УДК 536.2
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.114-120

Р. С. Мусій, д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. І. Клапчук, канд. фіз.-мат. наук,
О. В. Назарук, аспірант,
І. Г. Свідрак, канд. техн. наук,
В. К. Шиндер, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

АНАЛІЗ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ У ДВОШАРОВІЙ КОМПОЗИТНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ЗУМОВЛЕНОЇ КОНВЕКТИВНИМ ТЕПЛООБМІНОМ НА ЇЇ ЗОВНІШНІЙ ПОВЕРХНІ

Сформульована нестаціонарна задача теплопровідності для двошарової циліндричної оболонки. Матеріали складових шарів оболонки приймаються однорідними та ізотропними. Дана оболонка конвективно нагрівається зовнішнім середовищем. За вихідну систему рівнянь розглядуваної задачі використано систему лінійних двовимірних рівнянь на сумарні по складових шарах оболонки інтегральні характеристики температури. При отриманні даної системи застосовано гіпотезу про лінійний розподіл температури по товщині всієї оболонки. На основі розвинутої двовимірної математичної моделі теплопровідності для шаруватих циліндричних оболонок отримано загальний розв'язок задачі теплопровідності для двошарової циліндричної оболонки. Для такої оболонки, яка у прямокутній області на зовнішній поверхні локально конвективно нагрівається зовнішнім середовищем знайдено розподіл температури. Для числового аналізу розглянуто металокерамічну циліндричну оболонку, внутрішній шар якої виготовлений з вольфраму, а зовнішній – з кераміки. За такої структури і умов теплообміну із зовнішнім середовищем для розглядуваної оболонки досліджено вплив її геометричних параметрів та теплофізичних характеристик матеріалів її складових шарів на величину температурного поля на зовнішній поверхні оболонки.

Виявлені нові якісні і кількісні закономірності можуть бути використані для оцінки температурних полів в композитних елементах конструкцій шаруватої структури та в конструкціях з односторонніми покриттями. Отримані в даній роботі залежності розподілів температури від геометричних параметрів та теплофізичних характеристик є основою теоретичної бази для аналізу температурних режимів металокерамічних циліндричних оболонок. Зокрема, металокерамічні зубні коронки для прогнозування їх температурних режимів моделюються описаними вище двошаровими металокерамічними циліндричними оболонками, які локально конвективно нагріваються зовнішнім середовищем.

Ключові слова: *двошарова циліндрична оболонка, металокераміка, локальна дія, конвективний теплообмін, температурне поле.*

Вступ. В якості конструктивних елементів багатьох пристроїв широко використовують композитні циліндричні оболонки [1, с. 5835-6643; 2, с. 58-261; 3, с. 37-193]. Для розрахунку температурних режимів таких оболонок необхідно розробити відповідні фізико-математичні моделі.

Огляд фізичних моделей і математичних методів дослідження температурних полів в тонкостінних конструкціях наведено, зокрема, в працях [4, с. 26-124; 5, с. 52-168; 6, с. 43-114; 7, с. 60-63].

У роботі на основі двовимірної математичної моделі теплопровідності для шаруватих циліндричних оболонок знайдено розподіл температури в двошаровій циліндричній оболонці, яка конвективно нагрівається зовнішнім середовищем. Для випадку металокерамічної оболонки чисельно проаналізовано її температуру залежно від геометричних параметрів та теплофізичних характеристик матеріалів її складових шарів.

Формулювання задачі. Розглянемо двошарову циліндричну оболонку зі сталою товщиною $2h$. Оболонка віднесена до циліндричної системи координат x, θ, z. Тут позначають через x осьову, через θ колову та через z радіальну координати. Матеріали складових шарів оболонки однорідні та ізотропні. Початок координат помістимо у середній поверхні, радіус якої дорівнює R. Нестаціонарне температурне поле $t(x, \theta, z, \tau)$, яке змінюються в часі τ, описується в оболонці тривимірним рівнянням теплопровідності, яке записуємо у вигляді [4, с. 38-40; 5, с. 87-89]

$$\lambda_t(z)\Delta t + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_t(z)\frac{\partial t}{\partial z}\right) + \lambda_t(z)\frac{1}{R}\frac{\partial t}{\partial z} - c_v(z)\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 . \qquad (1)$$

Тут $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – двовимірний оператор Лапласа; $\lambda_t(z)$ – коефіцієнт теплопровідності; $c_v(z)$ – питома об’ємна теплоємність.

Для однозначності розв’язку до рівняння (1) потрібно додати початкову умову

$$t(x, \theta, z, 0) = t_0 \qquad (2)$$

та граничну умову

$$\lambda_t \frac{\partial t}{\partial z} + \alpha_z^{\pm}\left(t - t_z^{\pm}\right) = 0 \qquad (3)$$

конвективного теплообміну на поверхнях $z = \pm h$.

Тут: $\alpha_z^{\pm}$ – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h$; $t^{\pm}, q^{\pm}, t_z^{\pm}$ – відповідно температури оболонки та температури зовнішніх середовищ, які омивають поверхні $z = \pm h$.

Тривимірну задачу теплопровідності зведемо до двовимірної задачі на інтегральні характеристики $T_1(x,\theta,\tau)$ і $T_2(x,\theta,\tau)$ температури. Приймаючи гіпотезу про лінійний розподіл температури по товщині оболонки, тобто

$$t(x,\theta,z,\tau) = T_1(x,\theta,\tau) + \frac{z}{h} T_2(x,\theta,\tau) \tag{4}$$

інтегральні характеристики температури усереднені по товщині оболонки мають вигляд

$$T_i = \frac{2i-1}{2h^i} \int_{-h}^{h} t\, z^{i-1} dz\,,\ (i = 1, 2)\,.$$

Використовуючи метод усереднення по товщині розглядуваної оболонки на інтегральні характеристики температури отримуємо такі двовимірні рівняння:

$$A^{\lambda} \Delta T_1 - \varepsilon_1^t T_1 + B^{\lambda} \Delta T_2 + \left(\frac{A^{\lambda}}{hR} - \varepsilon_2^t \right) T_2 - A^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - B^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = -f_1\,,$$

$$B^{\lambda} \Delta T_1 - \varepsilon_2^t T_1 + D^{\lambda} \Delta T_2 + \left(\frac{B^{\lambda}}{hR} - \frac{A^{\lambda}}{h^2} - \varepsilon_1^t \right) T_2 - B^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - D^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = -f_2\,. \tag{5}$$

Тут

$$\left\{ A^{\lambda}, B^{\lambda}, D^{\lambda} \right\} = \int_{-h}^{h} \lambda_t(z) \left\{ 1, z/h, (z/h)^2 \right\} dz\,;$$

$$\left\{ A^{c}, B^{c}, D^{c} \right\} = \int_{-h}^{h} c_v(z) \left\{ 1, z/h, (z/h)^2 \right\} dz\,;$$

f_1, f_2 – функції, що залежать від граничних умов на поверхнях $z = \pm h$.

Система рівнянь (5) разом з початковими (2) і граничними (3) умовами описує двовимірну крайову задачу теорії теплопровідності для тонкостінних неоднорідних ізотропних циліндричних оболонок.

Метод розв'язування. Нехай кінці оболонки $x = 0$ і $x = l$ підтримуються при нульовій температурі і в початковий момент часу $\tau = 0$ температура оболонки дорівнює нулю. Тоді для інтегральних характеристик T_1 і T_2 температури маємо такі крайові умови

$$T_1 = T_2 = 0, \tag{6}$$

а для моменту часу $\tau = 0$ початкові умови для них будуть

$$T_1(x,\theta,0) = 0;\ T_2(x,\theta,0) = 0\,. \tag{7}$$

Застосовуючи скінчене інтегральне перетворення Фур'є за просторовими координатами до системи рівнянь (5) з врахуванням граничних умов (6), отримуємо вирази інтегральних характеристик температури

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{C^*}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i\neq j=1}^{2}\frac{1}{p_i - p_j}\Big[\big(C_3 p_i - G4\big)Q_{1nm}\,Z_{1i}\left(\tau'\right) - \\ &\quad -\big(C_2 p_i - G2\big)Q_{2nm}\,Z_{2i}\left(\tau'\right)\Big]\sin\frac{\pi n x}{l}\cos m\theta, \\ T_2 &= \frac{1}{C^*}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i\neq j=1}^{2}\frac{1}{p_i - p_j}\Big[\big(C_1 p_i - G1\big)Q_{2nm}\,Z_{2i}\left(\tau'\right) - \\ &\quad -\big(C_2 p_i - G3\big)Q_{1nm}\,Z_{1i}\left(\tau'\right)\Big]\sin\frac{\pi n x}{l}\cos m\theta. \end{aligned} \tag{8}$$

Тут $-p_1$ і $-p_2$ – корені квадратного рівняння

$$C^* p^2 + \big[C_1 G4 + C_3 G1 - C_2\left(G3 + G2\right)\big]p + G1G4 - G2G3 = 0\ ;$$

$$C^* = C_1 C_3 - \left(C_2\right)^2.$$

Відповідно, коефіцієнти Фур'є $Q_{jnm}\ \left(j = 1,2\right)$ у виразах (8) записуються формулою,

$$Q_{jnm} = \frac{\varsigma}{\pi l}\int_0^l\int_{-\pi}^{\pi} Q_j\left(x,\theta\right)\sin\frac{\pi n x}{l}\cos m\theta\,dx\,d\theta\,,\ \varsigma = \begin{cases}1, & m = 0\\ 2, & m \neq 0\end{cases}, \tag{9}$$

а функція часу $Z_{ji}\left(\tau'\right)\ \left(j = 1,2\right)$ подається виразом

$$Z_{ji}\left(\tau'\right) = \int_0^{\tau'} f_j^t\left(v\right)e^{-p_i\left(\tau' - v\right)}dv\,,\ \left(j,i = 1,2\right) \tag{10}$$

За знайденими виразами (8) інтегральних характеристик температури тривимірне температурне поле в розглядуваній оболонці знаходимо за формулою (4).

Числовий аналіз температурного поля у металокерамічній циліндричній оболонці. За матеріали складових шарів розглядуваної двошарової циліндричної оболонки вибрано метал і кераміку [1, с. 258-325]. Внутрішній шар оболонки виготовлений з вольфраму з такими характеристиками:

$$\lambda^{(1)} = 163 W/mK\ ;\ c_v^{(1)} = 5.56\cdot 10^6\ J/m^3K\,.$$

Зовнішній шар оболонки виготовлений з кераміки, для якої характеристики будуть:

$$\lambda^{(2)} = 2.036 W/mK\,;\; c_v^{(2)} = 3.45\cdot 10^6\, J/m^3K\,.$$

Значення інших геометричних і теплофізичних параметрів оболонки прийнято такими:

$$x_0 = l/2;\; d/l = 0.45;\; \eta = \pi/2;\; \lambda_0 = \lambda^{(1)};$$

$$c_0 = c_v^{(1)};\; h_2/h_1 = 1;\; l/R = 2;\; h/R = 0.05.$$

Для заданої структури двошарової оболонки обчислили значення безрозмірної температури $\left(t' = t/t^*\right)$ на зовнішній поверхні $z = h$ оболонки в центрі нагрітої області для різних значень геометричних і теплофізичних параметрів.

Дослідження зміни температурного поля t' уздовж напрямної $x = 0.5$ від середини нагрітої області $\theta = 0$ до $\theta = 5\pi/6$ для різних значень параметра $\beta^* = 0.1;\, 1;\, 2;\, 3$ і для $\mathrm{Bi} = 1$ показано на рис. 1 (для $\eta = \pi/2$) і рис. 2 (для $\eta = \pi/6$).

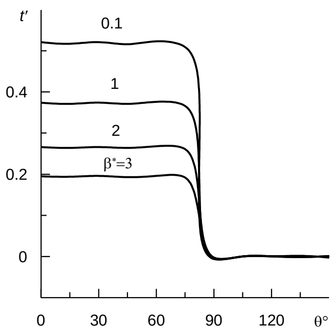

Рис. 1. *Зміна температури t' уздовж напрямної $x = 0.5$ від середини нагрітої області $\theta = 0$ до $\theta = 5\pi/6$ для різних значень параметра β^* при $Bi = 1$ і $\eta = \pi/2$*

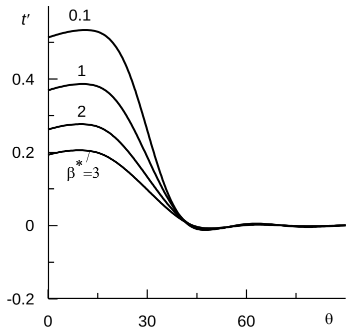

Рис. 2. *Зміна температури t' уздовж напрямної $x = 0.5$ від середини нагрітої області $\theta = 0$ до $\theta = 5\pi/6$ для різних значень параметра β^* при $Bi = 1$ і $\eta = \pi/6$.*

На основі рисунків 1-2 встановлено, що температура в області нагріву приймає стале значення, а при переході в ненагріту ділянку різко зменшується до температури зовнішнього середовища.

На рис. 3-4 зображено значення температурного поля в різні моменти часу τ' для $Bi = 1$ залежно від відносної товщини оболонки h/R та відносної довжини оболонки l/R. З аналізу рис. 3-4 виявлено, що вплив геометричних параметрів оболонки – відносної товщини оболонки h/R і відносної довжини оболонки l/R на зміну значень її температурного поля є незначний.

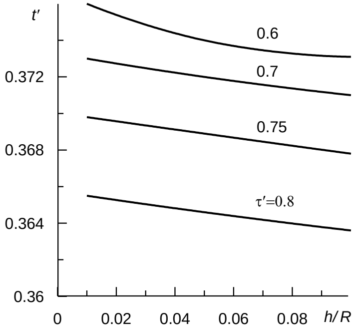

Рис. 3. *Значення температури t' в різні моменти часу τ' для $Bi = 1$ залежно від відносної товщини h/R оболонки*

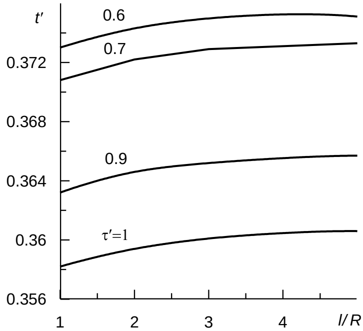

Рис. 4. *Значення температури t' в різні моменти часу τ' для $Bi = 1$ залежно від відносної довжини l/R оболонки*

Висновки. Розвинуто методику розв'язування нестаціонарних задач теплопровідності неоднорідних ізотропних кругових циліндричних оболонок скінченої довжини за умови конвективного теплообміну між зовнішніми поверхнями оболонки і середовищами, що оточують ці поверхні. За вихідну використано систему лінійних двовимірних рівнянь на інтегральні характеристики температури. При отримані даної системи застосовано гіпотезу про лінійний розподіл температури по товщині всієї оболонки.

Числовий аналіз виконано для двошарової металокерамічної циліндричної оболонки внутрішній шар якої виготовлений з вольфраму, а зовнішній – з кераміки. Дана оболонка у прямокутній області на зовнішній керамічній поверхні локально конвективно нагрівається зовнішнім середовищем. За таких умов досліджено вплив геометричних та теплофізичних параметрів на величину температурного поля на зовнішній поверхні оболонки. Результати проведених досліджень можуть бути використані для оцінки температурних полів в композитних елементах конструкцій шаруватої структури та в конструкціях з односторонніми покриттями. Зокрема, отримані результати є теоретичною базою для аналізу температурних режимів в металокерамічних зубних коронках, які конвективно нагріваються зовнішнім середовищем.

Список використаних джерел:

1. Encyclopedia of Thermal Stresses / R. Hetnarski (ed.)). Springer, 2014. Vol. 11. P. 5835-6643.

2. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Krysko A. V. Thermo-Dynamics of plates and shells (foundations of engineering mechanics). Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 2010. 789 p.
3. Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications. Springer Science Business Media. B.V., 2009. 559 p.
4. Коляно Ю. М. Методи теплопровідності та термопружності неоднорідних тіл. Київ: Наук. думка, 1992. 280 с.
5. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наук. думка, 1978. 344 с.
6. Holman J. P. Heat Transfer. New York: Mc Graw Hill, 2009.
7. Флячок В. М. Рівняння нестаціонарних температурних полів для багатошарових анізотропних оболонок з урахуванням теплової інерції. *Доп. НАУ. Сер. Механіка.* 2000. № 2. С. 60-63.

ANALYSIS OF TEMPERATURE DISTRIBUTION IN A TWO-LAYER COMPOSITE CYLINDRICAL SHELL DUE TO CONVECTIVE HEAT EXCHANGE ON ITS OUTER SURFACE

A non-stationary thermal conductivity problem for a two-layer cylindrical shell is formulated. The materials of the constituent layers of the shell are assumed to be homogeneous and isotropic. This shell is convectively heated by the external environment. The system of linear two-dimensional equations for the integral temperature characteristics summed over the component layers of the shell was used as the initial system of equations of the problem under consideration. When obtaining this system, the hypothesis of a linear distribution of temperature along the thickness of the entire shell was applied. On the basis of the developed two-dimensional mathematical model of thermal conductivity for layered cylindrical shells, a general solution to the thermal conductivity problem for a two-layered cylindrical shell was obtained. A temperature distribution was found for such a shell, which is locally convectively heated by the external environment in a rectangular region on the outer surface. For the numerical analysis, a metal-ceramic cylindrical shell was considered, the inner layer of which is made of tungsten, and the outer layer is made of ceramics. Under such a structure and conditions of heat exchange with the external environment for the considered shell, the effect of its geometric parameters and thermophysical characteristics of the materials of its component layers on the temperature field on the outer surface of the shell was investigated.

The revealed new qualitative and quantitative regularities can be used to estimate temperature fields in composite elements of layered structures and in structures with one-sided coatings. The dependences of temperature distributions on geometric parameters and thermophysical characteristics obtained in this work are the basis of the theoretical basis for the analysis of temperature regimes of metal-ceramic cylindrical shells. In particular, metal-ceramic dental crowns to predict their temperature regimes are modeled by the two-layer metal-ceramic cylindrical shells described above, which are locally convectively heated by the external environment.

Key words: *two-layer cylindrical shell, metal ceramics, local action, convective heat exchange, temperature field.*

Отримано: 11.09.2024