.

Зрозуміло, що умова 3) в теоремі 4 еквівалентна такому співвідношенню: $\left(\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*\right)\left(x - x^*\right) \le 0$, $x \in V$. З урахуванням цього теорему 4 можна сформулювати в такій еквівалентній формі.

Теорема 5. *Нехай в задачі відшукання величини (1) V є опуклою множиною простору X, $x^* \in V$, $\max\limits_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i > 0$ та*

$$I\left(x^*\right) = \left\{ i \in \{1, \ldots, m\} : \max_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i = \left\| a_i - x^* \right\|_i \right\}.$$

Для того щоб елемент x^* був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували функціонали $f_i^* \in X_i^*$, $i \in I\left(x^*\right)$, такі, що:

1) $\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} = 1$;

2) $f_i^*\left(a_i - x^*\right) = \left\| f_i^* \right\|_{X_i^*} \left\| a_i - x^* \right\|_i$, $i \in I\left(x^*\right)$;

3) $\left(\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^*\right)\left(x - x^*\right) \le 0$, $x \in V$.

Достатня умова та критерій колмогоровського типу екстремальності елемента для задачі відшукання величини (1). Встановимо достатню умову екстремальності елемента для величини (1) у випадку довільної множини V та критерій колмогоровського типу екстремальності цього елемента у випадку опуклої множини V.

Теорема 6. *Нехай в задачі відшукання величини (1) V є довільною множиною простору X, $x^* \in V$, $\max\limits_{1 \le i \le m} \left\| a_i - x^* \right\|_i > 0$ та*

$$I\left(x^*\right)=\left\{i\in\{1,...,m\}:\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x^*\right\|_i=\left\|a_i-x^*\right\|_i\right\}.$$

Якщо для кожного $x\in V$ *існують функціонали* $f_i^x\in X_i^*$, $i\in I\left(x^*\right)$*, такі, що:*

1) $\sum_{i\in I\left(x^*\right)}\left\|f_i^x\right\|_{X_i^*}=1$;

2) $f_i^x\left(a_i-x^*\right)=\left\|f_i^x\right\|_{X_i^*}\left\|a_i-x^*\right\|_i$, $i\in I\left(x^*\right)$;

3) $\left(\sum_{i\in I\left(x^*\right)}f_i^x\right)\left(x-x^*\right)\le 0$,

то x^* *є екстремальним елементом для величини (1).*

Доведення. Нехай для кожного $x\in V$ існують функціонали $f_i^x\in X_i^*$, $i\in I\left(x^*\right)$, для яких виконуються умови 1)-3) теореми. Тоді для $x\in V$

$$0\ge\left(\sum_{i\in I\left(x^*\right)}f_i^x\right)\left(x-x^*\right)=\sum_{i\in I\left(x^*\right)}f_i^x\left(x-a_i+a_i-x^*\right)=\sum_{i\in I\left(x^*\right)}f_i^x\left(a_i-x^*\right)-$$

$$-\sum_{i\in I\left(x^*\right)}f_i^x\left(a_i-x\right)\ge\sum_{i\in I\left(x^*\right)}\left\|f_i^x\right\|_{X_i^*}\left\|a_i-x^*\right\|_i-\sum_{i\in I\left(x^*\right)}\left\|f_i^x\right\|_{X_i^*}\left\|a_i-x\right\|_i\ge$$

$$\ge\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x^*\right\|_i\sum_{i\in I\left(x^*\right)}\left\|f_i^x\right\|_{X_i^*}-\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x\right\|_i\sum_{i\in I\left(x^*\right)}\left\|f_i^x\right\|_{X_i^*}=$$

$$=\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x^*\right\|_i-\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x\right\|_i.$$

Звідси випливає, що $\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x\right\|_i\ge\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x^*\right\|_i$, $x\in V$. Отже, справедлива рівність $\inf_{x\in V}\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x\right\|_i=\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x^*\right\|_i$. Це означає, що x^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Теорема 7. *Нехай в задачі відшукання величини (1)* V *є опуклою множиною,* $x^*\in V$, $\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x^*\right\|_i>0$ *та*

$$I\left(x^*\right)=\left\{i\in\{1,...,m\}:\max_{1\le i\le m}\left\|a_i-x^*\right\|_i=\left\|a_i-x^*\right\|_i\right\}.$$

Для того щоб елемент x^* *був екстремальним для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного* $x \in V$ *існували функціонали* $f_i^x \in X_i^*$, $i \in I\left(x^*\right)$, *для яких виконуються умови:*

1) $\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} \left\| f_i^x \right\|_{X_i^*} = 1$;

2) $f_i^x\left(a_i - x^*\right) = \left\| f_i^x \right\|_{X_i^*} \left\| a_i - x^* \right\|_i, \ i \in I\left(x^*\right)$;

3) $\left(\sum\limits_{i \in I\left(x^*\right)} f_i^x \right)\left(x - x^*\right) \le 0$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай x^* є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з теоремою 5 існують функціонали $f_i^* \in X_i^*$, $i \in I\left(x^*\right)$, для яких мають місце співвідношення 1)-3) теореми 5. Для кожного $x \in V$ покладемо $f_i^x = f_i^*, \ i \in I\left(x^*\right)$. Тоді функціонали $f_i^x \in X_i^*$, $i \in I\left(x^*\right)$, згідно з умовами 1)-3) теореми 5 задовольняють умови 1)-3) теореми 7.

Необхідність доведено.

Достатність. Справедливість достатності випливає з теореми 6.

Теорему доведено.

Висновок. Для задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох точок деякого полінормованого простору відносно множини цього простору:

- встановлено її еквівалентність задачі найкращого наближення елемента $\left(a_1, \ldots, a_m\right)$ лінійного нормованого простору $\left(X^m, \|\cdot\|_{X^m}\right)$ множиною $D = \left\{\left(x, \ldots, x\right) \in X^m : x \in V\right\} \subset X^m$;
- отримано співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (1);
- доведено критерій екстремальності допустимого елемента задачі відшукання величини (1), оснований на встановленому співвідношенні двоїстості;
- конкретизовано названий вище критерій на важливі часткові випадки задачі відшукання величини (1);
- встановлено достатню умову та для випадку опуклої множини V критерій колмогоровського типу екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (1);

- розглянуто деякі допоміжні твердження, які становлять і самостійний інтерес.

Список використаних джерел:

1. Гнатюк Ю. В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення. *Доповіді НАН України.* 1995. № 6. С. 23-26.
2. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів. *Український математичний журнал*. 1996. Вип. 48. № 97. С. 1183-1193.
3. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 17. С. 33-48.
4. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови екстремальності допустимого елемента для узагальненої задачі Штейнера в деякому полінормованому просторі. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип. 23. С. 29-43.
5. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Опуклий аналіз: навчальний посібник. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112 с.
6. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. Москва: Наука, 1976. 320 с.

THE EXISTENCE CONDITIONS OF THE EXTREMALITY OF THE ADMISSIBLE ELEMENT FOR THE PROBLEM OF FINDING THE GENERALIZED CHEBYSHOV'S CENTER OF SEVERAL POINTS OF SOME POLYNORMATED SPACE RELATIVE TO THE SET OF THIS SPACE

The problems related to the need to approximate complex mathematical objects in the best possible way with simpler and more convenient ones arise in various sections of mathematical science.

An important class of approximation theory problems is the best simultaneous approximation of several elements. The problem of finding the Chebyshev center of several points of a linear normalized space relative to the set of this space can be attributed to the problems of best simultaneous approximation of several elements. This task consists in finding in a given set of linear normed space such a point (the relative Chebyshev center) the maximum distance to which from several fixed points of space would be the smallest, in other words not exceeding the maximum distance from the given points to any other point of this set.

The problems of the best simultaneous approximation of several elements of a linear normed space by convex sets of this space from single positions were considered, in particular, in works [1, 2]. In practice, one has to deal with such problems, in which, when finding the Chebyshev's center of several given points of a linear normed space relative to the set of this space, appear weighted distances. The task of finding the weighted distances of the Chebyshev’s center was considered, in particular, in the paper [3]. In this work, the criteria of generalized Chebyshov’s center in the sense of the weighted distances of the of several points of a linear normed space relative to the convex set of this space, based on the duality ratio for the corresponding extremal problem, are established.

If in the problem of the Chebyshev's center of several points of a linear normed space, in which the distances between points are determined by weighted norms, the weighted norms are replaced, generally speaking, by different norms given on the corresponding linear space, then we obtain the problem of the Chebyshev's center of several points of some polynormed space, which is considered in this work.

It is clear that the problems about the Chebyshev's center of several points of a linear normed space, which were discussed above, are partial cases of the problem about the Chebyshev center of several points of some polynormed space.

Key words: *the linear normed space, the polynormed space, the Chebyshev's center, the extremal element, the existence conditions of the extremal element.*

Отримано: 29.08.2024