УДК 519.624.2:517.988
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.121-133

В. Г. Пархоменко,
М. В. Сидоров, д-р фіз.-мат. наук, професор

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ДОДАТНИХ АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З МОНОТОННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

У роботі розглядається застосування методу двобічних наближень для знаходження додатних розв'язків крайових задач для нелінійних еліптичних диференціальних рівнянь, які мають аксіальну симетрію.

Розглянуто випадок задання крайових умов першого роду, або умов Діріхле. У якості монотонної нелінійності розглядається степенева функція з показником від 0 до 1. Шляхом переходу до полярних координат у крайовій задачі для еліптичного рівняння за рахунок аксіальної симетрії розв'язку розглядувана задача зводиться до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння на відрізку відносно функції, що залежить лише від полярного радіусу, тобто залежність від кута повороту зникає. Полюс полярної системи координат при цьому стає особливою точкою, у якій необхідно поставити умову обмеженості.

Для крайової задачі будується функція Гріна для подальшого зведенням задачі до інтегрального рівняння Гаммерштейна. Інтегральне рівняння розглядається як нелінійне операторне рівняння у банаховому просторі неперервних на відрізку функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних на цьому відрізку неперервних функцій. Оператор досліджується на такі властивості, як монотонність (ізотонність), додатність, обмеженість і увігнутість.

Далі знаходиться початкове наближення як кінці інваріантного конусного відрізка для ізотонного оператора так, щоб забезпечити найвищу швидкість збіжності ітераційного процесу. Будуються наступні ітераційні послідовності двобічних наближень: перша послідовність, що не спадає за конусом, і друга послідовність, що не зростає за конусом. За наближення на кожній ітерації береться середнє арифметичне верхнього і нижнього наближень. Ітераційний процес завершується, коли оцінка похибки розв'язку задовольняє заданій точності.

Отримані у роботі теоретичні результати перевірено за допомогою обчислювального експерименту. Проаналізовано залежність розв'язку від параметрів у правій частині, що проілюстровано відповідними графіками.

Ключові слова: *крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння, аксіально-симетричний додатний розв'язок, ін-*

варіантний конусний відрізок, метод двобічних наближень, функція Гріна, монотонний оператор.

Вступ. Математичне моделювання різноманітних процесів, зокрема, процесів нелінійної теплопровідності, приводить до необхідності розв'язування крайових задач для нелінійного еліптичного рівняння вигляду

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)\,,\ \ \mathbf{x} \in \Omega\,.$$

Розглянемо випадок, коли область Ω є кругом радіуса R у $\mathbb{R}^2$. Тоді можна поставити задачу знаходження аксіально-симетричного розв'язку рівняння, тобто розв'язку, залежного тільки від $\rho = |\mathbf{x}|$, де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. При цьому прийдемо до необхідності розв'язання крайової задачі для нелінійного звичайного диференціального рівняння.

Одержати точні розв'язки крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь можливо лише в поодиноких випадках, тому такі задачі розв'язують за допомогою чисельних методів, таких як сіткові, варіаційні та ітераційні. Варто виокремити ітераційні методи, оскільки вони є зручними з точки зору обчислювальної реалізації та мають властивість самовиправності. Серед ітераційних методів особливе місце посідають методи двобічних наближень, які є не тільки універсальним інструментом дослідження існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, а й надають можливість їх фактичного їх знаходження. До того ж за допомогою двобічних наближень можна одержати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожному кроці, а отже, отримати зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Теоретичним підґрунтям двобічних ітераційних методів є теорія нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Застосування цих методів до нелінійних диференціальних рівнянь було розглянуто у роботах [1, 8, 9], зокрема для знаходження радіально-симетричних розв'язків у тривимірному просторі, але аналогічні задачі для двовимірного простору потребують досліджень.

Отже, наукова задача удосконалення існуючих двобічних наближень у застосування їх до задачі знаходження додатних аксіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних рівнянь є актуальною.

У даній статті продовжуються дослідження, розпочаті в роботах [1-4, 7-10], в частині їх перенесення на двовимірний випадок.

1. Постановка задачі. Розглянемо у крузі

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < R\}$$

рівняння нелінійної стаціонарної теплопровідності

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)\,,\ \ \mathbf{x} \in \Omega\,, \tag{1}$$

з першим типом крайових умов

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0\,. \tag{2}$$

Типовим випадком залежності функції щільності теплових джерел від температури є степенева залежність вигляду $f(\mathbf{x},u) = \lambda u^p$, де $0 < p < 1$, $\lambda > 0$.

Поставимо задачу знаходження додатного аксіально-симетричного (тобто залежного лише від $\rho = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) розв'язку крайової задачі (1), (2) і з правою частиною вигляду $f(\mathbf{x},u) = \lambda u^p$.

2. Основна частина. Розв'яжемо задачу (1), (2) за допомогою методу двобічних наближень, заснованого на використання методів теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах.

Не обмежуючи загальності вважатимемо, що $R = 1$. Отже, в одиничному крузі

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$$

розглянемо нелінійне еліптичне диференціальне рівняння (1) з правою частиною вигляду $f(\mathbf{x},u) = \lambda u^p$, де $0 < p < 1$, $\lambda > 0$.

Перейдемо до полярних координат за формулами

$$x_1 = \rho\cos\varphi\,,\ x_2 = \rho\sin\varphi\,,$$

$$0 \le \varphi < 2\pi\,,\ \rho \ge 0\,.$$

Тоді оператор Лапласа набуде вигляду

$$\Delta_{\rho,\varphi} u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\,.$$

У випадку, коли розв'язок крайової задачі є аксіально-симетричним, його значення в будь-якій точці області Ω залежить тільки від відстані цієї точки від початку координат. Отже, функція u залежить тільки від змінної $\rho = |\mathbf{x}|$, де $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Тоді рівняння (1) перетворюється на звичайне диференціальне рівняння

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = \lambda u^p$$

або

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = \lambda\rho u^p\,. \tag{3}$$

Крайова умови (2), задана на колі $|\mathbf{x}| = 1$, зводиться до вигляду

$$u(1) = 0\,.$$

Оскільки точка $\rho = 0$ є особливою точкою рівняння (3), для функції $u = u(\rho)$ виникає необхідність поставити умову обмеженості при $\rho = 0$:

$$|u(0)| < +\infty .$$

Таким чином, крайова задача (1), (2) зводиться до крайової задачі

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = \lambda\rho u^{p}, \ \rho \in (0,1), \tag{4}$$

$$|u(0)| < +\infty, \ u(1) = 0. \tag{5}$$

Загальний розв’язок диференціального рівняння $-\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = 0$ має вигляд $u = C_1 \ln\rho + C_2$. Умова обмеженості $|u(0)| < +\infty$ виконуватиметься, якщо обрати $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, тобто крайову умову при $\rho = 0$ задовольнятиме частинний розв’язок $u_1(\rho) = 1$. Очевидно, що крайову умову $u(1) = 0$ задовольнятиме частинний розв’язок $u_2(\rho) = \ln\rho$. Визначник Вронського для цих функцій дорівнює

$$|W(\rho)| = \begin{vmatrix} u_1(\rho) & u_2(\rho) \\ u_1'(\rho) & u_2'(\rho) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \ln\rho \\ 0 & \dfrac{1}{\rho} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}.$$

Отже, функція Гріна розглядуваної крайової задачі має вигляд

$$G(\rho,s) = \begin{cases} \dfrac{u_1(\rho)u_2(s)}{s|W(\rho)|}, & 0 \le \rho \le s, \\ \dfrac{u_1(s)u_2(\rho)}{s|W(\rho)|}, & s < \rho \le 1, \end{cases} = \begin{cases} \ln\dfrac{1}{s}, & 0 \le \rho \le s, \\ \ln\dfrac{1}{\rho}, & s < \rho \le 1. \end{cases} \tag{6}$$

Тоді задача (4), (5) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\rho) = \lambda\int_0^1 Q(\rho,s)u^{p}(s)ds, \tag{7}$$

де $Q(\rho,s) = sG(\rho,s)$.

Означення. *Узагальненим розв’язком крайової задачі (4), (5) називається функція* $u^* \in C[0,1]$, *яка є розв’язком інтегрального рівняння (7).*

У сенсі даного означення розуміється еквівалентність крайової задачі (4), (5) і інтегрального рівняння (7).

Пов'яжемо з рівнянням (7) нелінійний інтегральний оператор, що діє у просторі $C[0,1]$ за правилом:

$$T(u)(\rho)=\int_0^1 Q(\rho,s)u^p(s)ds\,. \tag{8}$$

Таким чином, рівняння (7) можна подати у вигляді $u=\lambda T(u)$. Це рівняння розглядатимемо в банаховому просторі $C[0,1]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних на $C[0,1]$ функцій [5, 6].

Дослідимо властивості оператора T.

Оскільки $Q(\rho,s)u^p(s)\ge 0$ для всіх $p>0$ і $\rho,s\in[0,1]$, то $T(u)\ge\theta$ для всіх $u\ge\theta$, а отже, оператор T є додатним (θ – нульовий елемент простору).

Оскільки $u_1^p\ge u_2^p$, якщо $u_1\ge u_2$ і $p>0$, та функція $Q(\rho,s)$ є невід'ємною, то для всіх $\rho\in[0,1]$ $\int_0^1 Q(\rho,s)u_1^p(s)ds\ge\int_0^1 Q(\rho,s)u_2^p(s)ds$, а отже, з нерівності $u_1\ge u_2$ випливає нерівність $T(u_1)\ge T(u_2)$, тобто оператор T є ізотонним.

Для функції Гріна (6) $u_0(\rho)=\int_0^1 Q(\rho,s)ds=\frac{1}{4}(1-\rho^2)$ і справедлива оцінка

$$\varphi(s)u_0(\rho)\le Q(\rho,s)\le\psi(s)u_0(\rho)\,. \tag{9}$$

де, наприклад, $\varphi(s)=\min\left\{s\ln\frac{1}{s},3s^2\right\}$, $\psi(s)=2$ – неперервні та невід'ємні для $s\in[0,1]$ функції.

З нерівності (9) випливає, що для будь-якої $u\in C[0,1]$ справедлива нерівність:

$$\alpha u_0(\rho)\le\int_0^1 Q(\rho,s)u(s)ds\le\beta u_0(\rho)\,, \tag{10}$$

де $\alpha=\alpha(u)=\int_0^1\varphi(s)u(s)ds$, $\beta=\beta(u)=\int_0^1\psi(s)u(s)ds$.

Нерівність (10) говорить про u_0-обмеженість лінійного оператора $\int_0^1 Q(\rho,s)u(s)ds$.

Дослідимо оператор T вигляду (8) на увігнутість та u_0-увігнутість з функцією $u_0(\rho)=\frac{1}{4}(1-\rho^2)$.

Для будь-якої $u\in C[0,1]$ справедлива нерівність

$$\alpha u_0(\rho)\le\int_0^1 Q(\rho,s)u^p(s)ds\le\beta u_0(\rho), \tag{11}$$

де $\alpha=\alpha(u)=\int_0^1\varphi(s)u^p(s)ds$, $\beta=\beta(u)=\int_0^1\psi(s)u^p(s)ds$, тобто $T(u)\in K(u_0)$.

Нехай $u\in K_+$ таке, що $\alpha_1u_0\le u\le\beta_1u_0$ ($\alpha_1=\alpha_1(u)>0$, $\beta_1=\beta_1(u)>0$). Розглянемо при $\tau\in(0,1)$ нерівність $T(\tau u)>\tau T(u)$. Оскільки

$$T(\tau u)-\tau T(u)=\tau^p\int_0^1 Q(\rho,s)u^p(s)ds-\tau\int_0^1 Q(\rho,s)u^p(s)ds=(\tau^p-\tau)\int_0^1 Q(\rho,s)u^p(s)ds,$$

то нерівність $T(\tau u)>\tau T(u)$ виконуватиметься, якщо $\tau^p-\tau>0$, тобто (з урахуванням умови $\tau\in(0,1)$), якщо $p\in(0,1)$.

Отже, за умови $p\in(0, 1)$ оператор T є увігнутим.

Доведемо також u_0-увігнутість оператора T за умови $p\in(0, 1)$.

Нехай $u\in K(u_0)$, $\tau\in(0,1)$ і $p\in(0,1)$. Тоді з урахуванням нерівності (11)

$$T(\tau u)-\tau T(u)=(\tau^p-\tau)\int_0^1 Q(\rho,s)u^p(s)ds\ge\alpha_1u_0(\rho),$$

де $\alpha_1=\alpha_1(u)=(\tau^p-\tau)\int_0^1\varphi(s)u^p(s)ds>0$.

Таким чином,

$$T(\tau u)\ge\tau T(u)+\alpha_1u_0(\rho)=\tau\int_0^1 Q(\rho,s)u^p(s)ds+\alpha_1u_0(\rho),$$

або (з урахуванням (11))

$$T(\tau u)\ge\tau\int_0^1 Q(\rho,s)u^p(s)ds+\frac{\alpha_1}{\beta}\int_0^1 Q(\rho,s)u^p(s)ds=\tau\left(1+\frac{\alpha_1}{\beta\tau}\right)T(u),$$

тобто

$$T(\tau u)\ge\tau(1+\eta)T(u),$$

де $\eta=\eta(u,\tau)=\frac{\alpha_1}{\beta\tau}>0$.

Отже, оператор T вигляду (8) є u_0-увігнутим.

Таким чином, справедлива лема.

Лема. *Оператор T, який діє за правилом (8), має такі властивості:*

а) є додатним оператором

б) є ізотонним оператором для $p > 0$;

в) є увігнутим і навіть u_0-увігнутим для $p \in (0,1)$, де $u_0(\rho) = \frac{1}{4}(1-\rho^2)$.

Оскільки оператор T перетворює конус K_+ в $K(u_0)$, то кінці інваріантного конусного відрізку $< v_0, w_0 >$ шукатимемо у вигляді

$$v_0 = \alpha u_0, \ w_0 = \beta u_0 .$$

Тут $K(u_0)$ – множина тих елементів $u \in K_+$, для яких можна вказати такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що $\alpha u_0 \le u \le \beta u_0$.

Тоді умови, що визначають кінці інваріантного конусного відрізка, приводять до наступних нерівностей для визначення сталих α і β ($0 < \alpha < \beta$):

$$\lambda \alpha^p \int_0^1 Q(\rho, s) u_0^p(s) ds \ge \alpha u_0(\rho) \text{ для всіх } \rho \in [0,1], \tag{12}$$

$$\lambda \beta^p \int_0^1 Q(\rho, s) u_0^p(s) ds \le \beta u_0(\rho) \text{ для всіх } \rho \in [0,1]. \tag{13}$$

Нерівності (12) і (13) можуть бути зведені до вигляду

$$\alpha^{1-p} \le \lambda m, \ \beta^{1-p} \ge \lambda M, \tag{14}$$

де $m = \min\limits_{\rho \in [0,1]} \int_0^1 \frac{Q(\rho, s)}{u_0(\rho)} u_0^p(s) ds$, $M = \max\limits_{\rho \in [0,1]} \int_0^1 \frac{Q(\rho, s)}{u_0(\rho)} u_0^p(s) ds$.

Знаходимо, що

$$m = \frac{4^{-p}}{1+p}, \ M = \frac{4^{-p} H_{1+p}}{1+p},$$

де H_x – гармонічне число.

Зауважимо, що гармонічне число має інтегральне подання

$$H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt, \ \operatorname{Re} x > -1 .$$

Тоді з нерівностей (14) знаходимо, що

$$\alpha \le (\lambda m)^{\frac{1}{1-p}}, \ \beta \ge (\lambda M)^{\frac{1}{1-p}}. \tag{15}$$

Оскільки для швидшої збіжності двобічних ітерацій слід обрати максимальне значення α і мінімальне значення β, які задовольняють нерівності (15), то остаточно матимемо, що для кінців $v_0 = \alpha u_0$, $w_0 = \beta u_0$ інваріантного конусного відрізка оберемо значення

$$\alpha = (\lambda m)^{\frac{1}{1-p}}, \ \beta = (\lambda M)^{\frac{1}{1-p}},$$

при цьому, очевидно, виконується умова $0 < \alpha < \beta$.

Для крайової задачі (4), (5) сформуємо ітераційний процес за формулами

$$v^{(n)}(\rho) = \lambda \int_0^1 Q(\rho, s)[v^{(n-1)}(s)]^p \, ds, \ n = 1, 2, \dots, \tag{16}$$

$$w^{(n)}(\rho) = \lambda \int_0^1 Q(\rho, s)[w^{(n-1)}(s)]^p \, ds, \ n = 1, 2, \dots, \tag{17}$$

$$v^{(0)}(\rho) = \alpha u_0(\rho), \ w^{(0)}(\rho) = \beta u_0(\rho). \tag{18}$$

З огляду на властивості оператора T можна зробити висновок, що ітераційний процес (16)-(18) з двох боків збігається до єдиного в конусі K_+ додатного розв'язку крайової задачі (4), (5). А саме має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай* $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$ *– одиничний круг в* $\mathbb{R}^2$. *Крайова задача*

$$-\Delta u = \lambda u^p, \ \mathbf{x} \in \Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

при $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$ *має єдиний додатний аксіально-симетричний розв'язок*

$$u^*(\rho) = u^*\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

до якого двобічно збігаються послідовні наближення, які формуються за схемою (16)-(18).

Двобічна збіжність послідовних наближень (16)-(18) розуміється у сенсі виконання нерівностей

$$\alpha u_0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \dots \le v^{(n)} \le \dots \le u^* \le$$
$$\le \dots \le w^{(n)} \le \dots w^{(1)} \le w^{(0)} \le \beta u_0.$$

З огляду на двобічний характер ітерації слід проводити до виконання умови

$$\frac{1}{2}\max_{\rho\in[0,1]}(w^{(k)}(\rho)-v^{(k)}(\rho))<\varepsilon$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(\rho)\approx u^{(k)}(\rho)=\frac{w^{(k)}(\rho)+v^{(k)}(\rho)}{2}.$$

3. Результати обчислювального експерименту. Обчислювальний експеримент було проведено для задачі (4), (5) при $p=0{,}1;0{,}2;\ldots;0{,}9$ та $\lambda=1,2,3$.

При $p=\frac{1}{2}$, $\lambda=1$ збіжність з точністю 10^{-4} було досягнуто за 8 ітерацій. Знайдено, що

$$m=\frac{1}{12},\ M=\frac{3\pi}{32},$$

$$\alpha=m^2=\frac{1}{144},\ \beta=M^2=\frac{1}{9}H^2_{\frac{3}{2}}.$$

На рис. 1 зображено графіки верхніх $w^{(k)}(\rho)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\rho)$ (пунктирна лінія) наближень. На рис. 2 наведено графік наближеного розв’язку $u^{(8)}(\rho)$, на рис. 3 – графік функції $u^{(8)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$, а на рис. 4 – лінії рівня функції $u^{(8)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$. На рис. 5 наведено графіки залежності $\|u\|$ від $p\in(0,1)$ для значень $\lambda=1,2,3$.

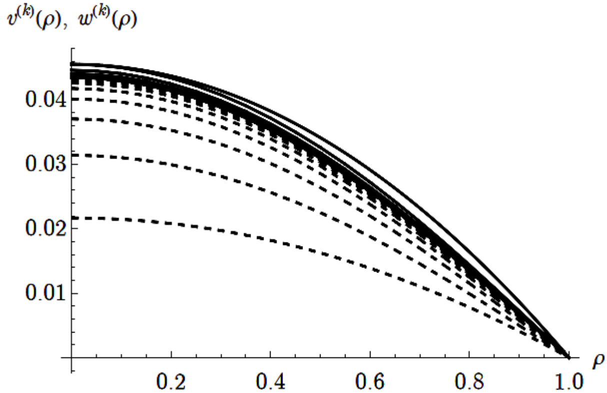

Рис. 1. *Графіки верхніх і нижніх наближень*

Як бачимо, зі зменшенням λ і наближенням p до 1 норма розв'язку крайової задачі прямує до нуля.

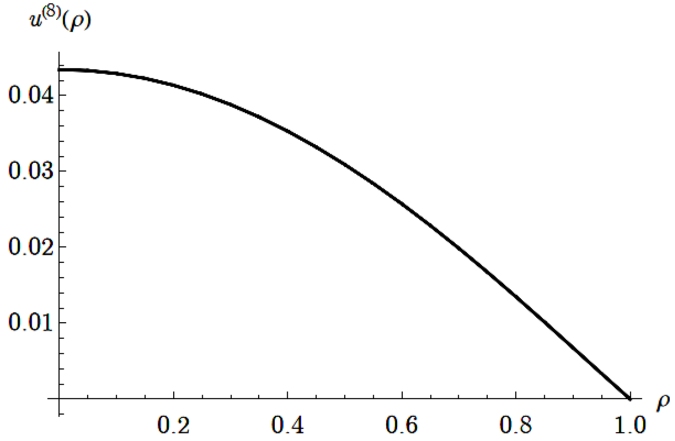

Рис. 2. *Графік наближеного розв'язку* $u^{(8)}(\rho)$

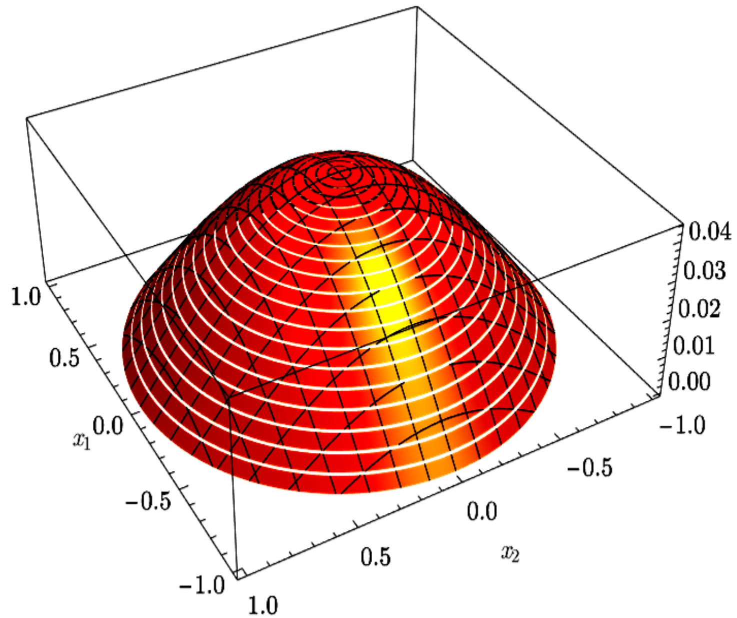

Рис. 3. *Графік наближеного розв'язку* $u^{(8)}(\sqrt{x_1^2+x_2^2})$

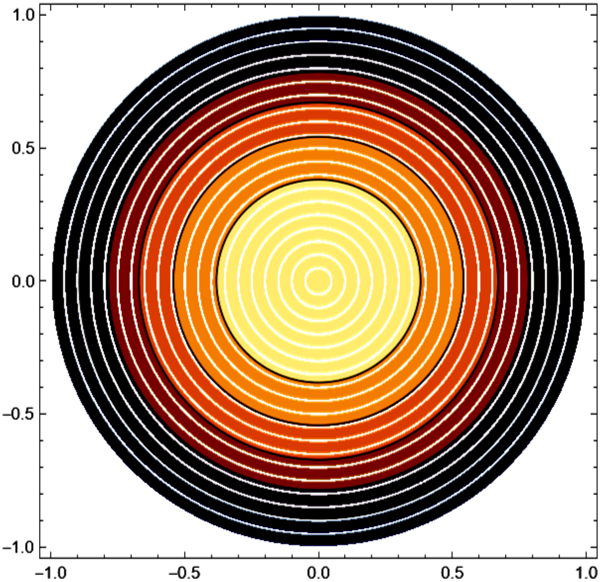

Рис. 4. *Лінії рівня наближеного розв'язку* $u^{(8)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$

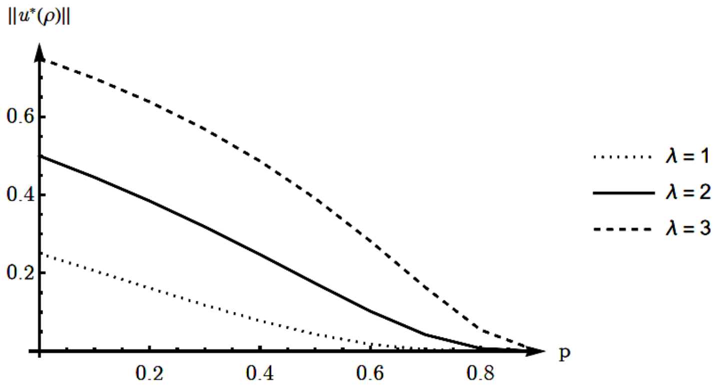

Рис. 5. *Графіки залежності норми наближеного розв'язку від значень параметра* p , $\lambda = 1, 2, 3$

Висновки. У роботі вперше застосовано метод двобічних наближень до знаходження аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі для рівняння $-\Delta u = \lambda u^p$. Отримані в роботі результати можна поширити на рівняння з іншими типами нелінійностей, іншим характером монотонності та на еліптичні рівняння більш загального вигляду, а також застосувати до розв'язання прикладних задач, пов'язаних з розрахунком фізико-механічних полів. Подібні дослідження можна також провести для крайових умов інших типів. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих у роботі результатів.

Список використаних джерел:

1. Вороненко М. Д., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1 (80). С. 48-54.
2. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 107-120.
3. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2013. № 1. С. 35-42.
4. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2013. № 3 (62). С. 28-31.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.
6. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
7. Пархоменко В. Г. Метод двобічних наближень пошуку аксіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Матеріали XXVIII Міжнародного молодіжного форуму «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»* (Харків, ХНУРЕ, 16-18 квітня 2024). Т. 7. С. 259-261.
8. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2019. № 3 (86). С. 16-23.
9. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1 (48). С. 57-66.
10. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem. *Казахского Национального университета им аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика*. 2018. № 3 (99). С. 78-91.

APPLICATION OF THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS FOR FINDING POSITIVE AXIALLY SYMMETRIC SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH MONOTONE NONLINEARITIES

This paper considers the application of the method of two-sided approximations for finding positive solutions to boundary value problems for nonlinear elliptic differential equations with axial symmetry.

The case of Dirichlet boundary conditions (first kind) is considered, with a power-type monotone nonlinearity, where the exponent ranges from 0 to 1. By transitioning to polar coordinates in the boundary value problem for the elliptic equation, due to the axial symmetry of the solution, the problem is reduced to a boundary value problem for an ordinary differential equation on an interval with respect to a function that depends only on the polar radius, thus eliminating the dependence on the angle. The pole of the polar coordinate system becomes a singular point, where a boundedness condition must be imposed.

For the boundary value problem, a Green's function is constructed to further reduce the problem to a Hammerstein integral equation. The integral equation is treated as a nonlinear operator equation in a Banach space of continuous functions on the interval, partially ordered by a cone of non-negative continuous functions on this interval. The operator is examined for properties such as monotonicity (isotonicity), positivity, boundedness, and concavity.

Next, the initial approximation is found as the endpoints of the invariant conical segment for the isotone operator in such a way as to ensure the highest convergence rate of the iterative process. The following iterative sequences of two-sided approximations are constructed: the first sequence, which is non-decreasing with respect to the cone, and the second sequence, which is non-increasing with respect to the cone. At each iteration, the arithmetic mean of the upper and lower approximations is taken as the next approximation. The iterative process is terminated when the error estimate of the solution satisfies the specified accuracy.

The theoretical results obtained in this work were validated through a computational experiment. The dependence of the solution on the parameters in the right-hand side was analyzed and illustrated with corresponding graphs.

Key words: *boundary problem for nonlinear elliptic differential equation, axially symmetric positive solution, invariant conical segment, method of two-sided approximations, Green's function, monotone operator.*

Отримано: 08.09.2024