amount of processed data, but allows to involve a larger number of parallel processors. This approach is in conflict with a method that reduces the amount of processed data, and there is a need to maintain a balance between these two methods in a parallel computing model. For the quantum computing model, the connection of qubits is a key factor in determining the quantum volume. The physical scheme determines which pairs of qubits can be entangled in a quantum computer. Information is provided about the ongoing scientific forum «Calculation optimization issues», the subject of which is closely related to the topic (1969-2023).

Key words: *S-word arithmetic, high-precision calculations, sequential computing model, parallel computing model, quantum computing model, S-word operation of addition, S-word operation of subtraction, S-word operation of comparison, S-word operation of sum.*

Отримано: 30.07.2024

УДК 518.85
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.82-95

Є. В. Івохін, д-р фіз.-мат. наук, професор,
К. Е. Юштін, канд. фіз-мат. наук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ДВОЕТАПНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА НА ОСНОВІ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ

Одним з основних завдань логістики є пошук найбільш ефективного маршруту в задачі комівояжера на заданій транспортній мережі, що дозволяє обслуговувати максимальну кількість споживачів, враховуючи певні критерії. У типовій задачі комівояжера критеріальною функцією найчастіше виступає довжина або тривалість маршруту. Однак, така постановка не враховує суб'єктивність оцінок тривалості переміщень за етапами, що може бути пов'язано з різними об'єктивними та суб'єктивними факторами. Розглянуто постановку задачі комівояжера з нечітко визначеною тривалістю переміщень між вузлами мережі. В основу підходу для розв'язання задачі покладено генетичний алгоритм з вдосконаленими процедурами мутації та формування різноманітності в популяціях. Для формалізації нечітких величин застосовується трапецієподібні нечіткі числа, що подаються в узагальненому випадку, який базується на застосуванні гаусовського розподілу та відповідних характеристик. На основі поєднання генетичного алгоритму та методу кластеризації Варда запропоновано двоетапну схему розв'язування оптимізаційної задачі комівояжера на заданій транспортній мережі. На першому етапі проводиться процедура кластеризації за методом Варда. На другому етапі на основі отриманого набору кластерів та знайдених оптимальних міжкластерних відстаней проводиться оптимізація тривалості маршрутів всередині кластерів. Для тестування ефективності створеного методу згенеровано два види моделей: з обмеженою кількістю доступних шляхів та з повнозв'язною топологією. Проведено обчислювальні експерименти по застосуванню розробленого методу для розв’язання задачі комівояжера з тривалістю переміщень між містами у вигляді нечітких чисел. Проведено порівняння результатів чисельних розрахунків. Отримані результати показали ефективність застосування попередньої кластеризації при використанні генетичного алгоритму для знаходження найкращих локальних оптимумів за однаковими вхідними параметрами.

Ключові слова: *метод Варда, задача комівояжера, неточність, невизначеність, нечіткі числа, генетичний алгоритм, дефазифікація, нечітке представлення часу.*

Проблема пошуку найкоротшого шляху між довільними містами (пунктами) транспортної мережі залишається актуальною в сучасних умовах, оскільки обсяги та потреби в транспортно-логістичних послугах постійно зростають. Основним завданням є пошук найбільш ефективного маршруту, що дозволяє обслуговувати максимальну кількість споживачів, враховуючи певні критерії. Невдалий вибір шляху доставки може призвести до додаткових ресурсних витрат, обсяги яких слід мінімізувати. Задача комівояжера (Travelling Salesman Problem, TSP, далі ЗК) є класичною проблемою комбінаторної оптимізації [1, с. 53-73], у якій необхідно знайти найкоротший можливий маршрут, що проходить через заданий список міст із відвідуванням кожного міста рівно один раз і поверненням до початкової точки. Розв'язання ЗК має широке застосування в логістиці, плануванні маршрутів, виробництві та багатьох інших галузях [2, с. 73-102].

Одним із ключових застосувань задачі комівояжера є оптимізація маршрутів постачання товарів та послуг. Її розв’язання дозволяє мінімізувати час доставки та скоротити витрати на транспортування, що є критичним для компаній, які працюють у галузі логістики та роздрібної торгівлі. Задача комівояжера також широко застосовується в оптимізації виробничих операцій, зокрема в автоматизованих системах, де мінімізується шлях переміщення інструменту під час виробничих процесів. Проблема пошуку маршруту комівояжера добре відома в науковій літературі та залишається однією з найскладніших для розв’язання, що класифікується за складністю як NP-повна.

Існує багато методів розв'язання задачі комівояжера, які можна розподілити на дві групи: точні та наближені (метаевристичні). Точні методи потребують значних обчислювальних ресурсів і часу для знаходження оптимального розв’язку. Наприклад, до цієї групи належить метод динамічного програмування [3]. У реальному житті транспортні умови можуть швидко змінюватися, тому швидкість пошуку оптимальних маршрутів стає критично важливою. Саме тому дослідники часто звертаються до наближених методів, таких як жадібні алгоритми, імітація відпалу (RS), алгоритми мурашиних колоній та генетичні алгоритми. Наближені методи дозволяють швидко отримати рішення в межах заданих обмежень. Вибір методу залежить від розміру задачі та доступного часу на обчислення. Для малих і середніх завдань (до кількох десятків міст) можуть бути ефективними точні методи, тоді як для дуже великих завдань (сотні міст і більше) зазвичай застосовуються евристичні або метаевристичні підходи. Евристики часто виявляються конструктивними, оскільки забезпечують знаходження прийнятних розв'язків у розумні строки, особливо в умовах обмеженості обчислювальних ресурсів [4].

Найбільш змістовних результатів в розв'язанні задачі комівояжера досягнуто завдяки використанню наближених методів. Типовий підхід до пошуку розв'язків в оптимізаційних задачах із застосуванням таких методів базується на ітераційному процесі, спрямованому на покращення результатів. Протягом кожної ітерації знаходиться рішення, яке є кращим у відповідному околі. Якщо таке рішення отримано, воно стає поточним, і процес переходить до наступної ітерації. Цей процес триває доти, поки приріст цільової функції не зменшиться практично до нуля або не буде виконано задану кількість ітерацій. Очевидно, що такі методи орієнтовані на пошук локальних оптимумів, і знайдений оптимум може значною мірою залежати від вибору початкової точки розрахунків. Глобальний оптимум може бути знайдений лише випадково. Для підвищення ймовірності знаходження глобального оптимуму використовується багаторазовий експеримент із різними початковими точками, що значно збільшує час пошуку остаточного результату.

У зв'язку з цим виникає інтерес до розробки алгоритмів, які б не мали зазначеного недоліку. До таких належать генетичні алгоритми, що є стохастичними евристичними методами оптимізації. Основна ідея цих алгоритмів базується на теорії еволюційного розвитку видів, описаній у роботі [5, с. 51-94]. Головним механізмом еволюції є природний відбір, який полягає в тому, що більш пристосовані особини мають вищі шанси на виживання і розмноження, і, відповідно, дають більше потомства порівняно з менш пристосованими. Завдяки передачі генетичної інформації нащадки успадковують від батьків їхні основні характеристики. У біології за збереження генетичної інформації індивіда відповідають хромосоми, що складаються з набору генів. Під час розмноження організмів відбувається злиття двох батьківських клітин, яке формує генетичний матеріал нащадку. Основний механізм взаємодії при цьому – схрещування (також відоме як кросовер або кросинговер), під час якого ДНК батьків розділяється на дві частини, а потім відбувається обмін цими частинами. У процесі наслідування можливі мутації під впливом різних факторів, які можуть змінювати окремі гени в клітинах одного з батьків. Змінені гени передаються нащадку, надаючи йому нових властивостей. Якщо ці нові властивості є корисними, вони зберігаються в генетичному наборі та призводять до стрибкоподібного підвищення пристосованості виду.

Генетичні алгоритми (ГА) використовуються в широкому спектрі областей, серед яких наприклад, оптимізація, машинне навчання, інженерне проектування, фінанси, біологія та штучний інтелект [6, с. 48-54]. Проте ГА не є універсальним методом для вирішення всіх оптимізаційних проблем [7, с. 59-80]. Такі алгоритми найкраще підходять для задач, які характеризуються:

- складністю: задача повинна бути складною для розв’язання на основі традиційних методів;
- потужною сукупністю допустимих розв’язків: існує велика кількість можливих розв’язків задачі;
- функцією оцінювання: має бути критеріальна функція, яка дозволяє оцінювати якість кожного можливого рішення.

Якщо оптимізаційна задача володіє вказаними характеристиками, генетичні алгоритми можуть стати ефективним способом її розв'язання. У випадку задачі комівояжера всі ці характеристики наявні, а кількість можливих варіантів розв'язку дорівнює $(n-1)!$, де n – кількість міст.

Генетичні алгоритми давно привертають увагу в галузі дослідження та створення методів розв'язування оптимізаційних задач на основі метаевристичних підходів. Для покращення ефективності генетичних алгоритмів часто використовують модифікації, зокрема на основі одного з методів вдосконалення мутації та підвищення різноманітності популяцій, що належить до групи PNP (Pick Near Point) алгоритмів [7, с. 27-58]. У цьому випадку частина нових мутацій створюється шляхом незначної зміни одного або кількох параметрів існуючого найкращого розв'язку. Це дозволяє вдосконалити дослідження простору розв'язків поблизу поточних локально оптимальних рішень, підтримувати різноманітність у популяції для уникнення передчасної збіжності, а також вирішувати наявні алгоритмічні конфлікти.

У цьому дослідженні запропоновано підхід до розв'язання задачі комівояжера з використанням генетичних алгоритмів, що включає два етапи. На першому етапі відбувається кластеризація вузлів (міст) транспортної мережі в окремі кластери. На другому етапі застосовується генетичний алгоритм для розв'язання задачі комівояжера всередині кожного кластеру. Таким чином, задача комівояжера розбивається на підзадачі, де оптимальні маршрути визначаються шляхом мінімізації тривалості переміщень комівояжера з використанням генетичного алгоритму.

Для кластеризації початкових даних (сукупності міст мережі) пропонується застосувати метод Варда, який забезпечує мінімальний міжкластерний маршрут. Згідно з класичним методом Варда, відстань між кластерами визначається як нормований приріст суми квадратів відстаней об'єктів до центрів кластерів, отриманий в результаті їх об'єднання [8, с. 126-163]. На відміну від інших методів кластерного аналізу, метод Варда використовує дисперсійний аналіз для оцінки відстаней між кластерами. На кожному кроці алгоритму попарно об'єднуються два кластери, обрані таким чином, щоб мінімізувати збільшення цільової функції, представленої внутрішньогруповою сумою квадратів відстаней. Метод Варда спрямований на поступове об'єднання близько розташованих кластерів і прагне створювати кластери оптимального розміру, навіть коли кількість кластерів заздалегідь невідома.

У типовій задачі комівояжера критеріальною функцією найчастіше виступає довжина або тривалість маршруту. Однак, така постановка не враховує суб'єктивність оцінок тривалості переміщень за етапами, що може бути пов’язано з різними об’єктивними та суб’єктивними факторами. Розглянемо постановку задачі комівояжера з нечітко визначеною тривалістю переміщень у транспортній мережі [9]. Як і раніше, необхідно знайти циклічну перестановку номерів міст, які має відвідати комівояжер, щоб мінімізувати затрати нечітко заданого часу, при цьому кожен пункт має бути відвіданий не більше одного разу. Математичне формулювання нечіткої задачі комівояжера можна подати таким чином: мінімізувати наступну цільову функцію з урахуванням визначеного способу порівняння нечітких чисел:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{t}_{ij}x_{ij}\ , \tag{1}$$

де часові витрати на переміщення між пунктами задаються у вигляді матриці $\tilde{T}=\{\tilde{t}_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,n}$, з елементами у вигляді нечітких чисел [10, с. 1-26], а можливі шляхи переміщень між містами визначаються матрицею X, за умови виконання обмежень:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \text{ для всіх } j=1,2,...,n,\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \text{ для всіх } i=1,2,...,n,\\ i-j+nx_{ij}\le n-1,\ 1\le i\ne j\le n,\\ x_{ij}=0 \text{ або } 1 \text{ для всіх } i,j=1,2,...,n.\end{gathered} \tag{2}$$

Нечіткі величини тривалості переміщення $\tilde{t}_{ij}$ між довільними містами $i, j = \overline{1,n}$, будемо задавати у вигляді трапецієподібних нечітких чисел.

Означення. Нечітким трапецієподібним числом $\tilde{A}$ [10, с. 45-68] називається впорядкована четвірка чисел дійсних чисел (a_1, a_2, a_3, a_4), $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$, для яких визначено функцію належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ вигляду:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, \text{якщо } a_1 \le x \le a_2, \\ 1, \text{ якщо } a_2 \le x \le a_3, \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, \text{ якщо } a_3 \le x \le a_4. \end{cases} \tag{3}$$

Якщо до подання трапецієподібного нечіткого числа застосувати підхід на основі гаусовського розподілу з відповідними характеристиками, то в узагальненому випадку трапецієподібне нечітке число можна представити дещо в іншому вигляді:

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = ([a_2, a_3], \alpha, \beta) = (m, w, \alpha, \beta), \tag{4}$$

де використовується середня точка $m = \dfrac{a_2 + a_3}{2}$ та напівширина плато $w = \dfrac{a_3 - a_2}{2}$, а коефіцієнти $\alpha = a_2 - a_1$ та $\beta = a_4 - a_3$ визначають лівий та правий розподіл нечіткого числа $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ відповідно.

Для оперування з нечіткими числами потрібно визначити операції, виходячи з наведеного вище опису. В якості середньої точки береться звичайне середньоарифметичне значення границь плато, лівий та правий розподіли розглядаються відповідно до правила решітки, за яким для довільних дійсних чисел a, b покладемо $a \cup b = \max\{a, b\}$ та $a \cap b = \min\{a, b\}$.

Тоді для довільних трапецієподібних нечітких чисел $\tilde{A} = \left(m(\tilde{A}), w(\tilde{A}), \alpha_1, \beta_1\right)$ та $\tilde{B} = \left(m(\tilde{B}), w(\tilde{B}), \alpha_2, \beta_2\right)$ можна визначити операції додавання, віднімання, множення та ділення, які у загальному випадку позначимо символом $\circ$:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \circ \tilde{B} &= \left(m(\tilde{A}) \circ m(\tilde{B}), w(\tilde{A}) \cup w(\tilde{B}), \alpha_1 \cup \alpha_2, \beta_1 \cup \beta_2\right) = \\ &= \left(m(\tilde{A}) \circ m(\tilde{B}), \max\left(w(\tilde{A}), w(\tilde{B})\right), \max(\alpha_1, \alpha_2), \max(\beta_1, \beta_2)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Остаточно маємо

$$\tilde{A}+\tilde{B}=\left(m\left(\tilde{A}\right)+m\left(\tilde{B}\right),w\left(\tilde{A}\right)\cup w\left(\tilde{B}\right),\alpha_1\cup\alpha_2,\beta_1\cup\beta_2\right)=$$

$$=\left(m\left(\tilde{A}\right)+m\left(\tilde{B}\right),\max\left(w\left(\tilde{A}\right),w\left(\tilde{B}\right)\right),\max\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\max\left(\beta_1,\beta_2\right)\right).$$

$$\tilde{A}-\tilde{B}=\left(m\left(\tilde{A}\right)-m\left(\tilde{B}\right),w\left(\tilde{A}\right)\cup w\left(\tilde{B}\right),\alpha_1\cup\alpha_2,\beta_1\cup\beta_2\right)=$$

$$=\left(m\left(\tilde{A}\right)-m\left(\tilde{B}\right),\max\left(w\left(\tilde{A}\right),w\left(\tilde{B}\right)\right),\max\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\max\left(\beta_1,\beta_2\right)\right).$$

$$\tilde{A}\times\tilde{B}=\left(m\left(\tilde{A}\right)\times m\left(\tilde{B}\right),w\left(\tilde{A}\right)\cup w\left(\tilde{B}\right),\alpha_1\cup\alpha_2,\beta_1\cup\beta_2\right)=$$

$$=\left(m\left(\tilde{A}\right)\times m\left(\tilde{B}\right),\max\left(w\left(\tilde{A}\right),w\left(\tilde{B}\right)\right),\max\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\max\left(\beta_1,\beta_2\right)\right).$$

$$\tilde{A}\div\tilde{B}=\left(m\left(\tilde{A}\right)\div m\left(\tilde{B}\right),w\left(\tilde{A}\right)\cup w\left(\tilde{B}\right),\alpha_1\cup\alpha_2,\beta_1\cup\beta_2\right)=$$

$$=\left(m\left(\tilde{A}\right)\div m\left(\tilde{B}\right),\max\left(w\left(\tilde{A}\right),w\left(\tilde{B}\right)\right),\max\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\max\left(\beta_1,\beta_2\right)\right).$$

Для проведення операцій порівняння та ранжування нечітких чисел використаємо спосіб на основі медіанного середнього значення. Іншими словами, якщо для кожного $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)\in F\left(R\right)$ визначено функцію ранжування $\Re:F\left(R\right)\to R$ з медіанним середнім значенням у вигляді $\Re\left(\tilde{A}\right)=\left[\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)+\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)\right]$, тоді для довільних двох трапецієподібних нечітких чисел $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$ та $\tilde{B}=\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)$ маємо наступні можливі варіанти порівняння:

- $\tilde{A}>\tilde{B}$ тоді і лише тоді, якщо $\Re\left(\tilde{A}\right)>\Re\left(\tilde{B}\right)$;
- $\tilde{A}<\tilde{B}$ тоді і лише тоді , якщо $\Re\left(\tilde{A}\right)<\Re\left(\tilde{B}\right)$;
- $\tilde{A}\approx\tilde{B}$ тоді і лише тоді , якщо $\Re\left(\tilde{A}\right)=\Re\left(\tilde{B}\right)$.

Процеси обробки нечітких чисел включають етап дефазифікації, який полягає в перетворенні нечіткого результату в чітке (числове) значення. Це ключовий крок у методиці застосування нечіткого підходу, особливо в задачах нечіткого управління та бізнес-логіки, де необхідно перетворити нечіткі рішення на конкретні події або числові значення. Існують різні методи дефазифікації, зокрема, найбільш поширені – метод центру тяжіння (Center of Gravity, CoG) або центроїду, метод середнього максимуму та метод максимуму. Для порівняння результатів дослідження ми будемо використовувати метод центру тяжіння, де точка дефазифікації визначається як центр тяжіння нечіткої множини. Для дискретної множини формула виглядає наступним чином [11, с. 89-116]:

$$CoG = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)}, \tag{6}$$

де x_i – точки в просторі результату, а $\mu(x_i)$ – ступінь належності кожної точки.

Розглянемо результати розв'язання задачі комівояжера на прикладі транспортної схеми, яку наведено в роботі [12]. Згенеруємо нечіткі величини тривалості переміщень між окремими пунктами (рис.1).

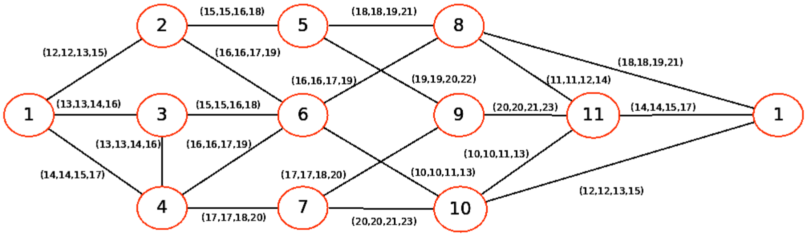

Рис. 1. *Приклад задачі комівояжера з нечіткою тривалістю переміщень між вузлами*

Для проведення чисельних розрахунків на основі програмної реалізації у матриці $\tilde{T}$ діагональні елементи $\tilde{t}_{ii}$ необхідно задати великими додатними числами для того, щоб отримувати у розв'язку величини $x_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, 2, ..., n$. У подальшому викладенні для верифікації результатів розв'язання нечіткої задачі наводяться чисельні розрахунки для аналогічної чіткої задачі комівояжера.

Таким чином, для групування в кластери пропонується використати метод Варда. Хоча цей метод зазвичай застосовується для аналізу неперервних даних, представлених кількісними атрибутами, його можна адаптувати для роботи з дискретними даними, такими як набори шляхів. Це досягається шляхом групування шляхів за рівнем їхньої схожості. У нашому випадку, об'єктами групування будуть шляхи з визначеною тривалістю переміщення між вузлами на транспортній мережі. На початковому етапі передбачається створення 20 кластерів.

Щоб визначити метрику схожості між різними шляхами, можна використовувати, наприклад, кількість спільних вузлів між двома шляхами або інвертовану географічну відстань між ними. У нашому дослідженні шляхи визначаються за допомогою нечіткої тривалості переміщень між точками. Для вирішення задачі кластеризації та розрахунку внутрішньокластерної відстані в контексті групування шляхів найбільш ефективними метриками можуть бути сума парних відстаней та максимальна відстань, які базуються на часовій відстані між довільними парами шляхів у кластері. Для кластера C зі шляхами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ внутрішньокластерна величина тривалості переміщень D визначається як:

$$D(C) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} d\left(p_i, p_j\right), \tag{7}$$

або як максимальна часова відстань

$$D_{\max}(C) = \max_{i \neq j} \left\{ d\left(p_i, p_j\right) \right\}, \tag{8}$$

де $d\left(p_i, p_j\right)$ – час між довільними шляхами p_i та p_j, який можна обчислити за допомогою довільної числової метрики (наприклад, євклідової відстані або відстані Хемінга).

Для розрахунку величин тривалості міжкластерних переміщень будемо використовувати різні підходи в залежності від вимог задачі та характеристики даних. Серед підходів, що при цьому найчастіше використовуються, слід вважати розрахунок середньої, мінімальної та максимальної часової відстані між парами елементів з двох кластерів. Ці методи визначають способи обчислення відстані між кластерами, які, відповідно, називаються методом найближчого сусіда $d(A,B) = \min\left(d(a,b) : a \in A, b \in B\right)$, далекого сусіда $d(A,B) = \max\left(d(a,b) : a \in A, b \in B\right)$ та середньої відстані, як середнє усіх квадратів парних відповідей між елементами двох кластерів $d(A,B) = \frac{1}{|A| \times |B|} \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} d^2(a,b)$.

Варто зазначити, що вибір конкретного методу обчислення відстаней між кластерами значною мірою залежить від специфіки задачі. Наприклад, відомо, що метод найближчого сусіда може призвести до ланцюжкового ефекту, коли кластери витягуються в довгі ланцюжки, тоді як метод далекого сусіда зазвичай дозволяє сформувати більш компактні та чітко розмежовані кластери. Метод середньої відстані забезпечує баланс між цими підходами, що робить його ефективним вибором для багатьох прикладних задач. З огляду на це, у розглянутому випадку пропонується використовувати метод середньої відстані для обчислення відстаней між кластерами.

Таким чином, для розв'язання задачі комівояжера пропонується двоетапний алгоритм, який передбачає кластеризацію міст маршруту, пошук оптимальних маршрутів комівояжера в межах кожного кластеру за допомогою генетичних алгоритмів, а також подальше об'єднання кластерів для формування остаточного рішення задачі комівояжера на заданій транспортній мережі:

1. Формуємо всі можливі вузли ЗК, як беруть участь в побудові маршруту.
2. Визначаємо оптимальну кількість кластерів, до яких групуються вузли ЗК, використовуючи метод Варда.
3. Визначаємо найближчі вузли для міжкластерних шляхів.
4. Ітеративно перебудовуємо два крайні вузли в кожному кластері, використовуючи оптимальні міжкластерні відстані з найближчими сусідніми кластерами.
5. Визначаємо генетичні параметри, такі як: ймовірність схрещування, ймовірність мутації, кількість осіб і кількість ітерацій ГА.
6. Створюємо початкову популяцію шляхів всередині кожного кластеру для обраних двох крайніх вузлів в кластері на кроці 4.
7. Застосуємо генетичний оператор відбору у кожному кластері.
8. Запускаємо генетичний оператор зхрещування для кожного кластера.
9. Виконаємо оператор генетичної мутації для кожного кластера.
10. Повторюємо кроки 8, 9 і 10 відповідно до кількості ітерацій, використовуючи результати кроку 10 як початкову популяцію на кроці 8.
11. Визначаємо близькість між кластерами з метою визначити маршрут для послідовного приєднання.
12. Отримуємо *k* кластерів і визначаємо тривалість отриманого маршруту для початкової задачі комівояжера.

Результати початкових етапів процесу кластеризації для наведеного прикладу наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Крок	**Об’єднання клатерів**	**Чітка метрика**	**Нечітка метрика (CoG)**
1	6-10 та 10-11	150	$\frac{363}{2}$
2	1-2 та 1-3	$\frac{985}{4}$	$\frac{1149}{4}$
3	6-10-11 та 11-8	$\frac{2023}{6}$	$\frac{1217}{3}$
4	2-1-3 та 3-4	$\frac{3083}{6}$	$\frac{1793}{3}$

Далі спостерігається зростання величини міжкластерної відстані і процес кластеризації можна зупинити. Після першого етапу маємо 2 кластери з чотирьох вузлів (2-1-3-4 та 8-11-10-6) та кластери з 4 окремих вузлів (4, 5, 7 та 9). Структуру розбиття траспортної мережі на кластери наведено на рис.2.

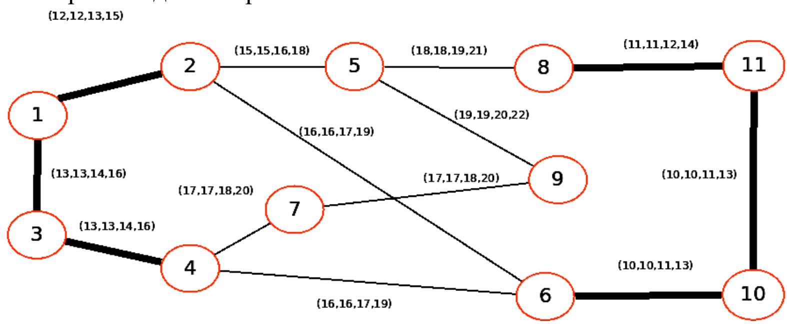

Рис. 2. *Структура кластерів після першого етапу*

В результаті проведення подальшої оптимізації з урахуванням величин мінімальної міжкластерної відстані отримаємо остаточний розв’язок (рис. 3).

Таким чином, оптимальний розв’язок нечіткої задачі комівояжера (1), (2) подається маршрутом

$$1 \to 2 \to 6 \to 10 \to 11 \to 8 \to 5 \to 9 \to 7 \to 4 \to 3 \to 1,$$

довжина якого подається нечітким числом $(156,156,167,189)$. Цей результат співпадає з отриманим у [12] оптимальним маршрутом, дефазифіковане на основі методу центру тяжіння *CoG* значення довжини якого складає 156 одиниць. Це дозволяє стверджувати, що в результаті отримано один з наближених варіантів нечіткого оптимального розв’язку.

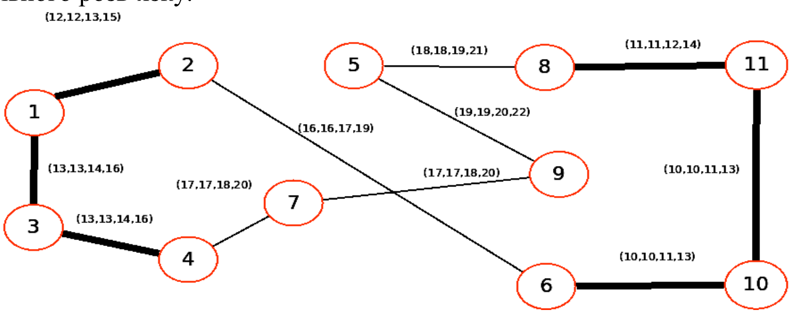

Рис. 3. *Остаточний розв’язок задачі комівояжеру*

Далі розглянемо результаті чисельних розрахунків щодо використання двоетапного підходу для задачі комівояжера у випадку різної кількості міст за умови, що міста випадково генеруються на площині 200х200 і ймовірність існування прямого шляху між містами дорівнює 50%.

У таблиці 2 наведено порівняльні результати, отримані на основі ГА без використання PNP (середнє погіршення у порівнянні з оптимальною тривалістю маршруту) та використання двоетапного методу без PNP (табл. 2), а також результати на основі на основі ГА з використанням PNP (середнє погіршення у порівнянні з оптимальною тривалістю маршруту) та використання двоетапного методу (табл. 3).

Таблиця 2

Порівняння результатів чисельних розрахунків
(ГА без використання PNP)

К-ть міст	Класичний ГА без PNP, гірше на, %,		двохетапний ГА без PNP, гірше на, %,	
	100%	**50%**	**100%**	**50%**
22	3.33%	5.22%	2.91%	4.62%
23	3.55%	5.51%	3.13%	4.88%
24	3.81%	5.92%	3.32%	5.34%
25	4.22%	6.45%	3.65%	5.72%
26	4.77%	7.14%	3.95%	6.21%

Таблиця 3

Порівняння результатів чисельних розрахунків
(ГА з використанням PNP)

К-ть міст	Класичний ГА з PNP, гірше на, %		Двохетапний ГА з PNP, гірше на, %,	
	100%	**50%**	**100%**	**50%**
22	3.21%	5.05%	2.90%	4.46%
23	3.41%	5.25%	3.05%	4.66%
24	3.69%	5.63%	3.22%	5.12%
25	4.01%	6.16%	3.49%	5.54%
26	4.45%	6.79%	3.82%	6.01%

За результатами чисельного експерименту, як видно з таблиць 2 та 3, можна побачити, що використання двоетапного методу на базі генетичного алгоритму для вирішення проблеми комівояжеру дозволяє отримати відносно кращі результати, порівняно з використанням лише генетичного алгоритму.

Висновки. На основі поєднання генетичного алгоритму та методу Варда запропоновано двоетапну схему розв'язування оптимізаційної задачі комівояжера на заданій транспортній мережі, зміст якої полягає у застосуванні на першому етапі процедури кластеризації вузлів за методом Варда, а на другому – використання генетичного алгоритму для знаходження найбільш точного наближеного розв'язку шляхом розв'язання отриманих підзадач в усіх кластерах. Розглянуто модель нечіткої задачі комівояжера за умов нечіткого подання тривалості переміщення між окремими вузлами транспортної мережі. Для проведення розрахунків запропоновано формалізацію нечітких величин тривалості переміщень у мережі у вигляді нечітких трапецієподібних чисел, наведено способи апроксимації нечітких величин, арифметичних дій та способів впорядкування нечітких чисел. Запропоновано спосіб перетворення трапецієподібних нечітких чисел до спеціального вигляду. Запропоновану методику проілюстровано прикладами, наведено порівняння результатів, отриманих на основі запропонованого підходу, та результатів на основі прямого застосування генетичного алгоритму.

Список використаних джерел:

1. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization (6-th edition). Springer. 2018. ISBN 978-3-540-71843-7.
2. Golden B., Raghavan S. The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges. 2008. ISBN 978-0-387-77777-1.
3. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem. *J. ACM*. 1962. № 9 (1). P. 61-63.
4. Marinakis Y. Heuristic and Metaheuristic Algorithms for the Traveling Salesman Problem. *Encyclopedia of Optimization*. Boston, 2008. P. 1498-1506.
5. Randy L. Haupt, Sue Ellen Haupt. Practical Genetic Algorithms. *John Wiley*. 2004. ISBN 978-0-471-45565-3.
6. Kosko B. Neural Networks and Fuzzy Systems. *A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. 1992. 449 p.
7. Goldberg D. E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. First Edition. Addison-Wesley. 1989. ISBN 978-0201157673.
8. Kaufmann L., Rousseeuw P. J. Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis. John Wiley. 1990. ISBN 978-0-47031680-1.
9. Trigui S., Cheikhrouhou O., Koubaa A. et al. FL-MTSP: a fuzzy logic approach to solve the multi-objective multiple traveling salesman problem for multi-robot systems. *Soft Comput*. 2017. Vol. 21. P. 7351-7362.
10. Yager R. R., Zadeh L. A. An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems. Springer. 1992. 363 p. ISBN 978-0792391913.
11. Timothy J. Ross. Fuzzy Logic with Engineering Applications. 3rd edition. John Wiley. 2010. ISBN 978-0470743768.
12. Ivohin E. V., Gavrylenko V. V., Ivohina K. E. On the recursive algorithm for solving the traveling salesman problem on the basis of the data flow optimization method. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2023. № 3. P. 141-147.

TWO-STAGE METHOD FOR SOLVING THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM USING THE GENETIC ALGORITHM

One of the main tasks in logistics is to find the most efficient route in the traveling salesman problem on a given transportation network, allowing for the servicing of the maximum number of customers while considering certain criteria. In the typical traveling salesman problem, the objective function is most often the route length or duration. However, such a formulation does not account for the subjectivity in evaluating the travel durations at different stages, which may be influenced by various objective and subjective factors. The problem of the traveling salesman with fuzzily defined travel durations between network nodes is considered. The approach to solving the problem is based on a genetic algorithm with enhanced mutation procedures and population diversity generation. Trapezoidal fuzzy numbers are used to formalize fuzzy values, presented in the generalized case based on the application of Gaussian distribution and corresponding characteristics. A two-stage scheme for solving the optimization problem of the traveling salesman on a given transportation network is proposed, combining the genetic algorithm and Ward's clustering method. In the first stage, a clustering procedure is conducted using Ward's method. In the second stage, based on the obtained set of clusters and the identified optimal inter-cluster distances, route duration optimization is performed within the clusters. To test the efficiency of the developed method, two types of models were generated: one with a limited number of available paths and one with a fully connected topology. Computational experiments were conducted to apply the developed method to solving the traveling salesman problem with travel durations between cities represented as fuzzy numbers. A comparison of numerical calculation results was performed. The obtained results demonstrated the effectiveness of preliminary clustering when using the genetic algorithm to find the best local optima under the same input parameters.

Keywords: *Ward's method, traveling salesman problem, imprecision, uncertainty, fuzzy numbers, genetic algorithm, defuzzification, fuzzy time representation.*

Отримано: 12.09.2024