

УДК 517.95:519.63

DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.96-106

А. С. Калініченко

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ У НАСИПІ З ПРЯМОКУТНИМ ПЕРЕРІЗОМ МЕТОДАМИ РОТЕ ТА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Самозаймання насипу матеріалу (вугілля, торф, зерно) відбувається як наслідок накопичення тепла, виділеного екзотермічною реакцією окиснення, що дає можливість розглядати насип як тіло з внутрішнім джерелом тепла. Дослідження процесів самозаймання методами математичного моделювання приводить до необхідності знаходження розв'язку початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності. Це не завжди можна зробити аналітично, тому має сенс використання методів чисельного аналізу.

Метою цієї статті є застосування методу Роте у поєднанні з методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна для знаходження розв'язку початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності, що виникає при математичному моделюванні процесів самозаймання насипу сипучого матеріалу циліндричної форми з прямокутною основою.

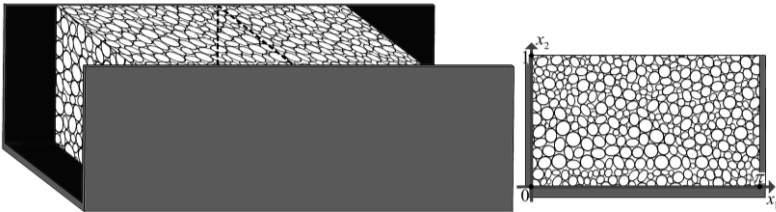
Для досягнення поставленої мети методом Роте після дискретизації рівняння теплопровідності за часовою змінною було отримано послідовність крайових задач, кожна з яких була зведена до рівняння Гаммерштейна. Для цього нелінійного операторного рівняння було побудовано ітераційний процес двобічного методу з умовою його зупинки, отриманою завдяки апостеріорній оцінці похибки. Апроксимація потужності внутрішнього джерела тепла була проведена за допомогою експоненціальної залежності.

У результаті проведеного обчислювального експерименту було отримано послідовність наближених розв'язків. Побудовані для них графіки теплокарт дозволили розглянути з часом перебіг процесу самозаймання в перерізі насипу циліндричної форми з прямокутною основою та виділити області накопичення тепла.

**Ключові слова:** математичне моделювання, двовимірне напівлінійне рівняння теплопровідності, метод двобічних наближень, метод Роте, процеси самозаймання, рівняння Гаммерштейна, функція Гріна.

**Вступ.** Широке застосування у промисловій та господарській діяльності насипних матеріалів, таких як зерно, вугілля, бавовна, торф, створює необхідність контролю та профілактики пожеж, оскільки

вони мають схильність до самозаймання, тобто до загоряння без впливу зовнішнього джерела запалювання. Математичне моделювання цього процесу пов'язане з необхідністю розв'язання початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності, що часто неможливо виконати аналітично. Тому застосування до знаходження її розв'язку методів чисельного аналізу, зокрема методу Рунге у поєднанні з ітераційним методом двобічних наближень є актуальною науковою задачею. У цій статті розглянуто їх застосування до задачі теплообміну в циліндричному тілі, основа якого є прямокутною областю  $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq b, 0 \leq x_2 \leq a\}$  зі сторонами  $a = 1$  та  $b = \pi$ , що має внутрішнє джерело тепла. Такий вибір форми тіла обумовлюється практичними міркуваннями щодо фізичного сенсу задачі та покликаний відобразити форму контейнерів для збереження насипних матеріалів, моделювання розподілу тепла у яких і має практичний сенс для попередження самозаймання. Приклад насипу вугілля, що має таку форму, наведено на рис. 1 (зліва зображено насип; пунктиром виділено  $\partial\Omega$ ; справа зображено  $\Omega$ ).



*Рис. 1. Зображення насипу вугілля циліндричної форми та його перерізу, що описується областю  $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq \pi\}$*

**Постановка задачі.** Розглянемо процес самозаймання у насипі, що має форму циліндричного тіла з прямокутною основою, яка дозволяє стверджувати, що його один вимір (сторона) значно більший за два інші. Виділимо область  $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq b, 0 \leq x_2 \leq a\} \subset \mathbb{R}^2$ , яка описує переріз насипу, перпендикулярний до вказаного виміру (де  $a$ ,  $b$  – його розміри). Процес самозаймання відбувається як наслідок акумуляції всередині тепла, достатнього для початку горіння. Це можливо, якщо в насипі відбувається екзотермічна реакція, що виділяє більше тепла, ніж може розсіятися у насипі та випромінитися у навколишнє середовище. Наприклад, для вугілля виділяють такі процеси як хімічна адсорбція, фізична адсорбція та окиснення [1]. З вказаних реакцій окиснення є найбільш екзотермічною, тобто в її результаті виділяється більше тепла. Таким чином, при побудові моделі процесів самозаймання іншими реакціями можна знехтувати.

Як бачимо на прикладі вугілля, можна вважати, що всередині насипу матеріалу є внутрішнє джерело тепла. Тоді для моделювання процесів самозаймання застосовна теорія горіння та вибуху [2, 3]. Згідно з нею математичною моделлю розподілу температури  $T(\mathbf{x}, t)$  при самозайманні у насипі матеріалу, теплофізичні властивості якого є сталими, а розповсюдження тепла всередині нього відбувається лише через теплопровідність, є початково-крайова задача для рівняння теплопровідності. Для обраної форми насипу, оскільки один його вимір значно більший двох інших, варто розглядати двовимірну модель [4], що матиме вигляд

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T + f(T), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T_\partial(\mathbf{x}, t) \text{ на } \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

де  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – просторові координати,  $\rho$  – щільність матеріалу,  $C$  – питома теплоємність матеріалу,  $k$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $T_0(\mathbf{x})$  – початковий розподіл температури,  $T_\partial(\mathbf{x}, t)$  – межовий розподіл температури.

Початковий та межовий розподіли температур вносять в модель початковий стан насипу та його теплову взаємодію з навколишнім середовищем відповідно, причому  $T_\partial(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ . Останній доданок в (1) вносить в модель потужність внутрішнього джерела тепла, який згідно з теорією горіння можна апроксимувати, використовуючи рівняння Арреніуса, яке описує залежність швидкості реакції від температури. Тепло виділяється внаслідок реакції окиснення вугілля та прискорює хімічну реакцію, що підтверджує запропоновану апроксимацію. Отже,

$$f(T) = Q \cdot \rho \cdot A_0 \cdot e^{-\frac{E_a}{R(T+273)}}, \quad (4)$$

де  $Q$  – тепло, яке виділяє реакція на одиницю маси,  $A_0$  – передекспоненціальний коефіцієнт рівняння Арреніуса,  $E_a$  – енергія активації,  $R$  – універсальна газова стала [5].

Слідуючи принципам теорії горіння введемо у розгляд безрозмірну функцію зміни температури

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x}) + 273)} (T(\mathbf{x}, t) - T_0(\mathbf{x})).$$

Тоді

$$\theta_0(\mathbf{x}, t) = \frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x}) + 273)} (T(\mathbf{x}, 0) - T_0(\mathbf{x})) = 0,$$

$$\theta_{\partial}(\mathbf{x}, t) = \frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x}) + 273)} (T_{\partial}(\mathbf{x}, t) - T_0(\mathbf{x})).$$

Нехай на поверхні насипу підтримується стала температура. Тоді  $T_{\partial}(\mathbf{x}, t) = T_{\partial}^C(\mathbf{x})$ , а оскільки  $T_{\partial}^C(\mathbf{x})$  не залежить від часу і  $T_{\partial}(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ , то  $T_{\partial}^C(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x})$  на  $\partial\Omega$ , тому

$$\theta_{\partial}(\mathbf{x}, t) = \frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x}) + 273)} (T_{\partial}^C(\mathbf{x}) - T_0(\mathbf{x})) = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Апроксимацію (4), використовуючи розкладання експоненти в законі Арреніуса [6], можна записати для  $\theta(\mathbf{x}, t)$  так:

$$f(T) = Q \cdot \rho \cdot A_0 \cdot e^{-\frac{E_a}{R(T+273)}} \approx Q \cdot \rho \cdot A_0 \cdot e^{-\frac{E_a}{R(T_0+273)}} e^{\theta}. \quad (5)$$

Введемо коефіцієнт температуропровідності  $A = \frac{k}{\rho C}$  та позначення  $B \approx B(\mathbf{x}) = \frac{QA_0}{C} e^{-\frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x})+273)}}$  (в припущенні, що  $T_0(\mathbf{x})$  дозволяє

таку заміну). Тоді, враховуючи (1)-(3), (5) та обравши час моделювання  $t_0 > 0$ , маємо початково-крайову задачу для функції зміни температури  $\theta(\mathbf{x}, t)$  в перерізі насипу  $\Omega$  для процесу самозаймання на часовому інтервалі  $t \in [0, t_0]$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A \Delta \theta + B e^{\theta}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t_0], \quad (6)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t_0], \quad (7)$$

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (8)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, t_0]. \quad (9)$$

Параметри  $A > 0$  та  $B > 0$  відображають фізико-хімічні властивості насипу матеріалу та визначаються емпірично. Умова (7) має сенс в контексті розгляду функції зміни температури при екзотермічній реакції

**Метод розв'язання.** Застосуємо до задачі (6)-(9) метод Рунге в поєднанні з методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна [7].

На часовому відрізку  $[0, t_0]$  введемо сітку з кроком  $\tau$ , вузлами якої є точки:

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m\tau = t_0,$$

та введемо позначення

$$\Theta_j = \Theta_j(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}, t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Розв'язок задачі (6)-(9), відповідно до методу Рунге, шукатимемо вздовж прямих  $t = \text{const}$ . Для цього на прямій  $t = t_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , апроксимуємо відношенням скінченних різниць диференціальний оператор в лівій частині рівняння (6):  $\frac{\partial \theta}{\partial t} \approx \frac{\Theta_j - \Theta_{j-1}}{\tau}$ , та з похибкою  $O(\tau)$  замінимо на цій прямій вихідне рівняння нелінійним еліптичним рівнянням

$$-\Delta \Theta_j + \frac{1}{A\tau} \Theta_j = \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1} + \frac{B}{A} e^{\Theta_j} \Theta_j(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Використовуючи початкову умову (8) отримаємо значення  $\theta(\mathbf{x}, t)$  на часовому шарі  $t_0 = 0$ :  $\Theta_0(\mathbf{x}) = 0$ . Рівняння (10), яким було замінене вихідне (6), також розглядається при  $\mathbf{x} \in \Omega$ , тому зважаючи на (9) маємо крайову умову  $\Theta_j(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0$ .

Отже, знаходження розв'язку вихідної початково-крайової задачі (6)-(9) зведено до розв'язання послідовності крайових задач

$$-\Delta \Theta_j + \frac{1}{A\tau} \Theta_j = \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1} + \frac{B}{A} e^{\Theta_j} \Theta_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (11)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (12)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (13)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, t_0], \quad (14)$$

$$j = 1, 2, \dots, m; \quad \Theta_0(\mathbf{x}) = 0,$$

до кожної з яких послідовно застосуємо метод двобічних наближень на основі використання методу функції Гріна. Зауважимо, що на  $j$ -му часовому шарі ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) функція  $\Theta_{j-1}$  буде вже знайдена.

Записуємо еквівалентне задачі (11)-(14) інтегральне рівняння Гаммерштейна

$$\Theta_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{\Theta_j(\mathbf{s})} \right) ds, \quad (15)$$

де

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} x_2\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a} s_1\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} s_2\right)}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \frac{1}{A\tau}}$$

– функція Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольца  $-\Delta u + \frac{1}{A\tau} u$  ( $A > 0$ ) на  $\bar{\Omega}$ .

Зафіксуємо надалі  $j$  та розглянемо на  $j$ -му часовому шарі рівняння (15) у банаховому просторі  $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$  з введеною конусом  $\mathcal{K}_+$  напівпорядкованістю та нормою, що задається як  $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$ . Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор

$$T_j(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left( \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{u(\mathbf{s})} \right) d\mathbf{s},$$

ізотонний через те, що функція  $F(\mathbf{x}, u) = \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{x}) + \frac{B}{A} e^u$  є неперервною, монотонно зростаючою за  $u$  (оскільки похідна  $F'(\mathbf{x}, u) = \frac{B}{A} e^u$  додатна при  $u > 0$ ) та  $F(\mathbf{x}, u) > 0$  при  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $u > 0$ .

Виділимо інваріантний конусний відрізок для оператора  $T_j$ . Його варто шукати у вигляді  $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle = \langle 0, \beta_j \rangle$ , оскільки функція  $f(u) = \frac{B}{A} e^u$  визначена при  $u = 0$ , причому  $f(0) = \frac{B}{A} > 0$ . Для знаходження правого кінця конусного відрізка  $\beta_j > 0$  після введення  $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$  маємо нерівність

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{B}{A} M e^{\beta} \leq \beta,$$

де  $\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$ ,  $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x})$ .

Отже, можемо побудувати двобічний ітераційний процес для знаходження розв'язку крайової задачі (11)-(15) на  $j$ -му часовому шарі:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{B}{A} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{B}{A} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{w^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_j, \quad (18)$$

з умовою завершення його проведення  $\frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < \varepsilon$ , що впливає із апостеріорної оцінки похибки. При цьому наближенням до розв'язку рівняння Гаммерштейна (а отже, і крайової задачі (11)-(15)) на  $k$ -й ітерації вважатимемо функцію  $\Theta_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x}))$ .

Достатніми умовами збіжності ітераційного процесу (16)-(18) є виконання для кожного  $j = 1, 2, \dots, m$ , нерівності  $\beta_j < 1$  або  $M \cdot \frac{B}{A} e^{\beta_j} < 1$ .

Застосовуючи до послідовності крайових задач (11)-(15) метод двобічних наближень, отримаємо набір функцій

$$\Theta_0(\mathbf{x}) = 0, \Theta_1^{(k_1)}(\mathbf{x}), \Theta_2^{(k_2)}(\mathbf{x}), \dots, \Theta_m^{(k_m)}(\mathbf{x}).$$

За отриманим набором функцій за допомогою апарату теорії інтегральної рівняння [8] можна побудувати наближений розв'язок  $u_m(\mathbf{x}, t)$  задачі (6)-(9) у вигляді функції, визначеної при всіх  $\mathbf{x} \in \Omega, t \in [0, t_0]$ . Він матиме точність  $O(\tau)$ . Провівши повторно ітераційний процес з кроком  $\frac{\tau}{2}$  та отримавши наближений розв'язок  $u_{2m}(\mathbf{x}, t)$ , його можна уточнити відповідно до правила Рунге до порядку  $O(\tau^2)$ :  $u(\mathbf{x}, t) = 2u_{2m}(\mathbf{x}, t) - u_m(\mathbf{x}, t)$ .

**Обчислювальний експеримент.** Обчислювальний експеримент проведено для початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності (6)-(9), що моделює процес самозаймання у циліндричному насипі з основою  $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq b, 0 \leq x_2 \leq a\}$  при  $a = 1$  та  $b = \pi$ , поклавши час моделювання  $t_0 = 1$ , параметри  $A = 1, B = \frac{5}{4}$  та крок сітки на часовому інтервалі  $\tau = \frac{1}{3}$ . На кожному часовому шарі збіжність була досягнута за 4 ітерації. Двобічний характер збіжності проілюстровано на рис. 2, де наведено ітераційний процес на першому часовому шарі  $t = \tau = \frac{1}{3}$  (пунктиром зображено верхні наближення  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ , суцільною лінією – наближення  $\Theta_1(\mathbf{x})$ , пунктиром з точкою – верхні наближення  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ ).

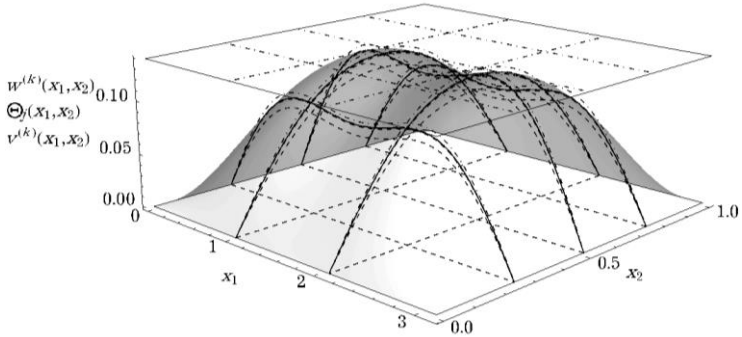


Рис. 2. Графіки  $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ ,  $\Theta_1(\mathbf{x})$  та  $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$  на часовому шарі  $t = \frac{1}{3}$

На рис. 3 наведено графіки наближень  $\Theta_j(\mathbf{x})$ ,  $j = \overline{0, 3}$ . На них спостерігається зростання наближення зі збільшенням номеру часового шару.

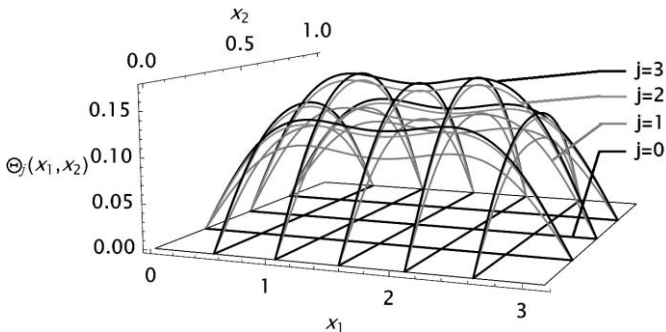


Рис. 3. Графіки наближених розв'язків  $\Theta_j(\mathbf{x})$  до розв'язку

задачі (6)-(9) на часових шарах  $t = \frac{1}{3} j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$

Це підтверджується даними, що наведені в табл. 1: максимальне значення кожного наближення, аргумент максимізації, різниця між максимумами наближень на поточному та попередньому часовому шарі, значення інтегралу наближення по області  $\Omega$ , поділене на

міру області:  $\bar{\theta}_j = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} \Theta_j(\mathbf{x}) ds$ , що відображає середнє значення

наближення, та різниця між цими значеннями на поточному та попередньому часових шарах  $\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$ . Повертаючись до фізичного сенсу



задачі (6)-(9), такі значення як максимум та інтеграл наближення, розділений на міру області, відображають відповідно максимальньо накопичене в точці перерізу насипу тепло та середнє його значення на цьому часовому шарі. Як бачимо, різниця цих значень на поточному та попередньому шарах зменшується зі збільшенням номеру шару, тобто при обраних параметрах з часом зменшується кількість накопиченого тепла за однакові часові проміжки.

Таблиця 1

Дані про максимум  $\Theta_j(\mathbf{x})$ ,  $j = \overline{0,3}$ , аргумент максимізації та різницю максимумів  $\Theta_j(\mathbf{x})$  і  $\Theta_{j-1}(\mathbf{x})$ , значення  $\bar{\theta}_j$  та  $\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$ ,  $j = \overline{1,3}$

$j$	$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x})$	$\arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x})$	$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x}) - \max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_{j-1}(\mathbf{x})$	$\bar{\theta}_j$	$\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$
0	0	$\Omega$	–	0	–
1	0,134162	(0,959785; 0,5)	0,134162	0,070952	0,070952
2	0,167210	(0,997858; 0,5)	0,033048	0,087390	0,016437
3	0,175217	(1,012180; 0,5)	0,008007	0,091287	0,003897

Теплокарти наближень  $\Theta_j(\mathbf{x})$  до розв'язку задачі (6)-(9) на часових шарах  $j \cdot \tau$ ,  $j = \overline{0,3}$ , зображено на рис. 4. Можна умовно виділити два регіони акумуляції тепла:

$$\{(x_1, x_2) : 0,7 \leq x_1 \leq 1,3; 0,3 \leq x_2 \leq 0,7\}$$

та

$$\{(x_1, x_2) : 1,7 \leq x_1 \leq 2,3; 0,3 \leq x_2 \leq 0,7\}.$$

Інформація про значення аргументу максимізації наближень, наведена в табл. 1, показує, що «найтепліша» точка належить до першого регіону та лежить на прямій, що проходить через центроїду області  $\Omega$  паралельно вісі  $Ox_1$ .

**Висновки.** У роботі вперше застосовано метод Роте у поєднанні з методом двобічних наближень до знаходження розв'язку початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності, що виникає при моделюванні процесів самозаймання насипу сипучого матеріалу циліндричної форми з прямокутною основою. Згідно з методом Роте після дискретизації було отримано послідовність крайових задач, кожна з яких була зведена до рівняння Гаммерштейна, для якого побудували ітераційний процес двобічного методу з використанням функції Гріна. За допомогою цих методів можна проводити математичне моделювання процесів самозаймання.

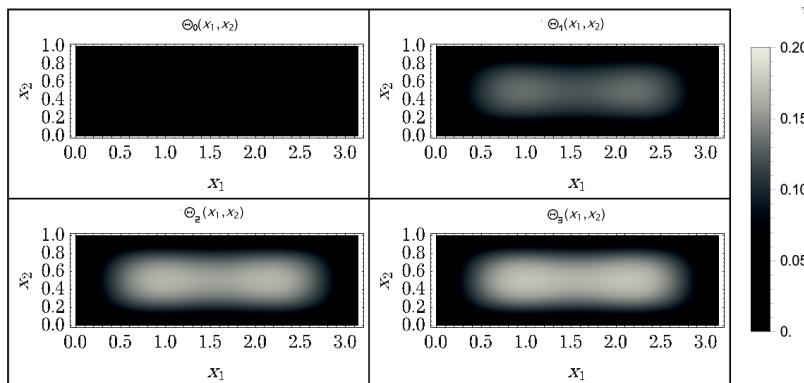


Рис. 4. Графіки теплокарт для до розв'язку задачі (6)-(9)  $\Theta_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 0, 3$

### Список використаних джерел:

1. Carras J. N., Young B. C. Self-heating of coal and related materials: Models, application and test methods. *Progress in Energy and Combustion Science*. 1994. Vol. 20, no. 1. P. 1-15.
2. Semenov N. Zur Theorie des Verbrennungsprozesses. *Zeitschrift für Physik*. 1928. Bd. 48, Nr. 7-8. S. 571-582.
3. Франк-Каменецкий Д. А. Распределение температур в реакционном сосуде и стационарная теория теплового взрыва. *Докл. АН СССР*. 1938. Т. 18, № 7. С. 411-412.
4. Matthew B. Modelling the Self-Heating of Steel Stockpiles. Wollongong: University of Wollongong, 2023. 210 p.
5. Bowes P. C. Self-heating: Evaluating and controlling the hazards. London: Department of the Environment, Building Research Establishment, 1984. 500 p.
6. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. 408 с.
7. Сидоров М. В. Метод Рунге у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопроводності. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 1. С. 108-127.
8. Литвин О. М. Інтерлінація та інтерфлетация функцій і структурний метод В. Л. Рвачова. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50, № 4. С. 61-82.

## RESEARCH OF PROCESSES OF SPONTANEOUS IGNITION IN AN STOCKPILE WITH A RECTANGULAR SECTION USING ROTHE'S AND TWO-SIDED APPROXIMATIONS METHODS

Self-ignition of a stockpile of material (coal, peat, grain) occurs as a result of the accumulation of heat released by an exothermic reaction of

oxidation, which makes it possible to consider the stockpile as a body with an internal heat source. The research of self-ignition processes using mathematical modeling methods leads to the need to find a solution to the initial boundary value problem for a two-dimensional semilinear heat conduction equation. This cannot always be done analytically, so it makes sense to use numerical analysis methods.

The aim of this article is to apply Rothe's method in combination with the method of two-sided approximations based on the use of the Green's function to find the solution of the initial boundary value problem for the two-dimensional semilinear heat conduction equation that arises during the mathematical modeling of self-ignition processes of a stockpile of bulk material of cylindrical shape with a rectangular base.

To achieve the goal, after the discretization of the heat conduction equation by the time variable, a sequence of boundary value problems was obtained by the Rothe's method, each of which was reduced to the Hammerstein equation. For this nonlinear operator equation, an iterative process of the two-way method was constructed with its stopping condition obtained through a posteriori error estimation. The power of the internal heat source was approximated using an exponential dependence.

As a result of the computational experiment, a sequence of approximate solutions was obtained. The graphs of heat maps constructed for them made it possible to examine over time the course of the self-ignition process in the cross-section of a stockpile of cylindrical shape with a rectangular base and to identify areas of heat accumulation.

**Key words:** *mathematical modeling, two-dimensional semilinear heat conduction equation, two-sided approximations method, Rothe's method, self-ignition processes, Hammerstein equation, Green's function.*

Отримано: 01.09.2024