тичний інструмент, який прокладає нові шляхи для розуміння та вирішення проблем, пов'язаних із моделями вживання алкоголю. Крім того, наші висновки можуть суттєво вплинути на формулювання ефективних стратегій і заходів у сфері охорони здоров'я, а також спрямованих на зменшення шкоди, пов'язаної з алкоголем.

**Ключові слова:** *напівмарковські процеси, дифузійні процеси, вінерівські процеси, стохастичні моделі, стохастичні процеси.*

Отримано: 31.07.2024

УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-25.160-172

**І. Б. Шепарович,** канд. фіз.-мат. наук,
**І. В. Гордієнко,** канд. пед. наук

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка, м. Дрогобич

# ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ЗАДАЧА У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ПЕЛІ-ВІНЕРА

Ю. Любарський і К. Сейп (Revista Matematica Iberoamericana, 1997 (13), № 2) дослідили критерій існування єдиного розв'язку простої інтерполяційної задачі $f(\lambda_k) = b_k$ в термінах умов Макенхоупта (неперервної та дискретної $(A^p)$ умови) у просторах Пелі-Вінера цілих функцій експоненційного типу, що не перевищує $\pi$, чиє звуження на дійсну вісь співпадає з простором функцій, степінь порядку $p$ модуля яких є інтегрованим за Лебегом на цій осі, з $p$-нормою (тут $p$ є дійсним числом, більшим за 1). Ці результати дають можливість отримати критерій безумовної базисності системи експонент в просторі функцій, степінь порядку $p$ модуля яких є інтегрованою за Лебегом на $(-\pi; \pi)$ функцією. При цьому послідовність комплексних чисел $(\lambda_k)$ з єдиною граничною точкою на нескінченності, для якої згадана інтерполяційна задача має єдиний розв'язок, називається повною інтерполяційною послідовністю в згаданому просторі Пелі-Вінера.

Згадані результати були узагальненням для випадку $p = 2$ результатів Павлова (1979), Нікольського (1980) та Мінкіна (1982). Ми ж узагальнюємо ці результати на вагові простори (вагою є степенева функція з показником степеня $\omega$) цілих функцій експоненційного типу, що не перевищує $\sigma$, де $\sigma$ – невід'ємне дійсне число, $\omega$ – дійсне число, більше від –1, з $p$-нормою, тобто знаходимо умови повноти послідовності інтерполяційної послідовності $(\lambda_k)$ у ваговому просторі Пелі-Вінера. Розглядаємо різні форми цих умов, серед яких і умови Макенхоупта, неперервна та дискретна $(A^p)$ умови. Доведено також, що якщо послідовність комплексних чисел є повною інтерполяційною посліпдовністю у ваговому просторі Пелі-Вінера, то вона є відносно щільною множиною в просторі *C*. Побудовано також приклад повної інтерполяційної послідовності у випадку $\sigma = \pi$.

**Ключові слова:** *ціла функція експоненційного типу, простір Пелі-Вінера, інтерполяційна задача, повна інтерполяційна послідовність, послідовність нулів.*

**1. Вступ та основні результати.** Нехай $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}\}$ – послідовність відмінних від нуля комплексних чисел. У [1] знайдено критерій існування розв'язку інтерполяційної задачі

$$f(\lambda_k) = d_k, \ k \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

в термінах, які дають можливість отримати критерій безумовної базисності системи експонент $(\exp(i\lambda_k t))$ в просторі $L^2(-\pi;\pi)$. Ми узагальнимо результати з [1] на вагові простори. Нехай $p \in (1;+\infty)$, $\sigma \in [0;+\infty)$, $\omega \in (-1;+\infty)$, $w(x) = |x|^{\omega}$, $L^{p,\omega}(\mathbb{R})$ – простір всіх вимірних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для яких $\|f\|^p_{L^{p,\omega}(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\omega} |f(x)|^p \, dx < +\infty$, $PW^{p,\omega}_{\sigma}$ – простір всіх цілих функцій $f$ експоненційного типу $\sigma_0 \le \sigma$, для яких $\|f\|^p_{PW^{p,\omega}_{\sigma}} := \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\omega} |f(x)|^p \, dx < +\infty$ і $PW^{p,\omega}_{\sigma,+}$ – підпростір парних функцій $f \in PW^{p,\omega}_{\sigma}$. Інтерполяційні задачі в просторі $PW^{p,\omega}_{\sigma}$ розглядались в [9-13, 17-20]. Позначимо через $l^{p,w}$ – простір всі тих послідовностей $d = (d_k)$, для яких

$$\|d\|^p_{l^{p,w}} := \sum_k |d_k|^p |\lambda_k|^{\omega} (1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|) e^{-p\sigma|\operatorname{Im}\lambda_k|} < +\infty .$$

Як і в [1] скажемо, що послідовність $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}\}$ є повною інтерполяційною послідовністю в $PW^{p,\omega}_{\sigma}$, якщо для кожної послідовності $d \in l^{p,w}$, інтерполяційна задача (1.1) має єдиний розв'язок $f \in PW^{p,\omega}_{\sigma}$. Нехай $w = (w_k)$ – послідовність додатних чисел. Скажемо (див. [1]), що послідовність $w = (w_k)$ задовольняє дискретну $(A_p)$ умову, якщо

$$\sup\left\{ \left( \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{k+n} w_j \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{k+n} w_j^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \right\} < +\infty . \tag{1.2}$$

Основні наші результати містяться в таких твердженнях.

**Теорема 1.1.** *Нехай послідовність* $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *задовольняє такі умови:*

*1)* $\lambda_k \neq \lambda_j$, *якщо* $k \neq j$ *;*

*2) є підпослідовністю нулів деякої цілої функції* $S(z)$ *експоненційного типу* $\sigma_0 \leq \sigma$ *;*

*3)*
$$\inf\left\{\prod_{\operatorname{Im}\lambda_j>0}\left|\frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\bar{\lambda}_j}\right| : \operatorname{Im}\lambda_k > 0\right\} > 0,$$
$$\inf\left\{\prod_{\operatorname{Im}\lambda_j<0}\left|\frac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\bar{\lambda}_j}\right| : \operatorname{Im}\lambda_k < 0\right\} > 0,$$

*4)*
$$\inf\left\{\left|\lambda_k-\lambda_j\right| : (k;j) \in \left(\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right)^2, k \neq j\right\} > 0;$$

*5) функція* $u(x) = F^p(x)$, $F(x) := \dfrac{|S(x)|}{\operatorname{dist}(x;\Lambda)}$, *задовольняє неперервну* $(A_p)$ *умову:*

$$\sup_I\left\{\left(\frac{1}{|I|}\int_I u(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I u^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} : I \subset \mathbb{R}\right\} < +\infty,$$

*де* $I \subset \mathbb{R}$ *інтервал довжини* $|I|$.

*Тоді для кожної* $d \in l^{p,w}$, $w_k := \left(1+\left|\operatorname{Im}\lambda_k\right|\right)^{\frac{1}{p}} e^{-p\sigma|\operatorname{Im}\lambda_k|}$, *існує ціла* $f \in PW_\sigma^{p,\omega}$, *яка є розв'язком інтерполяційної задачі (1.1).*

Умови 1)-4) є також необхідними для справедливості твердження теореми 1.1. Питання про необхідність умови *5)* для нас залишилось відкритим. Проте справедливим є таке твердження.

**Теорема 1.2.** *Послідовність* $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *є повною інтерполяційною послідовністю в просторі* $PW_\sigma^{p,\omega}$ *тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови: 1), 3), 4), 2a) функція*

$$S(z) = (z-\lambda_0)\lim_{R\to+\infty}\prod_{|\lambda_k|\leq R, k\neq 0}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right) \tag{1.3}$$

*є цілою функцією експоненційного типу* $\sigma_0 \leq \sigma$, *яка задовольняє умову 5).*

**Зауваження 1.1.** *Умови 3)-5) можна подати і в іншій формі. Докладніше про це скажемо нижче.*

**2. Допоміжні твердження.** Нехай $-\infty \le a < b \le +\infty$, $\mathbb{C}_{a,b} = \{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ і $H^p(\mathbb{C}_{a,b})$ – простір всіх функцій $f$ голоморфних в $\mathbb{C}_{a,b}$, для яких $\sup\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p\, dx : a < y < b\right\} < +\infty$. Якщо принаймні одне з чисел $a$ і $b$ є скінченним, то кожна функція $f \in H^p(\mathbb{C}_{a,b})$ має майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_{a,b}$ кутові граничні значення $f \in L^p(\partial\mathbb{C}_{a,b})$ (див. [12, 17]) і рівність $\|f\|^p := \int\limits_{\partial\mathbb{C}_{a,b}} |f(z)|^p\, |dz|$ задає норму на $H^p(\mathbb{C}_{a,b})$. Якщо $a \in \mathbb{R}$ і $b = +\infty$, то $H^p(\mathbb{C}_{a,b})$ – простір Гарді у півплощині $\mathbb{C}_{a,+\infty}$. Аналогічне можна сказати у випадку, коли $a = -\infty$ і $b \in \mathbb{R}$.

Для доведення теореми 1.1 нам потрібні будуть такі проміжні твердження.

**Лема 2.1** (див. [4-8,12]). *Якщо* $f \in PW_{\sigma,+}^{p,\omega}$, *то для будь-якого* $a \in \mathbb{R}$ *функція* $f_+(z) = (z+ia)^{\frac{\omega}{p}} e^{i\sigma z} f(z)$ *належить до простору* $H^p(\mathbb{C}_{-a,+\infty})$ *і*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x+iy+ia|^{\omega}\, |f(x+iy+ia)|^p\, dx \le e^{p\sigma y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x+ia|^{\omega}\, |f(x+ia)|^p\, dx,\ y > -a,$$

*а функція* $f_-(z) = (z-ia)^{\frac{\omega}{p}} e^{-i\sigma z} f(z)$ *належить до простору* $H^p(\mathbb{C}_{-\infty,a})$ *і*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x+iy-ia|^{\omega}\, |f(x+iy-ia)|^p\, dx \le e^{-p\sigma y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x-ia|^{\omega}\, |f(x-ia)|^p\, dx,\ y < a.$$

**Лема 2.2** (див. [4-8,12]). *Нехай* $\gamma \in \mathbb{R}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Простір (як множина)* $PW_{\sigma}^{p,\omega}$ *співпадає з множиною* $PW^{p,\omega}[\gamma;\beta]$ *всіх парних цілих функцій* $f$ *експоненційного типу* $\sigma_0 \le \sigma$, *для яких* $\|f\|_{PW^{p,\omega}[\gamma;\beta]}^p := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x+i\gamma|^{\omega}\, |f(x+i\beta)|^p\, dx < +\infty$. *При цьому, норма* $\|f\|_{PW^{p,\omega}[\gamma;\beta]}$ *еквівалентна нормі* $\|f\|_{PW_{\sigma,+}^{p,\omega}}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\omega} |f(x+iy)|^p \, dx \le c_1 \| f \|^p_{PW^{p,\omega}_{\sigma,+}} e^{p\sigma|y|}$$

*і*

$$|f(z)| \le c_1 \| f \|_{PW^{p,\omega}_{\sigma}} e^{\sigma|y|} \left(1+|z|\right)^{-\frac{\omega}{p}} \left(1+|y|\right)^{-\frac{1}{p}}, \ z = x+iy \in \mathbb{C},$$

*(тут і далі через* $c_j$, $j \in \mathbb{N}$, *позначаємо додатні сталі).*

**Лема 2.3.** *Нехай* $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}\}$ *є повною інтерполяційною послідовністю в просторі* $PW^{p,\omega}_{\sigma}$. *Тоді інтерполяційна задача* $f(\lambda_k) = 1$, $f(\lambda_j) = 0$ $\quad$ *(*$k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $j \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}$*) має розв'язок в* $H_p(\mathbb{C}_{a,+\infty})$ *і в* $H_p(\mathbb{C}_{-\infty,a})$. *А також виконуються умови 1), 2) та такі умови (для кожного* $a \in \mathbb{R}$ *):*

$$\inf\left\{ \prod_{\operatorname{Im}\lambda_j > a,\, j \ne k} \left| \frac{\lambda_k - \lambda_j}{\lambda_k - \overline{\lambda_j} + 2ia} \right| : \operatorname{Im}\lambda_k > a \right\} > 0 \qquad (2.1)$$

$$\inf\left\{ \prod_{\operatorname{Im}\lambda_j < a,\, j \ne k} \left| \frac{\lambda_k - \lambda_j}{\lambda_k - \overline{\lambda_j} - 2ia} \right| : \operatorname{Im}\lambda_k < a \right\} > 0 \qquad (2.2)$$

$$\sup\left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\, j \ne k} \frac{\left(1+|\operatorname{Im}\lambda_k|\right)\left(1+|\operatorname{Im}\lambda_j|\right)}{\left|\lambda_k - \overline{\lambda_j}\right|^2} : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \right\} < +\infty, \qquad (2.3)$$

*круги* $K(\lambda_k) = \{z : |z - \lambda_k| \le 10\varepsilon |\operatorname{Im}\lambda_k|\}$ *не перетинаються для деякого* $\varepsilon > 0$; $\mu_\Lambda = \sum_{\operatorname{Im}\lambda_k \ge 0} \operatorname{Im}\lambda_k \delta_{\lambda_k}$ *є мірою Карлесона в* $\mathbb{C}^+ := \mathbb{C}_{0,+\infty}$.

**Лема 2.4.** *Умова (2.3) рівносильна умовам 3) і 4), а також умовам (2.1) і (2.2).*

**Лема 2.5.** *Якщо послідовність* $\Lambda$ *задовольняє умову (2.3), то*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1+|\operatorname{Im}\lambda_k|\right)\left(1+|\lambda_k|\right)^{\omega} e^{-p\sigma|\operatorname{Im}\lambda_k|} |f(\lambda_k)|^p \le c_2 \| f \|^p_{PW^{p,\omega}_{\sigma}}, \ f \in PW^{p,\omega}_{\sigma}. \quad (2.4)$$

**Доведення.** Справді, якщо $f \in PW^{p,\omega}_{\sigma,+}$, то за лемою 2.1

$$f_+(z) = (i+z)^{\frac{\omega}{p}} f(z) e^{i\sigma z} \in H^p\left(\mathbb{C}_{-1,+\infty}\right)$$

і

$$f_-(z)=(z-i)^{\frac{\omega}{p}}e^{-i\sigma z}f(z)\in H^p\left(\mathbb{C}_{-\infty,1}\right),$$

а для просторів Гарді відповідний результат справедливий (див. [17]).

Нехай $Q(x;r)$ – квадрат з центром в точці $x\in\mathbb{R}$, зі стороною довжини $2r$ і сторонами паралельними осям координат. Скажемо, як і в [1], що множина $\mathrm{P}\subset\mathbb{C}$ є відносно щільною, якщо існує таке $r_0>0$, що $\mathrm{P}\cap Q(x;r_0)\neq\varnothing$ для кожного $x\in\mathbb{R}$.

**Лема 2.6.** *Якщо* $\Lambda=\{\lambda_k : k\in\mathbb{Z}\}$ *є повною інтерполяційною послідовністю простору* $PW_\sigma^{p,\omega}$, *то* $\Lambda=\{\lambda_k : k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ *є відносно щільною множиною і*

$$\|f\|^p_{PW_\sigma^{p,\omega}}/c_3\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+|\lambda_k|\right)^\omega\left(1+|\mathrm{Im}\,\lambda_k|\right)e^{-p\sigma|\mathrm{Im}\,\lambda_k|}\left|f(\lambda_k)\right|^p\le c_3\|f\|^p_{PW_\sigma^{p,\omega}}, \tag{2.5}$$

$$f\in PW^{p,\omega,\sigma}.$$

**Доведення.** Доведення (2.5) таке ж, як і в [1]. Припустимо, що $\Lambda$ не є відносно щільною множиною. Тоді знайдуться послідовності $\{x_j\}$ і $\{r_j\}$ такі, що $|x_j|>s$, $r_j\to+\infty$ і $\Lambda\cap Q(x_j;r_j)=\varnothing$. Нехай $s\in\mathbb{N}$, $sp>1+\omega$, $p\mu=\omega+1-sp$, $q_j=\dfrac{1}{x_j}$ і

$$f_j(z)=q_j{}^{\mu}\left(\frac{\sin\sigma q_j\left(z-x_j\right)}{\left(z-x_j\right)}\right)^s.$$

Тоді $f_j\in PW_\sigma^{p,\omega}$,

$$\|f_j\|^p_{PW_\sigma^{p,\omega}}=2\int_0^{+\infty}|1-u|^\omega\left(\frac{|\sin\sigma u|}{u}\right)^{sp}du+2\int_0^{+\infty}|1+u|^\omega\left(\frac{|\sin\sigma u|}{u}\right)^{sp}du,$$

$$\|f_j\|^p_{PW_\sigma^{p,\omega}}/c_3\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+|\mathrm{Im}\,\lambda_k|\right)\left(1+|\lambda_k|\right)^\omega e^{-p\sigma|\mathrm{Im}\,\lambda_k|}\left|f_j(\lambda_k)\right|^p\le c_3\|f_j\|^p_{PW_\sigma^{p,\omega}},$$

і

$$\|f_j\|^p_{PW_\sigma^{p,\omega}}/c_3\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1+|\mathrm{Im}\,\lambda_k|\right)\left(1+|\lambda_k|\right)^\omega e^{-p\sigma|\mathrm{Im}\,\lambda_k|}\left|f_j(\lambda_k)\right|^p\to0,\ j\to\infty.$$

Маємо суперечність, бо $\|f_j\|^p_{PW_\sigma^{p,\omega}}$ не залежить від $j$.

**Лема 2.7.** *Якщо* $\Lambda=\{\lambda_k : k\in\mathbb{N}\}$ *є повною інтерполяційною послідовністю простору* $PW_{\sigma,+}^{p,\omega}$, *то існує відносно щільна множина*

$\Gamma = \left\{ \gamma_j : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \subset \Lambda$ *така, що* $\left( | \gamma_j |^{\omega} \left| S'\left( \gamma_j \right) \right|^{p} \right)$ *задовольняє дискретну* $\left( A_p \right)$ *умову (1.2).*

**Доведення.** Справді, нехай $r > r_0$, $Q_j = Q\left(4jr; r\right)$, $\Gamma = \left\{ \gamma_j : j \in \mathbb{Z} \right\} \subset \Lambda$ – відносно щільна послідовність така, що $\gamma_j \in Q_j$. Нехай $\mathrm{P} = \left\{ \rho_j \right\}$ – інша послідовність така, що $\left| \gamma_j - \rho_j \right| = \varepsilon$ і $S\left( \rho_j \right) = \varepsilon S'\left( \gamma_j \right)$. Тоді послідовність $\left\{ \rho_j \right\}$ також задовольняє умову (2.3). Тому згідно з лемою 2.5

$$\sum_j \left( 1 + | \rho_j | \right)^{\omega} \left( 1 + | \operatorname{Im} \rho_j | \right) e^{-p\sigma \left| \operatorname{Im} \rho_j \right|} \left| f(\rho_j) \right|^p \le c_4 \| f \|^p_{PW_{\sigma}^{p,\omega}} .$$

Завдяки (2.5) отримуємо

$$\sum_j \left| \rho_j \right|^{\omega} \left( 1 + \left| \operatorname{Im} \rho_j \right| \right) e^{-p\sigma \left| \operatorname{Im} \rho_j \right|} \left| f(\rho_j) \right|^p \le$$

$$\le c_5 \sum_j \left| \gamma_j \right|^{\omega} \left( 1 + \left| \operatorname{Im} \gamma_j \right| \right) e^{-p\sigma \left| \operatorname{Im} \gamma_j \right|} \left| d_j \right|^p .$$

Оскільки $\gamma_j \in Q_j$, то послідовності $\left( \left| \operatorname{Im} \gamma_j \right| \right)$ і $\left( \left| \operatorname{Im} \rho_j \right| \right)$ є обмеженими і

$$\sum_j \left| \rho_j \right|^{\omega} \left| f(\rho_j) \right|^p \le c_6 \sum_j \left| \gamma_j \right|^{\omega} \left| d_j \right|^p .$$

Функція $S'$ є непарною. Тому для скінченної множини $\left\{ d_j : j \in [1; m] \cap \mathbb{Z} \right\}$ єдиним розв'язком інтерполяційної задачі $f(\gamma_k) = d_k$, $\gamma_k \in \Gamma$, і $f(\gamma_k) = 0$, $\gamma_k \notin \Gamma$, є функція

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{m} \frac{d_k S(z)}{\left( z - \gamma_k \right) S'(\gamma_k)} .$$

Оскільки

$$f(\rho_j) = \varepsilon S'\left( \gamma_j \right) \sum_k \frac{d_k}{\left( \rho_j - \gamma_k \right) S'(\gamma_k)} ,$$

то отримуємо, що

$$\sum_j \left| \rho_j \right|^{\omega} \left| f(\rho_j) \right|^p \le \sum_j \left| \gamma_j \right|^{\omega} \left| S'\left( \gamma_j \right) \right|^p \left| \sum_k \frac{d_k}{\rho_j - \gamma_k} \right|^p \le c_6 \sum_j \left| \gamma_j \right|^{\omega} \left| S'\left( \gamma_j \right) \right|^p \left| d_j \right|^p .$$

Таким чином, оператор $\mathrm{H}_{\Gamma,\mathrm{P}} : d = \{d_j\} \to \mathrm{H}_{\Gamma,\mathrm{P}} d;\ \ \mathrm{H}_{\Gamma,\mathrm{P}} d := \sum_k \frac{d_k}{\rho_j - \gamma_k}$ є обмеженим в просторі $l_+^{p,w}$, якщо $w_j = |\gamma_j|^{\omega} |S'(\gamma_j)|^p$. Тому [1] послідовність $\left(|\gamma_j|^{\omega} |S'(\gamma_j)|^p\right)$ задовольняє дискретну $(A_p)$ умову, що і потрібно було довести.

**Лема 2.8.** *Якщо* $\Lambda$ *є повною інтерполяційною послідовністю простору* $PW_{\sigma,+}^{p,\omega}$*, то виконується 5).*

**Доведення.** Справді, оскільки дискретна $(A_p)$ умова рівносильна неперервній $(A_p)$ умові, то, використовуючи лему 2 з [1, с. 368] і нерівність $t^{\alpha} s^{1-\alpha} \le t + s,\ \ t > 0, s > 0, \alpha \in [0;1]$, отримуємо твердження леми 2.8 з леми 2.7.

Аналогічно до леми 3 [1, с. 371], використовуючи умови 1), 2) і 5), отримуємо справедливість такої леми

**Лема 2.9.** *Нехай круги* $K(\lambda_k) = \{z : |z - \lambda_k| \le 10\varepsilon |\mathrm{Im}\,\lambda_k|\}$ *є попарно неперетинними для деякого* $\varepsilon > 0$. *Тоді виконується*

$$|S(z)| \ge c_7 (1 + |z|)^{-\frac{1}{p}} e^{\sigma |\mathrm{Im}\, z|},$$

*якщо* $\mathrm{dist}(z; \Lambda) \ge \varepsilon (1 + |\mathrm{Im}\, z|)$.

**3. Доведення основних тверджень.**

**Доведення теореми 1.1.** Покажемо, що функція

$$f(z) = v.p. \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{d_m S(z)}{(z - \lambda_m) S'(\lambda_m)}, \tag{3.1}$$

є шуканим розв'язком інтерполяційної задачі (1.1). Достатньо оцінити частинні суми ряду (3.1), які відповідають $\lambda_m \in \mathbb{R} \cup \mathbb{C}_{0,+\infty}$ та $\lambda_m \in \mathbb{R} \cup \mathbb{C}_{-\infty,0}$, відповідно на прямих $\mathrm{Im}\, z = -\frac{1}{2}$ і $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2}$. Ми приведемо відповідні оцінки на прямій $\mathrm{Im}\, z = 0$ вважаючи як і в [1], що відповідно $\mathrm{Im}\,\lambda_m \ge \frac{1}{2}$ і $\mathrm{Im}\,\lambda_m < \frac{1}{2}$. У першому випадку, нехай

$$B(z) = \prod_{\mathrm{Im}\,\lambda_j \ge \frac{1}{2}} \frac{z - \lambda_j}{z - \overline{\lambda_j}},\ \ G(z) = \frac{S(z)}{e^{-i\sigma z} B(z)}.$$

Тоді $S(z)=G(z)e^{-i\sigma z}B(z)$, $G(z)$ – обмежена зовнішня функція для $\mathbb{C}^{+}$, функція $|G(x)|^{p}$ задовольняє $(A_p)$ умову Зауважимо, що умова 5) рівносильна тому факту, що функція $|G(x)|^{p}$ задовольняє $(A_p)$ умову. З умов 3) випливає $|S'(\lambda_k)|\cong\frac{e^{\sigma\operatorname{Im}\lambda_k}}{\operatorname{Im}\lambda_k}|G(\lambda_k)|$. Отже достатньо довести обмеженість в $L^{p}(\mathbb{R})$ функції

$$\tilde{f}(x)=\sum_{\operatorname{Im}\lambda_m\geq\frac{1}{2},m=-n}^{n}\frac{\operatorname{Im}\lambda_m d_m e^{-\sigma\operatorname{Im}\lambda_m}G(x)}{(x-\lambda_m)Q(\lambda_m)}.$$

Нехай

$$\mathcal{H}: f\to\mathcal{H}f(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

– оператор Гільберта . Тоді (тут $w(x)=x^{\omega}$, $h_w(x)=w(x)h(x)\in L^{q}(\mathbb{R})$ )

$$\left\|\tilde{f}\right\|^{p}_{L^{p,\omega}(\mathbb{R})}=\sup_{\|h\|\leq 1,h\in L^{q,\omega}(\mathbb{R})}\left|\sum_{\operatorname{Im}\lambda_m\geq\frac{1}{2},m=-n}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Im}\lambda_m d_m e^{-\sigma\operatorname{Im}\lambda_m}G(x)h_w(x)}{(x-\lambda_m)G(\lambda_m)}dx\right|\leq$$

$$\leq\sup_{\|h\|\leq 1,h\in L^{q,\omega}(\mathbb{R})}\left|\sum_{\operatorname{Im}\lambda_m\geq\frac{1}{2},m=-n,m\neq 0}^{n}\frac{\operatorname{Im}\lambda_m d_m e^{-\sigma\operatorname{Im}\lambda_m}\mathcal{H}Gh_w(\lambda_m)}{G(\lambda_m)}\right|$$

$$\leq\sup_{\|h\|\leq 1,h\in L^{q,\omega}(\mathbb{R})}\left(\sum_{\operatorname{Im}\lambda_m\geq\frac{1}{2}}\left|\frac{\mathcal{H}Gh_w}{G}(\lambda_m)\right|^{q}\operatorname{Im}\lambda_m\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{\operatorname{Im}\lambda_m\geq\frac{1}{2}}\operatorname{Im}\lambda_m e^{-p\sigma\operatorname{Im}\lambda_m}|d_m|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оскільки $\sum\limits_{\operatorname{Im}\lambda_k\geq 0}\operatorname{Im}\lambda_k\delta_{\lambda_k}$ – міра Карлесона, $|G(x)|^{-q}$ задовольняє $(A_q)$ умову, $G$ – зовнішня функція для $\mathbb{C}^{+}$, то $\frac{\mathcal{H}Gh_w}{G}\in H^{q}(\mathbb{C}^{+})$ тому відповідні суми є рівномірно обмеженими. Сума, що відповідає $\operatorname{Im}\lambda_k<0$, розглядається аналогічно. Отож, розв’язок розглядуваної інтерполяційної задачі існує. **Теорема 1.1 доведена.**

**Доведення теореми 1.2.** *Необхідність* випливає з лем 2.3-2.8. Для доведення достатності досить завдяки теоремі 1.1 довести єдність. Переходимо безпосередньо до доведення єдиності. Зазначимо, що (див. [1])

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|F(x)|^p}{1+|x|^p}\,dx<+\infty\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}|F(x)|^p\,dx=+\infty\,.$$

Припустимо, що $f(\lambda)=0$, $\lambda\in\Lambda$. Нехай $\psi(z)=\dfrac{f(z)}{S(z)}$. Оскільки за лемою 2.2 $|f(z)|\le c_1\|f\|_{PW^{p,\omega}_{\sigma,+}}e^{\sigma|y|}\left(1+|z|\right)^{-\frac{\omega}{p}}\left(1+|y|\right)^{-\frac{1}{p}}$, то, використовуючи лему 2.9, отримуємо, що функція

$$|\psi(z)|=\left|\frac{f(z)}{S(z)}\right|\le c_8\,\frac{e^{\sigma|y|}\left(1+|z|\right)^{-\frac{\omega}{p}}\left(1+|\operatorname{Im}z|\right)^{-\frac{1}{p}}}{\left(1+|z|\right)^{-\frac{1}{p}}e^{\sigma|\operatorname{Im}z|}}=c_8\,\frac{\left(1+|z|\right)^{\frac{1-\omega}{p}}}{\left(1+|\operatorname{Im}z|\right)^{\frac{1}{p}}}$$

рівномірно обмежена зовні $\left\{z:\operatorname{dist}\left(z;\Lambda\right)\ge\varepsilon\left(1+|\operatorname{Im}z|\right)\right\}$. Тому, згідно з принципом Фрагмена-Ліндельофа [12], $\psi(z)\equiv c_9$. Водночас, (див. [1]) $\int_{-\infty}^{+\infty}|S(x+i)|^p\,dx=+\infty$ і $\int_{-\infty}^{+\infty}|S(x)|^p\,dx=+\infty$. Отже, $\psi(z)\equiv 0$. **Теорему 1.2. доведено.**

**Приклад 3.1.** Нехай $\sigma=\pi$, $\rho_k=k+\beta_1$, $|\operatorname{Re}\beta_1|<\dfrac{1}{2}$ і $-1+\dfrac{1}{2p}<\operatorname{Re}\beta_1<\dfrac{1}{2p}-\dfrac{1}{2}$. Тоді послідовність $\mathrm{P}=\{\rho_k:k\in\mathbb{N}\}$ є повною інтерполяційною послідовністю в просторі $PW^{p,\omega}_{\sigma,+}$, $\omega\ge 2\operatorname{Re}\beta_1$. Якщо ж $0<|\operatorname{Re}\beta_1|<\dfrac{1}{2}$ і $\omega<2\operatorname{Re}\beta_1$, то послідовність $\mathrm{P}=\{\rho_k:k\in\mathbb{N}\}$ не є повною інтерполяційною послідовністю в просторі $PW^{p,\omega}_{\sigma,+}$. Справді, для функції $u(x)=\left(1+|x|\right)^{\gamma}$ неперервна $\left(A_p\right)$ умова виконується, якщо $-1<\gamma<p-1$ (див. [11], с. 248, розділ 8, твердження 1.1). Окрім цього, для функції $S(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{\left(k+\beta_1\right)^2}\right)$ зовні деяких кру-

гів справедлива (див. [11], с. 75, розділ 3, наслідок 4,) оцінка $\left|S(z)\right| \cong \left(1+|z|\right)^{-\left(1+2\operatorname{Re}\beta_1\right)} e^{\pi|\operatorname{Im} z|}$. Тому ця функція $S$ належить до $PW_{\sigma,+}^{p,\omega}$, якщо $\omega < 2\operatorname{Re}\beta_1$.

**4. Висновки.** Отже в статті отримано необхідні і достатні умови існування єдиного розв’язку простої інтерполяційної задачі $f(\lambda_k) = d_k$ в просторі $PW_{\sigma}^{p,\omega}$ для кожної послідовності $(d_k)$ з простору $l^{p,w}$ всіх тих послідовностей $d = (d_k)$, для яких

$$\|d\|_{l^{p,w}}^{p} := \sum_{k} |d_k|^p \, |\lambda_k|^{\omega} \left(1+|\operatorname{Im}\lambda_k|\right) e^{-p\sigma|\operatorname{Im}\lambda_k|} < +\infty$$

і цим самим узагальнено результати з [1] на вагові простори функцій експоненційного типу, що не перевищує σ.

## Список використаних джерел:


1. Lyubarskii Yu. I., Seip K. Complete interpolating sequences for Paley-Wiener spaces and Muckenhoupt’s ($A^p$) condition. *Revista Matematica Iberoamericana*. 1997. Vol. 13. № 2. P. 361-376.
2. Boas R. P., Pollard H. Complete sets of Bessel and Legendre functions. *Annals of Mathematics*. 1947. Vol. 48. № 2. P. 366-384.
3. Hochstadt H. The mean convergence of Fourier-Bessel series. *SIAM Rev*. 1967. Vol. 9. P. 211-218.
4. Джрбашян М. М, Рафаелян С. Г. О целых функциях экспоненциального типа из весовых классов $L^2$. *ДАН Арм. ССР*. 1981 Вип. 73. № 1. С. 29-36.
5. Рафаелян С. Г. Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа. *Изв. АН Арм. ССР. Математика.* 1983. Вип. 18. № 3. С. 1-21.
6. Рафаелян С.Г. Базисность некоторых биортогональных систем в $L_2(-\sigma;\sigma)$ с весом. *Изв. АН Арм. ССР, Математика.* 1984. Вип. 19. № 3. С. 21-32.
7. Джрбашян М. М, Рафаелян С. Г. Интерполяционные разложения в классах целых функций и порождаемые ими базисы Рисса. *Изв. АН Арм. ССР. Математика*. 1987. Вип. 22. № 1. С. 23-63.
8. Djrbashian M. M., Raphaelian S. G. Interpolation theorems and expansions with respect to Fourier type systems. *J Approx. Theory.* 1987. Vol. 50. № 4. P. 297-325.
9. Levin B. Ya. Lectures on entire functions. *Transl. Math. Monogr. Amer. Math. Soc., Providence, R.I.* 1996. Vol. 150. 248 p.
10. Lyubarskii Yu. I., Seip K. Weighted Paley-Wiener spaces. *J. Amer. Math. Soc.* 2002. Vol. 15. № 4. P. 979-1006.
11. Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. Москва: Физматлит, 2003. С. 3-152.
12. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Москва: Наука, 1966, 672 с.

13. Губреев Г. М. Базисность семейств функции типа Миттаг-Леффлера, преобразования Джрбашяна и весовые оценки интегралов типа Коши. *Изв. АН Арм. ССР. Математика.* 1988. Вип. 23. № 3. С. 237-269.
14. Губреев Г. М. Интегральное преобразование типа Джрбашяна и интерполяция целыми функциями конечного порядка. *Изв. АН Арм. ССР. Математика.* 1990. Вип. 25. № 1. С. 83-90.
15. Губреев Г. М. Спектральный анализ биортогональных разложений, порождаемых весами Макенхаупта, *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* 1991. Вип. 190. С. 34-80.
16. Gubreev G. M., Levchuk V. N. Description of unconditional bases formed by values of the Dunkl kernels. *Funct. Anal. Appl.* 2015. Vol. 49. № 1. P. 64-66.
17. Koosis P. Introduction to $H^p$ spaces. Second edition. *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. Vol. 115,
18. Griffith J. L. Hankel transforms of functions zero outside a finite interval. *J. Proc. Roy. Soc. New South Wales.* 1955. Vol. 89. P. 109-115.
19. Singer I. Bases in Banach spaces. Berlin, 1970. 668 p.
20. Stempak K. On convergence and divergence of Fourier-Bessel series. *Electron. Trans. Numer. Anal.* 2002. Vol. 14. P. 223-235.
21. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. Completeness and minimality of systems of Bessel functions. *Ufa Math. J.* 2013. Vol. 5. № 2. P. 131-141.
22. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. On the completeness and minimality of sets of Bessel functions in weighted L 2-spaces. *Eurasian Math. J.* 2015. Vol. 6. № 1. P. 123-131.
23. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V., Sheparovych I. B. Unconditional bases of systems of Bessel functions. *Eurasian Mathematical Journal.* 2020. Vol. 11 (4). P. 76-86. DOI: 10.32523/2077-9879-2020-11-4-76-86

## INTERPOLATION PROBLEM IN PALEY-WIENER WEIGHTED SPACES

Yu. Lyubarskii and K. Seip K. (Revista Matematica Iberoamericana, 1997 (13), № 2) found the criterion for the existence of a uniqe solution of the interpolation problem $f(\lambda_k) = b_k$ in the Paley-Wiener spaces in terms of Makenhoupt's ($A^p$) condition of entire functions of the exponential type at most π, where $p$ is a real number more than 1, whose restriction to the real line coincides with the class of functions which module degree number $p$ is integrable on $R$ whith $p$-norm. These results make it possible to obtain the criterion of the unconditional basisness of the system of exponentials in the space of functions which module degree number $p$ is an integrable on $(-\pi; \pi)$.

At the same time the sequence $(\lambda_k)$ with a unique limit point at the infinity, for which mentioned interpolation problem has a uniqe solution is called a complete interpolating sequence in the Paley-Wiener spaces. For $p = 2$ those descriptions coincides with those given by Pavlov (1979), Nikolsky (1980), and Minkin (1982).

We generalize these results to the weighted spaces of entire functions of the exponential type at most σ with the $p$-norm (there is a power function with exponent ω as a weight), where σ is a nonnegative real number, $\omega$ – real number more then –1. That is, we find conditions for the completeness of the interpolating sequence ($\lambda_k$) in the Paley-Wiener weighted space. Different forms of these conditions are considered. Among them there are Mackenhoupt's conditions (continuous and discrete ($A^p$) conditions). There is proved that if ($\lambda_k$) is a complete interpolation sequence in the Paley-Wiener weighted space, then it is a relatively dense set in the space *C*. Also there constructed an example of a complete interpolating sequence for $\sigma = \pi$.

**Key words:** *entire function of exponential type, Paley-Wiener space, interpolation problem, complete interpolating sequence, sequence of zeros.*

Отримано: 06.09.2024