УДК 519.856
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.134-139

О. І. Радзієвська*, канд. фіз.-мат. наук,
І. Б. Ковальська**, канд. фіз.-мат. наук

* Національний університет харчових технологій, м. Київ,
** Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЧОГО ПРОЦЕСУ

У першій половині минулого століття через зростання складності виробничих процесів виникла потреба в їх ефективнішій організації. В цей період і було закладено основи математичного моделювання економічних процесів.

Сучасні математичні моделі оптимального планування інтегрують штучний інтелект, методи машинного навчання та великі бази даних, враховують невизначеність і ризики у виробничих процесах з використанням у моделях стохастичних залежностей та методів теорії ймовірностей. Це дозволяє моделювати ще складніші системи та враховувати більше факторів, таких як коливання попиту, зміни у виробничих ланцюгах постачання тощо. Сьогодні моделі оптимального планування є основою систем управління підприємствами (ERP) та використовуються у різних галузях: від виробництва до логістики та енергетики.

У статті розглядається економіко-математична модель для планування оптимального виробничого процесу при певних припущеннях про економічний стан. Тобто, прибуток підприємства, яке може випускати різні види продукції, для кожного виду цієї продукції залежить від економічного стану країни. Визначається, яку частку у загальному виробництві підприємства буде займати певний вид продукції для отримання максимального прибутку. Прибуток підприємства залежить від стану економіки, тому очікуваний прибуток характеризується математичним сподіванням прибутку. Для оптимального плану виробництва потрібно прагнути до найкращого співвідношення між очікуваним прибутком і ризиком (середнім квадратичним відхиленням), тобто, потрібно знайти максимум функції, яка характеризує це співвідношення і є функцією n невідомих. Для знаходження екстремуму цієї функції знаходимо частинні похідні і отримуємо n нелінійних рівнянь з n невідомими. Виконуючи деякі перетворення, зводимо цю систему до системи n лінійних рівнянь. Якщо умови невід'ємності на змінні не накладаються, то при розв'язанні системи може бути, що деякі змінні прийматимуть від'ємні значення. Це означає, що для отримання оптимального прибутку не рекомендується виготовляти відповідний тип продукції.

Ключові слова: *математичне моделювання, теорія операцій, лінійне програмування, виробничий процес, оптимальне планування, продукція, прибуток.*

Вступ. У першій половині XX століття через зростання складності виробничих процесів виникла потреба в їх ефективнішій організації. В цей період і було закладено основи математичного моделювання економічних процесів. Зокрема, у 1930-х роках з'явилися перші праці в галузі теорії операцій. Наприклад, В. Л. Канторович у 1939 році розробив лінійні моделі для вирішення завдань оптимального розподілу ресурсів. Його робота «Математичні методи організації і планування виробництва» вважається однією з перших у цій сфері.

Після Другої світової війни розпочався активний розвиток дослідження операцій як галузі знань, метою якої було створення методів оптимізації складних систем. Зокрема, було розроблено методи лінійного програмування, що стали ключовими в оптимізації виробничих процесів.

Одним із важливих досягнень цього періоду є симплекс-метод, запропонований Джорджем Данцігом у 1947 році [2]. Він дозволив вирішувати задачі лінійного програмування з великою кількістю змінних та обмежень.

У 1960-1970-ті роки математичні моделі почали активно використовуватись у реальному виробництві. З’являються нові методи, такі як динамічне програмування, нелінійне програмування, теорія ігор та стохастичні моделі. Також були розроблені інформаційні системи для підтримки прийняття рішень, що дозволило автоматизувати обчислення та впровадити математичні моделі на рівні великих підприємств.

Пізніше через підвищену конкуренцію та непередбачуваність ринкових умов почали розвиватися методи, що враховували невизначеність і ризики у виробничих процесах з використанням у моделях стохастичних залежностей та методів теорії ймовірностей.

Сучасні математичні моделі оптимального планування інтегрують штучний інтелект, методи машинного навчання та великі бази даних. Це дозволяє моделювати ще складніші системи та враховувати більше факторів, таких як коливання попиту, зміни у виробничих ланцюгах постачання тощо.

Сьогодні моделі оптимального планування є основою систем управління підприємствами (ERP) та використовуються у різних галузях: від виробництва до логістики та енергетики.

Постановка задачі. Розглянемо економіко-математичну модель для планування оптимального виробничого процесу. Припустимо, підприємство може випускати різні види продукції, наприклад: товари першої необхідності, товари другої необхідності, товари розкоші або товари, що складають деяке фіксоване замовлення. Прибуток від кожного виду продукції залежить від економічного стану країни. Потрібно спланувати, яку частку у загальному виробництві підприємства буде займати певний вид продукції для отримання максимального прибутку.

Нехай відомо прибуток підприємства, якщо все виробництво буде працювати на виконання замовлення. Тоді підприємство має фіксований прибуток, який позначимо *I*. Через w_{ik} позначимо прибуток підприємства від випуску *i*-го виду продукції (якщо випускається на підприємстві тільки ця продукція), який залежить від попиту, що обумовлений, наприклад, економічним станом *k*, $i=\overline{1,n}$, де *n*-число різноманітної продукції, яку може випускати підприємство, $k=\overline{1,m}$, *m*-число можливих економічних станів, від яких залежить прибуток. Через x_i позначимо частку виробництва *i*-го виду продукції від загального обсягу виробництва. Тоді прибуток при *k*-му стані економіки буде

$$I_k=\sum_{i=1}^{n}x_i w_{ik} \ ,$$

де $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$.

Очікуваний прибуток є математичне сподівання

$$m_I=M\left(I_k\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i M\left(w_{ik}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i m_i ,$$

де $m_i=\sum_{k=1}^{m}p_k w_{ik}$, p_k – експертна оцінка ймовірності настання к-го економічного стану.

Відхилення випадкової величини I_k від її математичного сподівання характеризує дисперсія, яка має вигляд

$$\sigma^2=M(I_k-M(I_k))^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i x_j\sigma_{ij} ,$$

де $\sigma_i^2=\sum_{k=1}^{m}p_k\left(w_{ik}-m_i\right)^2$, σ_{ij} – коваріація між прибутками *i*- го та *j*-го видів продукції.

Якщо вважати, що *I* фіксований прибуток, коли підприємство працює на замовлення, тоді для оптимального плану виробництва потрібно прагнути до найкращого співвідношення між очікуваним прибутком і ризиком (середнім квадратичним відхиленням). Тобто, потрібно знайти максимум функції [1]

$$\omega=\left(m_I-I\right)/\sigma \qquad (1)$$

за умови

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \qquad (2)$$

Враховуючи отримані рівності, маємо

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i - I}{(\sum_{i=1}^{n} x_i m_i x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})^{0.5}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i - \sum_{i=1}^{n} x_i I}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})^{0.5}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (m_i - I)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})^{0.5}}.$$

Отримали функцію з n невідомими. Для знаходження екстремуму цієї функції потрібно знайти частинні похідні і прирівняти їх до нуля:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_s} = 0. \quad s = \overline{1,n}.$$

Отже, маємо:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_s} = \left(m_s - I\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{-0.5} -$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{-1.5} (x_s m_s + \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{sj}), s = \overline{1,n}.$$

Прирівняємо праву частину до нуля і помножимо обидві частини рівняння на

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}\right)^{0.5}.$$

Отримуємо n рівнянь з n невідомими:

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (m_i - I)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})}\left(x_s \sigma_s^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_{js}\right) + (m_s - I) = 0.$$

Множник перед дужками однаковий в усіх рівняннях, тому позначимо його через α і будемо мати систему n рівнянь з $n+1$ невідомими:

$$\alpha\left(x_s\sigma_s^2+\sum_{j=1}^{n}x_j\sigma_{js}\right)+(m_s-I)=0,\ s=\overline{1,n}.$$

Введемо нову змінну $y_s=\alpha x_s$ $s=\overline{1,n}$.

Одержуємо систему n лінійних рівнянь відносно n змінних y_s, $s=\overline{1,n}$:

$$y_s\sigma_s^2+\sum_{j=1}^{n}y_j\sigma_{js}+(m_s-I)=0,\ s=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Враховуючи, що

$$\sum_{s=1}^{n}x_s=1$$

маємо

$$\sum_{s=1}^{n}y_s=\sum_{s=1}^{n}\alpha x_s=\alpha\sum_{s=1}^{n}x_s=\alpha$$

і

$$x_s=\frac{y_s}{\sum_{s=1}^{n}y_s},\ s=\overline{1,n}.$$

Величини x_s – це частка виробництва s-го виду продукції від загального обсягу виробництва для отримання оптимального прибутку.

При розв'язанні системи (3) можемо отримати частину значень x_s від'ємними , тоді вводимо обмеження:

$$x_s\geq 0,\ s=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

Максимум функції (1) при обмеженнях (2) і (4) в цьому випадку можна знайти одним із методів квадратичного програмування. Це випливає з того, що цільова функція (1) є квадратичною. Якщо умови невід'ємності на змінні x_s не накладаються, то при розв'язанні системи може бути, що деякі змінні прийматимуть від'ємні значення. Це означає, що для отримання оптимального прибутку не рекомендується виготовляти відповідний тип продукції.

Висновок. У статті розглянута економіко-математична модель для планування оптимального виробничого процесу при заданих умовах, тобто шляхом формалізації виробничої системи у вигляді рівнянь і нерівностей розв'язується задача: яку частку у загальному виробництві підприємства для отримання максимального прибутку буде займати певний вид продукції, якщо прибуток підприємства для кожного виду цієї продукції залежить від економічного стану країни.

Список використаних джерел:

1. Elton E. J., Gruber M. J., Brown S. J., Goetzmann W. N. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. John Wiley & Sons, 2009. 752 p.
2. Dantzig G. B. Linear Inequalities and Related Systems. Princeton University Press, 1956. 322 p.
3. Вітлінський В. В., Наконечний С. І. Ризик у менеджменті. Київ: ТОВ «Борисфен-М», 1996. 336 с.
4. Радзієвська О. І., Кузьмінська Н. Л., Васютинська Ю. О. Спеціальні розділи математики для економістів: навч. посіб. Київ: НУХТ, 2016. 283 с.
5. Попов Ю. Д., Тюптя В. І., Шевченко В. І. Методи оптимізації: навч. посіб. Київ: Абрис, 1999. 217 с.

MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMAL PLANNING OF THE PRODUCTION PROCESS

In the first half of the last century, due to the increasing complexity of production processes, there was a need for their more efficient organization. During this period, the foundations of mathematical modeling of economic processes were laid.

Modern mathematical models of optimal planning integrate artificial intelligence, machine learning methods and large databases, take into account uncertainty and risks in production processes using stochastic dependencies and probability theory methods in the models. This makes it possible to model even more complex systems and take into account more factors, such as fluctuations in demand, changes in production supply chains, etc. Today, optimal planning models are the basis of enterprise management systems (ERP) and are used in various industries: from manufacturing to logistics and energy.

This article considers an economic-mathematical model for planning the optimal production process under certain assumptions about the economic state. That is, the profit of the enterprise, which can produce different types of products, for each type of these products depends on the economic state of the country. It is determined what share in the total production of the enterprise will be occupied by a certain type of product in order to obtain maximum profit. The profit of the enterprise depends on the state of the economy, therefore the expected profit is characterized by the mathematical expectation of profit. For an optimal production plan, you need to strive for the best ratio between expected profit and risk (mean square deviation), that is, it is necessary to find the maximum of the function that characterizes this ratio and is a function of n unknowns. To find the extremum of this function, we find partial derivatives and obtain n nonlinear equations with n unknowns. Performing some transformations, we reduce this system to a system of n linear equations. If the nonnegativity conditions are not imposed on the variables, then when solving the system, it may happen that some variables will take negative values. This means that in order to obtain optimal profit, it is not recommended to manufacture the corresponding type of products.

Key words: *mathematical modeling, theory of operations, linear programming, production process, optimal planning, production, profit.*

Отримано: 17.09.2024