

УДК 517.95:519.63

DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.107-113

С. М. Ламтюгова, канд. фіз.-мат. наук

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

МЕТОД R -ФУНКЦІЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МАСООБМІНУ ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА З ТВІРНОЮ У ВИГЛЯДІ КРИВОЇ ЛАМЕ З В'ЯЗКОЮ НЕСТИСЛИВОЮ РІДИНОЮ

Задача про стаціонарний масообмін циліндричного тіла з потоком в'язкої нестисливої рідини зводиться до розв'язання рівняння для концентрації з відповідними крайовими умовами на поверхні тіла та на нескінченності. Застосування конструктивного апарата теорії R -функцій дозволяє точно врахувати геометрію області, а також крайові умови разом з умовою на нескінченності.

Метод R -функцій було запропоновано академіком НАН України В. Л. Рвачовим. Для крайових задач математичної фізики цей метод дозволяє побудувати так звану структуру розв'язку крайової задачі, тобто жмуток функцій, що точно задовольняє всі крайові умови задачі і залежить від деяких невизначених компонент. Вибір цих невизначених компонент виконується так, щоб задовольнити (у певному сенсі) диференціальне рівняння задачі. Для цього можна використовувати стандартні чисельні методи математичної фізики (метод Рітца, метод Гальоркіна, метод найменших квадратів, колокацій тощо). Слід зазначити, що геометрія області при цьому враховується точно, тобто, зокрема, немає заміни криволінійних ділянок межі на вписані в них ламані, як це робиться, наприклад, у методі скінченних елементів.

Метою цієї статті є застосування методу R -функцій до розв'язання задачі масообміну циліндричного тіла з твірною у вигляді кривої Ламе при його обтіканні в'язкою нестисливою рідиною. Для досягнення поставленої мети на підставі методів теорії R -функцій побудовано повну структуру розв'язку лінійної крайової задачі для концентрації та для її розв'язання застосовано чисельний алгоритм на основі методу Гальоркіна для апроксимації невизначених компонент структури. У роботі не розглядається ступінь строгості, умови застосування використаних рівнянь руху рідини, вони розглядаються як математичні моделі, що підлягають чисельній алгоритмізації.

Ключові слова: *метод R -функцій, в'язка нестислива рідина, задача масообміну, метод Гальоркіна, крайова задача, математичне моделювання.*

Вступ. Задачі розрахунку в'язких течій, що ускладнені масообміном, знаходять застосування у різних галузях, зокрема, в теплоенергетиці, газонафтопереробці, в хімічній та харчовій технологіях, гео- та аст-

рофізичних дослідженнях, охороні навколишнього середовища [1]. Розробка нових, а також удосконалення існуючих методів математичного моделювання та чисельного аналізу стаціонарних задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною з урахуванням масообміну методом R -функцій є актуальною науковою проблемою. Завдяки використанню апарату теорії R -функцій можна задовольняти рівняння задачі та точно враховувати геометрію області та всі крайові умови задачі.

Метод R -функцій [2] для зазначених задач використовувався у роботах [3, 4] для тіл обертання (сфери та еліпсоїда) в сферичній системі координат та циліндричних тіл (кругового та еліптичного циліндра) в циліндричній системі координат. У цій статті розглянуто задачу масообміну циліндричного тіла, рівняння твірної якого має вигляд $x^8 + y^8 = 1$ (крива Ламе для $a = b = 1$, $n = 8$), в прямокутній системі координат.

Постановка задачі. Розглянемо масообмін циліндричного тіла, переріз якого є скінченною областю Ω з кусково-неперервною межею $\partial\Omega$, з потоком в'язкої нестисливої рідини.

Для опису розглядуваного процесу для малих чисел Пекле використовується наближення Озеєна:

$$\Delta c = \text{Re} U_{\infty} \frac{\partial c}{\partial x} \text{ зовні } \bar{\Omega}. \quad (1)$$

У загальному випадку математична модель задачі масообміну циліндричного тіла з потоком в'язкої нестисливої рідини має вигляд:

$$\Delta c = \text{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \text{ зовні } \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$c|_{\partial\Omega} = c_0, \quad (3)$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} c = 0, \quad (4)$$

де $c = c(x, y)$ – концентрація, c_0 – задана концентрація на межі $\partial\Omega$

тіла обтікання, $\Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$, Re – число Пекле – безрозмірний

параметр, що характеризує міру відношення конвективного переносу розчиненої в рідині речовини до дифузійного переносу, $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії, пов'язана з компонентами вектора швидкості співвід-

ношеннями $V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, U_{∞} – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

Задача (1), (3), (4) від функції течії не залежить. А для задачі (2)-(4) функцію течії можна знайти, наприклад, як розв'язок лінеаризованої задачі повільного обтікання циліндричного тіла в'язкою нестисли-

вою рідиною (наближення Озеєна) [5] або як розв'язок нелінійної задачі обтікання циліндричного тіла в'язкою нестисливою рідиною [6].

Метод розв'язання. Нехай функція течії $\psi(x, y)$ відома. Підставивши знайдену функцію течії в рівняння (2), розв'яжемо задачу (1), (3), (4) та (2), (3), (4) методом R -функцій [2]. Для цього за допомогою конструктивних засобів теорії R -функцій будуватиметься структура розв'язку крайової задачі, тобто жмуток функцій, що точно задовольняє крайові умови і умову на нескінченності, а невизначені компоненти у структурі задачі знаходяться за допомогою методу Гальоркіна.

Безпосередньою перевіркою встановлюється, що за будь-якого вибору досить гладких функцій Ψ_1 і Ψ_2 ($\Psi_1 \rightarrow 0$, коли $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$) крайові умови (3) і (4) точно задовольняє функція вигляду

$$c = c_0(1 - \omega_M) + \omega_M \Psi_1 + \omega_M(1 - \omega_M) \Psi_2, \quad (5)$$

де

$$\omega_M = f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp \frac{M\omega}{\omega - M}, & 0 \leq \omega < M, \\ 1, & \omega \geq M, \end{cases}$$

а ω – функція, що будується за допомогою конструктивного апарату теорії R -функцій та має властивості:

- 1) $\omega > 0$ зовні $\bar{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$,

де $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$.

Для апроксимації невизначених компонент Ψ_1 і Ψ_2 використовується метод Гальоркіна. Функції Ψ_1 і Ψ_2 апроксимуються виразами вигляду

$$\Psi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k \varphi_k, \quad \Psi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \tau_j,$$

де

$$\{\varphi_k(\rho, \varphi)\} = \{\rho^{-k} \cos k\varphi, \rho^{-k} \sin k\varphi\}, \quad \{\tau_j(\rho, \varphi)\} = \{1, \rho^j \cos k\varphi, \rho^j \sin k\varphi\},$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ і φ визначається відношеннями

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Значення коефіцієнтів α_k ($k=1, 2, \dots, m_1$) та β_j ($j=1, 2, \dots, m_2$) відповідно до методу Гальоркіна знаходитимемо з умови ортогональності відхилю, що отриманий підстановкою функції (5) в рівняння (1) та (2), першим m_1 функціям φ_k та першим m_2 функціям τ_j . З влас-

тивостей ω_M і координатних функцій впливає, що інтегрування можна проводити лише по скінченній області $\{0 \leq \omega(x, y) < M\}$.

Це приводить до необхідності розв'язання системи лінійних рівнянь відносно α_k ($k=1, 2, \dots, m_1$) та β_j ($j=1, 2, \dots, m_2$).

У таких спосіб ми отримаємо наближені розв'язки задачі (1), (3), (4) та (2), (3), (4).

Обчислювальний експеримент. Обчислювальний експеримент проведено для задачі обтікання циліндричного тіла з твірної, що визначається рівнянням $x^8 + y^8 = 1$, коли $U_\infty = 1$, $c_0 = 1$, $M = 10$, $m_1 = 10$, $m_2 = 11$, для різних чисел Рейнольдса і Пекле. Через симетрію задачі доданки, що містять синуси, у виразах для φ_k і τ_j відсутні і, крім того, з тих же міркувань всі α_k ($k=1, 2, \dots, m_1$) та β_j ($j=1, 2, \dots, m_2$), відповідні цим доданкам, дорівнюють нулю. Подвійні інтеграли обчислювалися наближено за формулою Гаусса з 64 вузлами за кожною змінною.

Для числа Пекле $Pe = 0,01$ задача (1), (3), (4) не залежить від функції течії. Лінії концентрації для неї наведені на рис. 1.

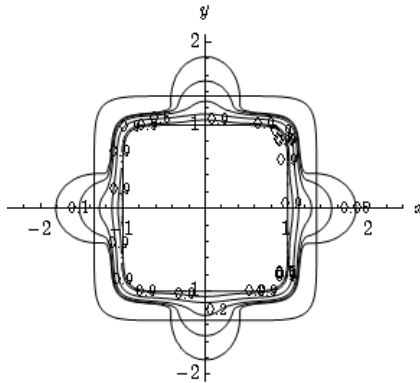


Рис. 1. Лінії концентрації при $M = 10$ і $Pe = 0,01$

Для чисел Пекле $Pe = 10; 20; 30$ задача (2), (3), (4) залежить від функції течії і, відповідно, від числа Рейнольдса. Для розв'язання задачі для концентрації було взято функції течії, отримані для чисел Рейнольдса $Re = 0; 5; 15; 20$ у роботі [7].

Лінії концентрації при $Re = 0; 5; 15; 20$, $M = 10$ для $Pe = 10$ представлені на рис. 2, для $Pe = 20$ – на рис. 3, а для $Pe = 30$ – на рис. 4.

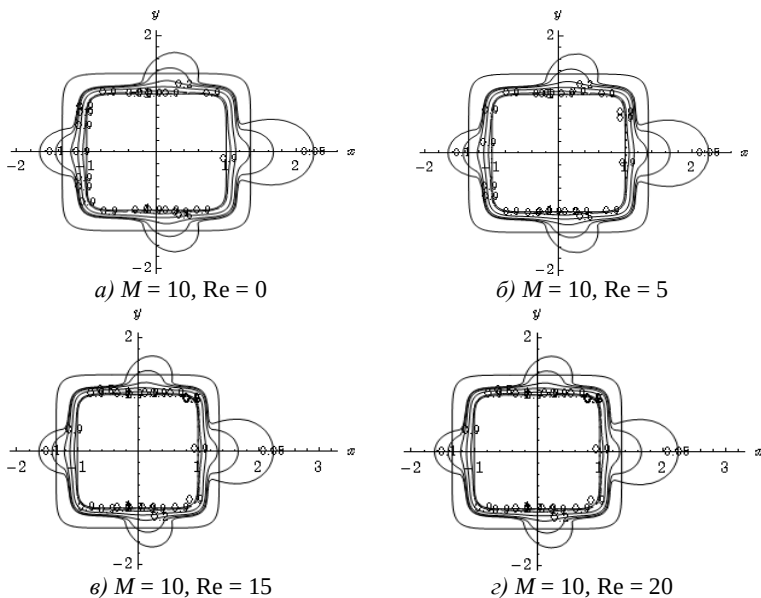


Рис. 2. Лінії концентрації для $\text{Re} = 10$ при $M = 10$ і $\text{Re} = 0; 5; 15; 20$

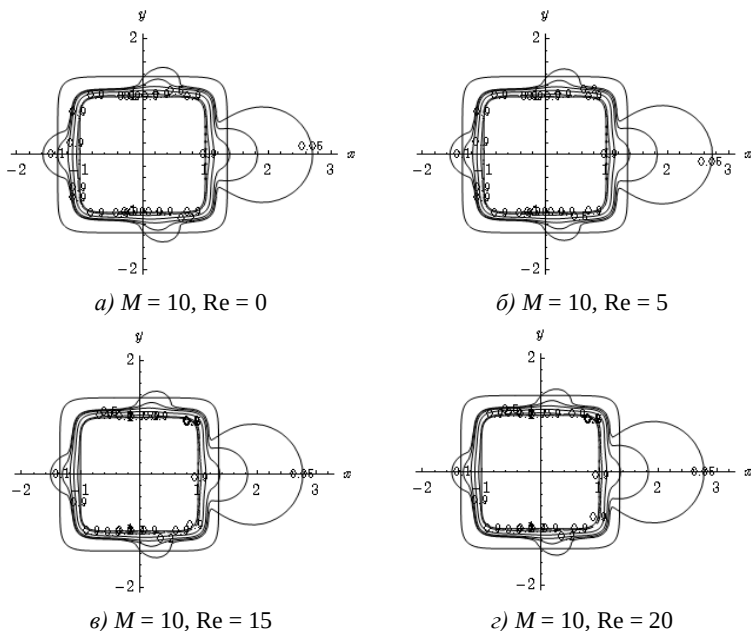


Рис. 3. Лінії концентрації для $\text{Re} = 20$ при $M = 10$ і $\text{Re} = 0; 5; 10; 20$

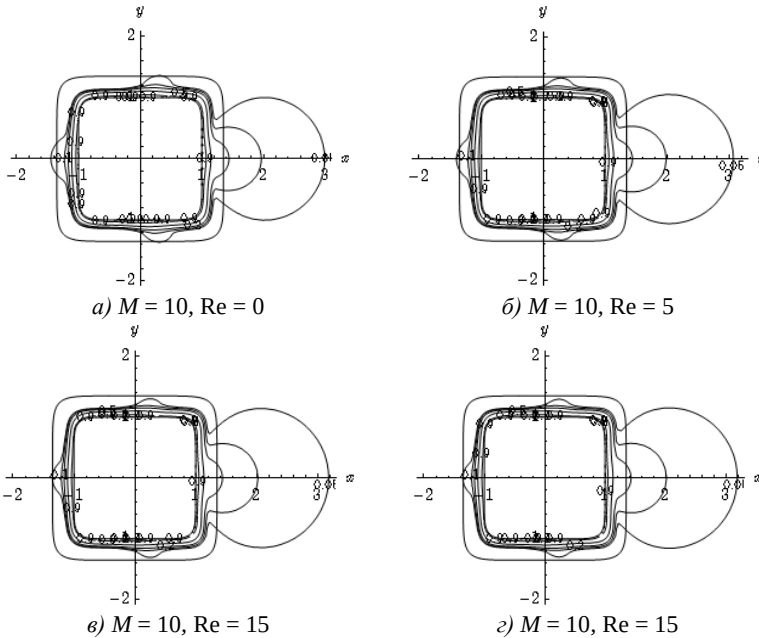


Рис. 4. Лінії концентрації для $Re = 30$ при $M = 10$ і $Re = 0; 5; 15; 20$

Висновки. У роботі запропоновано чисельний метод розрахунку масообміну циліндричного тіла з твірною, що є кривою Ламе, з рівномірним поступальним потоком в'язкої нестисливої рідини, заснований на спільному застосуванні конструктивного апарату теорії R -функцій та методу Гальоркіна. Цей метод є універсальним (алгоритм не змінюється при зміні геометрії області) та точно враховує всі крайові умови задачі, зокрема, і умову на нескінченності. За допомогою цього методу можна проводити математичне моделювання різних технологічних та фізико-механічних процесів.

Список використаних джерел:

1. Врагов А. П. Массообменные процессы и обладания химических и газонафтопереработных производств: навч. пос. Суми: ВТД «Університетська книга», 2007. 284 с.
2. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
3. Колосова С. В., Ламтюгова С. Н., Сидоров М. В. Об одном методе численного анализа вязких течений, усложненных массообменом (задача обтекания). *Радиоэлектроника и информатика*. 2014. № 1 (64). С. 25-30.
4. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V., Sytnykova I. V. Method of numerical analysis of the problem of mass transfer of a cylindrical body with the uniform translational flow. *Радиоелектроніка, інформатика, управління*. 2018. № 2 (45). С. 22-29. DOI: 10.15588/1607-3274-2018-2-3.

5. Ламтюгова С. Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2012. № 1. С. 112-122.
6. Ламтюгова С. Н. Математическое моделирование стационарного обтекания цилиндрического тела вязкой жидкостью. *Вісник Запорізького національного університету*. 2012. № 2. С. 57-65.
7. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the problem of flow past a cylindrical body applying the R-functions method and the Galerkin method. *Econtechmod*. 2014. Vol. 3. № 3. P. 43-50.

R-FUNCTIONS METHOD FOR THE MASS EXCHANGE PROBLEM OF A CYLINDRICAL BODY FORMED BY LAME CURVE WITH A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

The problem of stationary mass exchange of a cylindrical body with viscous incompressible fluid flow is reduced to solving the equation for concentration with the corresponding boundary conditions on the surface of the body and at infinity. Applying the constructive apparatus of the R-functions theory allows us to accurately take into account the geometry of the domain, as well as the boundary conditions together with the condition at infinity.

The R-function method was proposed by V. L. Rvachev, Ukraine National Academy of Sciences academician. For boundary value problems of mathematical physics, this method allows constructing the so-called structure of the solution of the boundary value problem, i.e. a bundle of functions that accurately takes into account all boundary conditions of the problem and depends on some uncertain components. The choice of these uncertain components is performed in such a way as to satisfy (in a certain sense) the equation of the problem. For this, one can use standard numerical methods of mathematical physics (the Ritz method, the Galerkin method, the least squares method, collocations method, etc.). It should be noted that the geometry of the region is taken into account exactly, i.e. in particular, there is no replacement of curvilinear sections of the boundary with polygonal lines inscribed in them, as it is done, for example, in the finite element method.

The purpose of this article is to apply the R-functions method to the problem of mass exchange of a cylindrical body formed by the Lamé curve, with a viscous incompressible fluid flowing around it. To achieve this goal, a complete structure of the solution of a linear boundary value problem for concentration is constructed by the R-functions theory methods, and a numerical algorithm based on the Galerkin method for approximating indefinite components in the problem structure is used. The degree of rigor and the conditions for using the considered equations of fluid motion are not considered in the work; these equations are considered as mathematical models subject to numerical algorithmization.

Key words: *R-functions method, viscous incompressible fluid, mass exchange problem, Galerkin method, boundary value problem, mathematical modeling.*

Отримано: 31.08.2024