УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.140-150

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАЙКРАЩЕ НАБЛИЖЕННЯ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ РІЗНОЇ ПАРНОСТІ

У багатьох розділах математики часто виникають екстремальні задачі пов'язані із апроксимаційними характеристиками як наближаючих функцій, так і властивостями елементів, якими наближають. Наприклад, для поліномів кількістю точок співпадання значень функції та значень полінома, яким замінюють цю функцію на досліджуваному проміжку. На практиці задача наближення функції f із визначеної множини R зводиться до заміни її за визначеним алгоритмом до близької до неї, в певному розумінні, функції (многочлена) фіксованого степеня.

У рівномірній та, відповідно, інтегральній метриках задача знаходження точних значень найкращих наближень класів r разів диференційовних функцій, r – натуральне число, отримала своє висвітлення в роботах Ж. Фавара [1], Н. І. Ахієзера, М. Г. Крейна [2], Б. Надя, С. М. Нікольського [3], В. К. Дзядика [4], С. Б. Стєчкіна, Сунь Юн-шена та ін.

Остаточні результати по розв'язанню задачі найкращого наближення на класах Вейля-Надя при довільних значення параметрів, що визначають ці класи, належать українському математику В. К. Дзядику [4]. У його роботах на класах функцій, які породжені відомими ядрами Бернуллі, встановлено той факт, що кількість точок співпадання ядра та наближаючого полінома степеня $n-1$ не перевищує $2n$, враховуючи їх кратність, що і дозволило отримати остаточні результати. В роботі [5] наведені випадки таких лінійних комбінацій парних або ж непарних ядер, для яких кількість рівномірно розташованих точок інтерполяції рівна $2n+2$ для полінома степеня $n-1$, який найменше відхилений в метриці простору L від досліджуваної лінійної комбінації.

Ідея дослідження складених ядер, що записуються у вигляді лінійної комбінації складових доданків, належить О. І. Степанцю [6] і отримала відповідне втілення в задачах сумісного наближення функцій та їх похідних. У 80-90-х роках XX сторіччя О. І. Степанцем був розроблений новий підхід до класифікації періодичних функцій, який дозволив здійснювати досить тонку класифікацію надзвичайно широких множин періодичних функцій. При цьому отримані результати для вказаних

класів з одного боку мають загальний характер, а з іншого – дають цілу низку нових, невідомих до цього часу, результатів, які на відомих раніше класах отримати було неможливо. Притримуючись підходів до вимог класифікації функцій, ми можемо розглядати лінійну комбінацію класів функцій як деякий один клас – більш складнішого характеру. І тоді задача знаходження точних значень верхніх граней найкращих наближень зведеться до задачі найкращого наближення цього складеного класу, що відповідає згорткам з твірним складеним ядром.

У роботі досліджуються лінійні комбінації трьох неперервних 2π-періодичних ядер різної парності і встановлено, що існують такі складені ядра, що їх тригонометричний поліном найкращого наближення порядку $n-1$ в інтегральній метриці інтерполює ядро в $2n+2$ рівномірно розташованих точках.

Ключові слова: *найкраще наближення, інтегральна метрика, лінійна комбінація ядер різної парності.*

Вступ. Найкраще наближення класу функцій, що є згортками ядра $\Psi_\beta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)$ з елементами одиничної кулі простору сумовних 2π-періодичних суттєво обмежених функцій тригонометричними многочленами порядку не вище $n-1$ в рівномірній метриці, тобто величина $\sup\limits_{\|\varphi\|_\infty\le 1,\varphi\perp 1}\inf\limits_{T_{n-1}}\left\|(\Psi_\beta\varphi)(t)-T_{n-1}(t)\right\|_C$ може бути отримана, якщо знайдено найкраще наближення в інтегральній метриці ядра $\Psi_\beta(t)$ тригонометричними много-членами порядку не вище $n-1$. В теорії наближення цю задачу називають задачею Фавара. Відомі до цього часу результати по задачі Фавара були отри-мані шляхом доведення того факту, що ядро $\Psi_\beta(t)$ інтерполюється деяким тригонометричним многочленом порядку $n-1$ не більше як в $2n$ рівномірно розташованих точках на періоді і лише в них, причому точки інтерполяції не є кратними (цей многочлен називають многочленом найкращого наближення ядра $\Psi_\beta(t)$ в інтегральній метриці). В даному повідомленні встановлено, що існують деякі лінійні комбінації функцій різної парності, для яких многочлен найкращого наближення порядку $n-1$ інтерполює цю комбінацію в $2n+2$ точках на періоді.

Постановка задачі. Нехай $K_1(t),K_2(t),K_3(t)$ – неперервні 2π-періодичні функції парні та непарні, але обов'язково серед них є функції різної парності. Через $K(t,\alpha)$ будемо позначати наступну лінійну комбінацію $K(t,\alpha)=\alpha_1K_1(t)+\alpha_2K_2(t)+\alpha_3K_3(t),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R.$ Розглянемо задачу відшукання найкращого наближення ядра $K(t,\alpha)$

в інтегральній метриці тригонометричними многочленами порядку не вище за $n-1$, а точніше будемо шукати серед ядер $K(t,\alpha)$ такі, що не відповідають раніше одержуваним умовам.

Допоміжні твердження. Складемо для ядра $K(t,\alpha)$ функцію Крейна порядку $n+1$: $G(t,\alpha)=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k K\left(t+\frac{k\pi}{n+1},\alpha\right)$. Справедливе таке твердження.

Лема 1. *Для будь-якого вектора* $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ *функція Крейна на проміжку* $\left(0;\frac{\pi}{n+1}\right)$ *має нуль.*

Доведення. Зауважимо, що із неперервності функцій $K_i(t), i=\overline{1,3}$, випливає неперервність функції Крейна. Обчислимо значення функції Крейна в правому кінці проміжку

$$\left(0;\frac{\pi}{n+1}\right): G\left(\frac{\pi}{n+1},\alpha\right)=\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k K\left(\frac{\pi}{n+1}+\frac{k\pi}{n+1},\alpha\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k-1}K\left(\frac{k\pi}{n+1},\alpha\right)=-\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k K\left(\frac{k\pi}{n+1},\alpha\right)=-G(0,\alpha).$$

Отже, існує число $\theta\in\left(0;\frac{\pi}{n+1}\right)$, при якому $G(\theta,\alpha)=0$. **Лему доведено.**

Якщо вектори α та β колінеарні, то, як випливає із доведення леми 1, $G(\theta,\alpha)=G(\theta,\beta)$.

Лема 2. *Для будь-якого тригонометричного многочлена порядку не вище* n *функція Крейна порядку* $n+1$ *тотожно рівна нулю.*

Доведення. Нехай $m\le n$, тоді

$$G(\sin mt)=\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k e^{i\left(mt+\frac{km\pi}{n+1}\right)}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(e^{imt}\sum_{k=0}^{2n+1}\left(-e^{\frac{im\pi}{n+1}}\right)^k\right)=\operatorname{Im}\left(e^{imt}\frac{1-e^{2im\pi}}{1+e^{\frac{im\pi}{n+1}}}\right)=0. \quad (1)$$

Аналогічно

$$G(\cos mt)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k e^{i\left(mt+\frac{km\pi}{n+1}\right)}\right)=\operatorname{Re}\left(e^{imt}\frac{1-e^{2im\pi}}{1+e^{\frac{im\pi}{n+1}}}\right)=0. \quad (2)$$

Будь-який триногометричний многочлен порядку не вище n є лінійною комбінацією функцій $\sin mt$ та $\cos mt$, де $m \le n$; функція Крейна також лінійна, тобто $G(\alpha F(t) + \beta H(t)) = \alpha G(F(t)) + \beta G(H(t))$. Тоді із рівностей (1) та (2) випливає справедливість леми.

Лема 3. *Для будь-якого* $\theta \in \left(0; \dfrac{\pi}{n+1}\right)$ *існує ненульовий вектор* $\alpha^* = (\alpha_1^*; \alpha_2^*; \alpha_3^*)$ *та тригонометричний многочлен* $T_{n-1}^*(t)$ *порядку не вище за* $n-1$*, який інтерполює функцію* $K(t, \alpha^*)$ *в точках* $t_k = \dfrac{\theta + k\pi}{n+1}, k = \overline{0; 2n}$.

Доведення. Через $T^{(1)}(t), T^{(2)}(t), T^{(3)}(t)$ позначимо тригонометричні поліно-ми порядку $n-1$, які інтерполюють функції відповідно $K_1(t), K_2(t), K_3(t)$ в точках $t_k, k = \overline{0, 2n-2}$, (такі многочлени існують, див., напр., [7, с. 505]). Тоді для будь-якого набору чисел

$$\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right)$$

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left(K_i(t_k) - T^{(i)}(t_k)\right) = K(t_k, \alpha) - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i T^{(i)}(t_k) = 0, k = \overline{0, 2n-2}\ . \quad (3)$$

Знайдемо значення різниць $K_i(t) - T^{(i)}(t)$ в точках t_{2n-1}, t_{2n}:

$$c_{i,2n-1} = K_i(t_{2n-1}) - T^{(i)}(t_{2n-1}), c_{i,2n} = K_i(t_{2n}) - T^{(i)}(t_{2n}), i = \overline{1,3}.$$

Вектори

$$c^{(1)} = (c_{1,2n-1}; c_{1,2n}), c^{(2)} = (c_{2,2n-1}; c_{2,2n}), c^{(3)} = (c_{3,2n-1}; c_{3,2n})$$

лінійно залежні, тому існує нетривіальна їх комбінація, що рівна нуль-вектору, тобто

$$\exists \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^* \in R: \begin{cases} \alpha_1^* c_{1,2n-1} + \alpha_2^* c_{2,2n-1} + \alpha_3^* c_{3,2n-1} = 0 \\ \alpha_1^* c_{1,2n} + \alpha_2^* c_{2,2n} + \alpha_3^* c_{3,2n} = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Розглянемо такий тригонометричний многочлен:

$$T^*(t) = \alpha_1^* T^{(1)}(t) + \alpha_2^* T^{(2)}(t) + \alpha_3^* T^{(3)}(t).$$

Як лінійна комбінація тригонометричних многочленів порядку $n-1$ він матиме також порядок не вище $n-1$. Виходячи змісту чисел $c_{i,2n-1}, c_{i,2n}$, систему (4) можемо записати наступним чином

$$\begin{cases} K(t_{2n-1}, \alpha^*) - T^*(t_{2n-1}) = 0 \\ K(t_{2n}, \alpha^*) - T^*(t_{2n}) = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Виберемо у співвідношенні (3) вектор α^*, врахуємо (4) і одержимо, що вектор α^* та тригонометричний многочлен $T^*(t)$ шукані. Лема доведена.

Зауважимо, що коли вектор α^* задовольняє лему 2, то колінеарний до α^* вектор також буде цю лему задовольняти.

Використовуючи одержані леми, побудуємо послідовності чисел θ_s та тригонометричних многочленів $T^{(s)}(t)$, які одночасно задовольнятимуть їх умови.

Теорема 1. *Існують послідовності чисел* $\theta_s \in \left(0; \frac{\pi}{n+1}\right)$, *векторів* $\alpha^{(s)}$, *тригонометричних многочленів порядку не вище* $n-1$ $T_{n-1}^{(s)}(t)$ *таких, що*

$$G(K(\theta_s, \alpha^{(s-1)})) = 0, \tag{6}$$

$$K\left(\frac{\theta_s + k\pi}{n+1}, \alpha^{(s)}\right) = T_{n-1}^{(s)}\left(\frac{\theta_s + k\pi}{n+1}\right), k = \overline{0, 2n}. \tag{7}$$

Доведення. Для вектора $\alpha^{(0)} = (1,1,1)$ за лемою 1 існує число $\theta_1 \in \left(0; \frac{\pi}{n+1}\right)$ таке, що $G(K(\theta_1, \alpha^{(0)})) = 0$, для числа θ_1 за лемою 2 існують вектор $\alpha^{(1)}$ та тригонометричний многочлен $T_{n-1}^{(1)}(t)$, для яких $K\left(\frac{\theta_1 + k\pi}{n+1}, \alpha^{(1)}\right) = T_{n-1}^{(1)}\left(\frac{\theta_1 + k\pi}{n+1}\right), k = \overline{0, 2n}.$

Далі для вектора $\alpha^{(1)}$ за лемою 1 існує число $\theta_2 \in \left(0; \frac{\pi}{n+1}\right)$ і справедлива рівність $G(K(\theta_2, \alpha^{(1)})) = 0$; за лемою 2 для числа θ_2 можна вказати вектор $\alpha^{(2)}$ і многочлен $T_{n-1}^{(2)}(t)$ із властивістю $K\left(\frac{\theta_2 + k\pi}{n+1}, \alpha^{(2)}\right) = T_{n-1}^{(2)}\left(\frac{\theta_2 + k\pi}{n+1}\right), k = \overline{0, 2n}.$ і т.д. **Теорему доведено.**

Будемо розглядати вектори $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ із координатами, абсолютні величини яких не перевищують по модулю одиниці (як випливає із зауважень після лем, таке обмеження не впливає на можливості застосовності даної теореми). Отже, числові послідовності $\theta_s, \alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \alpha_3^{(s)}$ є обмеженими. Тригонометричні многочлени $T^{(1)}(t), T^{(2)}(t), T^{(3)}(t)$ інтерполюють неперервні на сегменті функції по рівномірно розташованих вузлах, тому послідовності коефіцієнтів многочленів $T_{n-1}^{(s)}(t)$ із теореми 1 є обмеженими числовими послідовностями.

Теорема 2. *Якщо* $K_1(t), K_2(t), K_3(t)$ *– неперервні* 2π*-періодичні функції, то існують такі лінійна комбінація цих функцій* $K(t,\alpha^*) = \alpha_1^* K_1(t) + \alpha_2^* K_2(t) + \alpha_3^* K_3(t)$, *тригонометричний многочлен порядку* $n-1$ $T_{n-1}^*(t)$, *число* $\theta^* \in \left(0; \dfrac{\pi}{n+1}\right)$, *що*

$$K\left(\frac{\theta^* + k\pi}{n+1}, \alpha^*\right) = T_{n-1}^*\left(\frac{\theta^* + k\pi}{n+1}\right), k = \overline{0, 2n+1}. \quad (8)$$

Доведення. Відомо, що з обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність. Задля зменшення кількості індексів будемо вважати, що послідовності $\theta_s, \alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \alpha_3^{(s)}$ та $T_{n-1}^{(s)}(t)$ із теореми 2 початково були збіжними, тобто існують наступні границі:

$$\lim_{s\to\infty} \alpha_i^{(s)} = \alpha_i^*, i = \overline{1,3}; \lim_{s\to\infty} \theta_s = \theta^*; \lim_{s\to\infty} T_{n-1}^{(s)}(t) = T_{n-1}^*(t), \forall t \in [0; 2\pi].$$

За умовою функції $K_1(t), K_2(t), K_3(t)$ неперервні, тому функція $K(t,\alpha) = K(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ неперервна за всіма змінними, звідки

$$\lim_{s\to\infty} K\left(\frac{\theta_s + k\pi}{n+1}, \alpha^{(s)}\right) = K\left(\frac{\theta^* + k\pi}{n+1}, \alpha^*\right), k = \overline{0, 2n}.$$

Функція $G(t,\alpha) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k K\left(t + \dfrac{k\pi}{n+1}, \alpha\right) = G(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ також неперервна як результат дій над неперервними функціями за всіма змінними, тому $\lim_{s\to\infty} G(K(\theta_s, \alpha^{(s-1)}) = G(K(\theta^*, \alpha^*)$. Отже, якщо в рівностях (6) та (7) перейти до границь при умові $s \to \infty$, то одержимо наступні рівності

$$G(K(\theta^*, \alpha^*)) = 0, \quad (9)$$

$$K\left(\frac{\theta^* + k\pi}{n+1}, \alpha^*\right) = T_{n-1}^*\left(\frac{\theta^* + k\pi}{n+1}\right), k = \overline{0, 2n}. \quad (10)$$

Об'єднаємо рівність (9), лему 2 для многочлена $T_{n-1}^*(t)$ при $t = \theta^*$ і одержимо

$$G(K(\theta^*, \alpha^*)) - G(T_{n-1}^*(\theta^*)) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \left(K(\theta^* + \frac{k\pi}{n+1}, \alpha^*) - T_{n-1}^*(\theta^* + \frac{k\pi}{n+1}) \right) = 0.$$

Із останньої рівності та рівностей (10) випливає, що точка $t_{2n+1}=\theta^*+\dfrac{(2n+1)\pi}{n+1}$ є точкою інтерполяції. **Теорема доведена.**

Основний результат.

Означення 1. *Кажуть, що сумовна* 2π*-періодична функція* $K(t)$*, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову* N_n^**,* $n\in N$ $(K\in N_n^*)$*, якщо існують тригонометричний поліном* $T_{n-1}^*(t)$ *степеня* $n-1$ *і точка* $\xi\in\left[0;\dfrac{\pi}{n}\right[$ *такі, що різниця* $K(t)-T_{n-1}^*(t)$ *змінює знак на* $[0,2\pi[$ *у точках* $t_k=\xi+\dfrac{k\pi}{n}$, $k=0,1,...,2n-1,$ *і лише в них.*

Завдяки функції Крейна досить просто вдається побудувати тригонометричний многочлен, який інтерполює ядро $K(t)$ в $2n$ рівномірно розташованих на періоді точках. Труднощі виникають при доведенні того факту, що більше точок співпадання ядра та многочлена $T_{n-1}^*(t)$ не існує. Власне, всі роботи в цьому напрямі присвячені подоланню цієї проблеми. Але є такі ядра, для яких многочлен $T_{n-1}^*(t)$ співпадає із ядром більше аніж в $2n$ точках на періоді. Тому аналогічно до виконання умови N_n^* запропонуємо таке означення.

Означення 2. *Будемо казати, що сумовна* 2π*-періодична функція* $K(t)$*, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову* $N_{n,p}^*$*,* $n\in N$*,* $p=0,1,...$ $(K\in N_{n,p}^*)$ *якщо існують тригонометричний поліном* $T_{n-1}^*(t)$ *степеня* $n-1$ *і точка* $\xi\in\left[0,\dfrac{\pi}{n+p}\right)$ *такі, що різниця* $K(t)-T_{n-1}^*(t)$ *змінює знак на* $[0,2\pi[$ *у точках* $t_k=\xi+\dfrac{k\pi}{n+p}$, $k=0,1,...,2n+2p-1,$ *і лише в них.*

Якщо ядро $K(t,\alpha)$ задовольняє наступному обмеженню: будь-який тригонометричний многочлен порядку не вище за $n-1$ інтерполює це ядро не більше ніж в $2n+2$ точках на періоді, то ядро $K(t,\alpha^*)$ та тригонометричний многочлен $T_{n-1}^*(t)$ із теореми 2 співпадають лише в точках $t_k=\theta^*+\dfrac{k\pi}{n+1},\quad k=\overline{0,2n+1}$, на періоді із зміною знаку в них. Отже, многочлен $T^*_{n-1}(t)$ та ядро $K(t,\alpha^*)$ задовольняють умову $N^*_{n,1}$ $(K \in N^*_{n,1})$. Тому цей многочлен є многочленом найкращого наближення ядра $K(t,\alpha^*)$ в інтегральній метриці.

Нехай ядра $K_1(t), K_2(t), K_3(t)$ мають таке розвинення в ряди Фур'є:

$$K_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_i(k)\cos(kt - \beta_i), \beta_i \in \left\{0; \frac{\pi}{2}\right\}, \; i = \overline{1,3}, \tag{11}$$

причому серед β_i є різні числа. Використовуючи схему доведення теорем 6.1, 7.1 [6], можна переконатися в справедливості наступного твердження.

Теорема 3. *Якщо неперервні функції* $K_1(t), K_2(t), K_3(t)$ *мають розвинення (11), будь-який тригонометричний многочлен порядку не вище за* $n-1$ *інтерполює ядро*

$$K(t,\alpha) = \alpha_1 K_1(t) + \alpha_2 K_2(t) + \alpha_3 K_3(t), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R,$$

не більше ніж в $2n+2$ *точках на періоді, то існують такі лінійна комбінація цих функцій* $K(t,\alpha^*) = \alpha_1^* K_1(t) + \alpha_2^* K_2(t) + \alpha_3^* K_3(t)$, *число* $\theta^* \in \left(0; \frac{\pi}{n+1}\right)$, *що*

$$E_n\left(K(t,\alpha^*)\right)_1 = \inf_{T_{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left|K(t,\alpha^*) - T_{n-1}(t)\right| dt =$$

$$= 4\left|\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_i\left((2k+1)(n+1)\right)}{2k+1} \sin\left((2k+1)\theta_n - \beta_i\right)\right|,$$

де θ_n *– корінь рівняння*

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^* \sum_{k=0}^{\infty} \psi_i\left[(2k+1)(n+1)\right] \cos\left((2k+1)\theta_n - \beta_i\right) = 0.$$

Переконаємося в тому, що ядра $K_i(t)$, які задовольняють умови теореми 3, існують. Як приклад розглянемо ядра Бернуллі порядку $r_i > 1$, $r_i \in N, i = \overline{1,3}$.

Відомо, що функція

$$K_i(t) = B_{r_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k^{-r_i} \cos\left(kt - \frac{r_i \pi}{2}\right), \; r_i \in N,$$

на проміжку $(0; 2\pi)$ є алгебраїчним многочленом степеня r_i, крім того, лише при $r_i = 1$ одержимо розривну в 0 функцію, похідна якої рівна константі, і $B_r'(t) = -B_{r-1}(t)$. Тому при $r_i > 1$ такі ядра задовольняють умови теореми 2. Нехай $2 \le r_1 < r_2 < r_3$. Припустимо, що при деяких α_i та многочлені $T_{n-1}(t)$ різниця $\Delta_n(t) = K(t;\alpha) - T_{n-1}(t)$ має на періоді більше за $2n+2$ нулі, тоді в силу неперервнсті $\Delta_n(t)$ цих нулів на періоді буде не менше $2n + 4$. За теоремою Ролля якщо якщо $r_1 = 2$, то $\Delta_n''(t) = \alpha_2 B_{r_2-2}(t) + \alpha_3 B_{r_3-2}(t) - T_{n-1}^{(1)}(t)$ буде мати на періоді хоча б $2n+2$ нулі, а якщо $r_1 > 2$, то похідна порядку r_1 виразу $\Delta_n(t)$ матиме хоча б $2n+2$ нулі. Далі, якщо $r_2 = 3$, то $\Delta_n'''(t) = -\alpha_3 B_{r_3-3}(t) - T_{n-1}^{(2)}(t)$ буде мати на періоді $2n+1$ нуль, а якщо $r_2 > 3$, то похідна порядку r_2 виразу $\Delta_n(t)$, а саме $\Delta_n^{(r_2)}(t) = (-1)^{r_2} \alpha_3 B_{r_3-r_2}(t) - T_{n-1}^{(2)}(t)$, буде мати на періоді $2n + 1$ нуль. Проте відомо, що будь-яке ядро Бернуллі не може співпадати із тригонометричним многочленом порядку не вище за $n - 1$ більше аніж в $2n$ точках на періоді. Отже, множина тих ядер $K_i(t)$, що задовольняють умови теореми 3, непорожня.

Висновки. Можливо, спроби довести, що загальні ядра вигляду $\Psi_\beta(t)$ при умовах монотонності послідовності $\psi(k)$ задовольняють умову N_n^*, до цих пір не увінчалися успіхом тому, що існують ядра, причому побудовані природним способом, як от лінійна комбінація відомих ядер, для яких, зокрема, виконується умова $N_{n,1}^*$.

Цікаво було б дослідити випадок більшої кількості ядер, що беруть участь в формуванні лінійної комбінації, а також навести такі нестандартні приклади лінійних комбінацій інших ядер (скажімо ядер Пуассона).

Список використаних джерел:

1. Favard J. Sur lapproximation des fonctins periodiques par des polynomes trigonometriques. *C.r. Acad/sci.* 1936. Vol. 203. P. 1122-1124.
2. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций. *Докл. АН СССР.* 1937. Вип. 15. № 3. С. 107-112.
3. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Изв. АН СССР. Сер. мат.*. 1946. Вип. 10. С. 207-256.
4. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер. *Мат. заметки.* 1974. Вип. 16. № 5. С. 691-701.
5. Сорич В. А., Сорич Н. М., Нові апроксимаційні ефекти ядер Вейля-Надя. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2021. Вип. 22. С. 97-109.
6. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины. 2002. Ч. 2.

7. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, 1949. 688 с.

BEST APPROXIMATION IN THE INTEGRAL METRIC OF A LINEAR COMBINATION OF PERIODIC FUNCTIONS OF DIFFERENT PARITY

In many areas of mathematics, extremal problems often arise related to approximation characteristics of both the approximating functions and the properties of the elements being approximated. For example, in the case of polynomials, the problem can involve the number of points where the values of the function coincide with the values of the polynomial used to replace the function on the studied interval. In practice, the problem of approximating a function from a given set R is reduced to replacing it, according to a defined algorithm, with a function (polynomial) of a fixed degree that is close to it in a certain sense.

In uniform and integral metrics, the problem of finding the exact values of the best approximations for classes of r-times differentiable functions, where r is a natural number, has been explored in the works of J. Favard [1], N. I. Akhiezer, M. G. Krein [2], B. Nadi, S. M. Nikolsky [3], V. K. Dzyadyk [4], S. B. Stechkin, Sun Yun-shen, and others.

The final results concerning the solution of the best approximation problem on Weyl-Nagy classes for arbitrary values of the parameters defining these classes belong to the Ukrainian mathematician V. K. Dzyadyk [4]. In his works on function classes generated by the well-known Bernoulli kernels, it was established that the number of coincidence points between the kernel and the approximating polynomial of degree $n-1$, including their multiplicities, does not exceed $2n$, which allowed for obtaining final results. The work [5] presents cases of such linear combinations of even or odd kernels for which the number of uniformly distributed interpolation points equals $2n+2$ for a polynomial of degree $n-1$ that deviates the least in the metric of the L – space from the studied linear combination.

The idea of studying composite kernels expressed as a linear combination of component terms belongs to O. I. Stepanyets [6], and it was implemented in problems of joint approximation of functions and their derivatives. In the 1980s and 1990s, O. I. Stepanets developed a new approach to classifying periodic functions, which allowed for a fine classification of extremely broad sets of periodic functions. The results obtained for these classes are, on one hand, of a general nature, and on the other, they provide a whole series of new, previously unknown results that could not be achieved with previously known classes. Following the approaches to function classification, we can consider a linear combination of function classes as a certain single class of a more complex nature. Then, the problem of finding the exact values of the upper bounds of the best approximations reduces to the problem of the best approximation for this composite class, which corresponds to convolutions with the generating composite kernel.

In this work, we investigate linear combinations of three continuous 2π-periodic kernels of different parity, and it is established that there exist such composite kernels that their trigonometric polynomial of the best approximation of order $n-1$ in the integral metric interpolates the kernel at $2n+2$ uniformly distributed points.

Key words: *best approximation, integral metric, linear combination of kernels of different parity.*

Отримано: 13.09.2024

UDC 519.21
DOI: 10.32626/2308-5916.2024-25.150-160

Yaroslav Chabanyuk *, **, D.Sc., Professor,
Oleh Stepaniak,**
Uliana Khimka,** PhD

* Lublin University of Technology, Lublin, Republic of Poland,
** Ivan Franko National University of Lviv, Lviv

A MODEL OF ALCOHOL CONSUMPTION WITH SEMI-MARKOV VARIABLE COEFFICIENTS

This paper focuses on the in-depth study of a stochastic approximation methodology involving semi-Markov switches in an averaging scheme with a minor parameter. We present a model where perceived objects are impacted by noise variables dependent on the semi-Markov process. The emphasis is on analyzing the convergence and stability of the stochastic approximation process within this context. Theoretical results are presented alongside numeric simulations, demonstrating the practical applications in managing complex stochastic systems. This work opens promising paths for the use of stochastic approximation approaches in the wider field of semi-Markov processes. Recognizing the mutable nature of alcohol consumption and its dependency on a variety of factors, we propose encoding such dynamism within a semi-Markov parameter structure. This model handles the patterns of individual alcohol consumption as a semi-Markov process; the transition probabilities between different states of alcohol consumption are directed by sociodemographic variables that change over time. Our approach, thus, bridges the gap between the realities of ever-changing alcohol consumption trends and static traditional Markov-chain models. By integrating real-world variables into our innovative model, we offer a cutting-edge analytical tool that lays down new paths for understanding and addressing the challenges with alcohol consumption patterns. Further, our insights have the potential to significantly impact the formulation of effective strategies and public health interventions aimed at alcohol-related harm reduction.

Key words: *semi-Markov processes, diffusion processes, Wiener process, stochastic models, stochastic processes.*