УДК 512.71
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-26.5-19

Л. А. Вотякова, канд. фіз.-мат. наук,
Л. Й. Наконечна, канд. пед. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

НОРМОВАНА АЛГЕБРА БІНАРНИХ ЧИСЕЛ

Багатство теорії функцій комплексної змінної, ефективність її методів завжди слугували стимулом і джерелом ідей при побудові теорії функції гіперкомплексної змінної. Необхідно відзначити, що гіперкомплексні числові системи є розширенням поля комплексних чисел. Сучасні гіперкомплексні дослідження можна поділити на алгебраїчні та аналітичні; останні часто називають гіперкомплексним аналізом у широкому розумінні.

Гіперкомплексні системи є ефективним інструментом у математичному моделюванні, який дозволяє представляти складні багатовимірні дані та операції над ними у більш компактному вигляді.

У роботі побудовано нову систему гіперкомплексних чисел за допомогою встановлення ізоморфізму повній матричній алгебрі. Точніше: з повної матричної алгебри виділяється деяка підалгебра, яка є матричним поданням алгебри скінченного рангу.

Матрична алгебра досліджується класичними методами теорії матриць, наділяється нормою і це дає можливість будувати елементи аналізу в ній, використовуючи методи матричного аналізу. Одержані для матриць результати переносяться на елементи ізоморфної алгебри скінченного рангу, тобто на гіперкомплексні числа, названі бінарними. І це дало можливість наділити алгебру бінарних чисел топологічною структурою і закласти початки аналізу в ній, побудувати функції бінарної змінної. У статті введено поняття збіжних послідовностей бінарних чисел, через них збіжних бінарних рядів.

Новизна нашого підходу у тому, що множина гіперкомплексних чисел розглядається як алгебра рангу 2 над полем $\boldsymbol{R}$ і через знайдене матричне подання визначається n-й степінь бінарного числа, а отже і суми певних степеневих рядів, в алгебраїчній формі. Функції бінарної змінної означаються через суми відповідних степеневих рядів. І як результат – виведено загальну формулу для конструювання елементарних функцій бінарної змінної.

Гіперкомплексні числа вже використовуються для опису квантових станів, моделювання динамічних систем, у комп’ютерній графіці та криптографії. А подальший розвиток гіперкомплексного аналізу і побудова нових числових систем

призводить до розширення кола їх застосувань при моделюванні різноманітних явищ та процесів.

Ключові слова: *алгебра скінченного рангу, гіперкомплексна система, бінарне число, норма, бінарний степеневий ряд, функція бінарної змінної.*

Вступ. Досить швидко розширюється коло задач, розв’язання яких потребує сучасна наука й техніка, що провокує створення нових вимог до методів подання й обробки даних. Варто підкреслити, що для подання та обробки даних використовуються ті числові системи, які «переводять» задачі у вимірності вищих порядків.

На сьогоднішній день в інженерній справі, в основному, знаходять своє застосування комплексні числа. Разом з тим, ми прекрасно розуміємо, що частина задач простіше розв’язується із застосуванням інших алгебр гіперкомплексних чисел [1, 2]. Найбільшу кількість застосувань у технічних науках знайшли кватерніони [3]. Це обумовлено тим, що за їхньою допомогою дуже зручно та ефективно моделювати вже відомі задачі в нових формулюваннях. Із численних застосувань кватерніонів відзначимо тільки деякі, найбільш важливі, які спираються на апарат кватерніонів: задачі навігації, орієнтації та управління рухом твердого тіла в тривимірному просторі, у тому числі й під водою; комп’ютерна графіка, де необхідно розрахувати вигляд на екрані тіла, що обертається, у багатьох проміжних положеннях для створення ефектів анімації; дослідження деформації пружних та еластичних конструкцій; фільтрація зображення на базі кватерніонного перетворення Фур’є; обробка кольорового зображення, при якій композиція трьох основних кольорів виражається векторною частиною кватерніону.

Необхідно відзначити, що гіперкомплексні числові системи є розширенням поля комплексних чисел. Вивчення цих розширень є новим науковим і практичним напрямом та вимагає зусиль провідних математиків. Що стосується сучасності, то вперше серйозно такими числами зацікавився Є. Каратаєв, який побудував початки диференціального числення дуальної змінної, але алгебра не була наділена прозорою топологічною структурою. Також Синьков М. В. та його команда займалися дослідженням у галузі представлення інформації за допомогою гіперкомплексних чисел [1]. Співпраця мексиканського математика М. Шапіро та українського – О. Ф. Геруса стала початком зародження ще одного осередка досліджень у галузі гіперкомплексних систем [4]. Також в Україні над цією тематикою працюють І. П. Мельниченко, С. А. Плакса [5], В. С. Шпаківський [6]. Сучасні гіперкомплексні дослідження можна поділити на алгебраїчні та аналітичні; останні часто називають гіперкомплексним аналізом у широкому розумінні (тобто математичний аналіз, розглядуваний із задіюванням власне гіперкомплексних чисел). Щодо алгебраїчних гіперкомплексних досліджень, то українські дослідники приділяють багато уваги питанням про розв'язки гіперкомплексних поліноміальних рівнянь.

У працях [7, 8] ми побудували і дослідили нову алгебру рангу 3, елементи якої назвали тернарними числами, наділили її нормою і заклали в ній початки аналізу, означивши основні елементарні функції. В даній роботі аналогічним шляхом побудуємо ще одну нормовану алгебру скінченного рангу.

Виклад основного матеріалу. За базисну множину візьмемо множину символів $\boldsymbol{Be} = \left\{ xe_0 + ye_1 \,\middle|\, x, y \in R \right\}$ і наділимо її у стандартний спосіб операцією додавання і операцією множення на число, а саме: для будь-яких елементів $b_1 = x_1e_0 + y_1e_1$, $b_2 = x_2e_0 + y_2e_1$ з множини $\boldsymbol{Be}$

$$b_1 + b_2 = \left(x_1 + x_2\right)e_0 + \left(y_1 + y_2\right)e_1 \tag{1}$$

і для будь-якого $\lambda \in R$, $b = xe_0 + ye_1$ з B

$$\lambda b = \lambda xe_0 + \lambda ye_1. \tag{2}$$

В очевидний спосіб перевіряється, що множина $\boldsymbol{Be}$ відносно означених операцій (1) і (2) є лінійний простір над полем R розмірності 2, за базис якого візьмемо елементи $e_0 = 1 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1$, $e_1 = 0 \cdot e_0 + 1 \cdot e_1$.

Наділимо множину $\boldsymbol{Be}$ операцією множення, а саме: для будь-яких елементів b_1, b_2 з $\boldsymbol{Be}$

$$b_1b_2 = \left(x_1e_0 + y_1e_1\right)\left(x_2e_0 + y_2e_1\right) := \left(x_1x_2 + y_1y_2\right)e_0 + \left(x_1y_2 + x_2y_1\right)e_1 . \tag{3}$$

Перевіримо, що операція множення є дистрибутивною відносно додавання, комутативна та асоціативна. Дійсно, для будь-яких елементів $b_1 = x_1e_0 + y_1e_1$, $b_2 = x_2e_0 + y_2e_1$ з $\boldsymbol{Be}$

$$b_1\left(b_2 + b_3\right) = \left(x_1e_0 + y_1e_1\right)\left(\left(x_2 + x_3\right)e_0 + \left(y_2 + y_3\right)e_1\right) =$$

$$= \left(x_1\left(x_2 + x_3\right) + y_1\left(y_2 + y_3\right)\right)e_0 + \left(x_1\left(y_2 + y_3\right) + \left(x_2 + x_3\right)y_1\right)e_1 =$$

$$= \left(x_1x_2 + y_1y_2\right)e_0 + \left(x_1y_2 + x_2y_1\right)e_1 +$$

$$+ \left(x_1x_3 + y_1y_3\right)e_0 + \left(x_1y_3 + x_3y_1\right)e_1 = b_1b_2 + b_1b_3,$$

$$b_1b_2 = \left(x_1x_2 + y_1y_2\right)e_0 + \left(x_1y_2 + x_2y_1\right)e_1 =$$

$$= \left(x_2x_1 + y_2y_1\right)e_0 + \left(x_2y_1 + x_1y_2\right)e_1 = b_2b_1,$$

$$b_1\left(b_2b_3\right) = \left(x_1e_0 + y_1e_1\right)\left(\left(x_2x_3 + y_2y_3\right)e_0 + \left(x_2y_3 + x_3y_2\right)e_1\right) =$$

$$= \left(x_1\left(x_2x_3 + y_2y_3\right) + y_1\left(x_2y_3 + x_3y_2\right)\right)e_0 + \left(x_1\left(x_2y_3 + x_3y_2\right) + \left(x_2x_3 + y_2y_3\right)y_1\right)e_1 =$$

$$= \left(x_3\left(x_1x_2 + y_1y_2\right) + y_3\left(x_1y_2 + x_2y_1\right)\right)e_0 + \left(x_3\left(x_1y_2 + x_2y_1\right) + \left(x_1x_2 + y_1y_2\right)y_3\right)e_1 =$$

$$= \left(\left(x_1x_2 + y_1y_2\right)e_0 + \left(x_1y_2 + x_2y_1\right)e_1\right)\left(x_3e_0 + y_3e_1\right) = \left(b_1b_2\right)b_3 .$$

Крім того, для кожного елемента b з $\boldsymbol{Be}$ виконується

$$be_0 = \left(xe_0 + ye_1\right)\left(1 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1\right) = b = e_0 b .$$

Таким чином, множина $\boldsymbol{Be}$ наділена операціями (1)-(3) є алгебра (асоціативно-комутативна) рангу 2 над полем R, яку будемо називати ***алгеброю бінарних чисел, а її елементи – бінарними числами.***

Зазначимо, що множення бінарних чисел здійснюється згідно таблиці 1.

Таблиця 1

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	e_0

Підмножини

$$I_1 = \left\{xe_0 + xe_1 \middle| x \in R\right\}, I_2 = \left\{xe_0 - xe_1 \middle| x \in R\right\}$$

є нетривіальними ідеалами алгебри $\boldsymbol{Be}$ (алгебра $\boldsymbol{Be}$ не є полем, має дільники нуля, наприклад $\left(xe_0 + xe_1\right)\left(ye_0 - ye_1\right) = 0 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1$).

Підмножина $\left\{xe_0 + 0 \cdot e_1 \middle| x \in R\right\}$ – підалгебра $\boldsymbol{Be}$, ізоморфна полю дійсних чисел, причому множення на елементи з цієї підалгебри збігається з множенням на дійсне число.

У роботі [9] побудовано матричну алгебру *B,* яка виявилась евклідовим простором. Скористаємося результатами дослідження цієї матричної алгебри.

Теорема 1. *Алгебра бінарних чисел* $\boldsymbol{Be}$ *ізоморфна матричній алгебрі* B .

Доведення. Побудуємо відображення $f : B \to \mathbf{B}$ за правилом

$$b = xe_0 + ye_1 \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Побудоване відображення є взаємно однозначною відповідністю. Справді, кожному елементу з B відповідає один елемент з $\boldsymbol{Be}$, різним елементам з B відповідають різні елементи з $\boldsymbol{Be}$, і нарешті, кожен елемент з матричної алгебри $\boldsymbol{Be}$ є образом певного бінарного числа, а саме матриця

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

є образом бінарного числа $xe_0 + ye_1$ при відображенні f .

Крім того,

$$f\left(b_1 + b_2\right) = f\left(\left(x_1 + x_2\right)e_0 + \left(y_1 + y_2\right)e_1\right) =$$

$$=\begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ y_1+y_2 & x_1+x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}= f\left(b_1\right)+ f\left(b_2\right).$$

$$f\left(\lambda b\right)= f\left(\lambda x e_0+\lambda y e_1\right)=\begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda y & \lambda x \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}=\lambda f\left(b\right).$$

$$f\left(b_1 b_2\right)= f\left(\left(x_1 e_0+y_1 e_1\right)\left(x_2 e_0+y_2 e_1\right)\right)=$$

$$= f\left(\left(x_1 x_2+y_1 y_2\right)e_0+\left(x_1 y_2+x_2 y_1\right)e_1\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} x_1x_2+y_1y_2 & x_1y_2+x_2y_1 \\ x_1y_2+x_2y_1 & x_1x_2+y_1y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}= f\left(b_1\right) f\left(b_2\right).$$

Отже, алгебра бінарних чисел $\boldsymbol{Be}$ ізоморфна матричній алгебрі B. **Теорему доведено.**

Таким чином, з алгебраїчної точки зору алгебри B і $\boldsymbol{Be}$ – це одна і та ж алгебра. А отже ми можемо перенести на елементи алгебри $\boldsymbol{Be}$ (бінарні числа) деякі характеристики елементів матричної алгебри B.

Означення 1. *Визначник матричного подання бінарного числа називають* ***алгебраїчною нормою*** *цього бінарного числа і позначають*

$$Nrb = Nr(xe_0 + ye_1) := \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 - y^2. \tag{5}$$

Оскільки визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць, то

$$Nr(b_1b_2) = Nr(b_1)Nr(b_2).$$

Означення 2. *Бінарне число* β *таке, що*

$$b\beta = \beta b = Nrb \cdot e_0$$

називають **спряженим** до бінарного числа b і позначають $\overline{b}$.

Покажемо, що для $b = xe_0 + ye_1$ бінарне число $\overline{b} = xe_0 - ye_1$ є спряженим.

Справді,

$$\left(xe_0 + ye_1\right)\left(xe_0 - ye_1\right) = \left(x^2 - y^2\right)e_0 = Nrb \cdot e_0.$$

Причому бінарне число з такою характеристичною властивістю єдине.

Підстава для такого терміну:

$$\overline{\overline{b}} = b,\ \overline{\lambda b} = \lambda\overline{b},\ \overline{b_1 + b_2} = \overline{b_1} + \overline{b_2},\ \overline{b_1b_2} = \overline{b_1}\,\overline{b_2}.$$

Означення 3. *Якщо* $Nr(b_2) \neq 0$, *то часткою від ділення бінарного числа* b_1 *на бінарне число* b_2 *назвемо число*

$$\frac{b_1}{b_2} := \frac{1}{x_2^2 - y_2^2} b_1\overline{b_2}. \tag{6}$$

Якщо $b_1 = xe_0 + xe_1 (x \neq 0)$ і $b_2 = ye_0 + ye_1$, то

$$\frac{b_1}{b_2} := \frac{y}{x} e_0 ,$$

і якщо $b_1 = xe_0 - xe_1 (x \neq 0)$ і $b_2 = ye_0 - ye_1$, то

$$\frac{b_1}{b_2} := \frac{y}{x} e_0 .$$

Зрозуміло, що в алгебрі B ділення не завжди виконується, оскільки, як було вказано раніше, ця алгебра має дільник нуля.

Означення 3 дає можливість перенести на бінарні числа дії над дробами: якщо $Nr(b_2) \neq 0$, $Nr(b_4) \neq 0$, то

$$\frac{b_1}{b_2} + \frac{b_3}{b_4} = \frac{b_1 b_4 + b_2 b_3}{b_2 b_4} ,$$

$$\frac{b_1}{b_2} \frac{b_3}{b_4} = \frac{b_1 b_3}{b_2 b_4} ,$$

якщо $Nr(b_3) \neq 0$, то

$$\frac{b_1}{b_2} : \frac{b_3}{b_4} = \frac{b_1 b_4}{b_2 b_3} .$$

На підставі (1) і (2) маємо, що кожне бінарне число $b = xe_0 + ye_1$ подається у вигляді

$$b = \frac{1}{2}(x+y)(e_0 + e_1) + \frac{1}{2}(x-y)(e_0 - e_1). \quad (7)$$

Подання (7) будемо **називати канонічним поданням бінарного числа**. Оскільки базисні бінарні числа ідемпотенти і

$$\frac{1}{2}(e_0 + e_1) \cdot \frac{1}{2}(e_0 - e_1) = 0 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 ,$$

то

$$b^n = \frac{1}{2}(x+y)^n (e_0 + e_1) + \frac{1}{2}(x-y)^n (e_0 - e_1) . \quad (8)$$

Формула (8) дає можливість записати корінь n-го степеня з бінарного числа.

Записавши рівність

$$\sqrt[n]{xe_0 + ye_1} = ue_0 + ve_1,$$

або

$$xe_0 + ye_1 = (ue_0 + ve_1)^n ,$$

то дістанемо систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(u+v)^n + \frac{1}{2}(u-v)^n = x, \\ \frac{1}{2}(u+v)^n - \frac{1}{2}(u-v)^n = y \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} u+v = \sqrt[n]{x+y}, \\ u-v = \sqrt[n]{x-y}. \end{cases}$$

Звідси,

$$u = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y} + \sqrt[n]{x-y}\right),$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y} - \sqrt[n]{x-y}\right).$$

Отже, якщо n-непарне, то для кожного b з B

$$\sqrt[n]{b} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y} + \sqrt[n]{x-y}\right)e_0 + \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y} - \sqrt[n]{x-y}\right)e_1 . \qquad (9)$$

Якщо ж n-парне і $x+y>0, x-y>0$, то $u+v = \pm\sqrt[n]{x+y},$ $u-v = \pm\sqrt[n]{x-y},$ і корінь n-го степеня має чотири значення:

$$u+v = \sqrt[n]{x+y},$$
$$u-v = \sqrt[n]{x-y},$$

$$\sqrt[n]{b} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y} + \sqrt[n]{x-y}\right)e_0 + \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y} - \sqrt[n]{x-y}\right)e_1 ;$$

$$u+v = \sqrt[n]{x+y},$$
$$u-v = -\sqrt[n]{x-y},$$

$$\sqrt[n]{b} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y} - \sqrt[n]{x-y}\right)e_0 + \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y} + \sqrt[n]{x-y}\right)e_1 ;$$

$$u+v = -\sqrt[n]{x+y},$$
$$u-v = \sqrt[n]{x-y},$$

$$\sqrt[n]{b} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt[n]{x+y} + \sqrt[n]{x-y}\right)e_0 + \frac{1}{2}\left(-\sqrt[n]{x+y} - \sqrt[n]{x-y}\right)e_1 ;$$

$$u+v = -\sqrt[n]{x+y},$$
$$u-v = -\sqrt[n]{x-y},$$

$$\sqrt[n]{b} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt[n]{x+y} - \sqrt[n]{x-y}\right)e_0 + \frac{1}{2}\left(-\sqrt[n]{x+y} + \sqrt[n]{x-y}\right)e_1$$

тобто

$$\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y}+\sqrt[n]{x-y}\right)e_0\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y}-\sqrt[n]{x-y}\right)e_1,\\ \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y}-\sqrt[n]{x-y}\right)e_0\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x+y}+\sqrt[n]{x-y}\right)e_1.\end{cases}$$

(два корені, якщо $x>0, y=0$).

Оскільки вище ми показали, що алгебра бінарних чисел $\boldsymbol{Be}$ і алгебра B циклічних матриць порядку 2 ізоморфні і алгебра B нормована, то перенесемо матричну норму на елементи алгебри $\boldsymbol{Be}$, а саме: кожному бінарному числу $b=xe_0+ye_1$ поставимо у відповідність число $\sqrt{2(x^2+y^2)}$. Неважко бачити, що ця відповідність задовольняє аксіоми норми. Тому алгебра $\boldsymbol{Be}$ наділена нормою:

$$\|b\|=\sqrt{2(x^2+y^2)}\,, \tag{10}$$

причому для будь-яких b_1, b_2 з $\boldsymbol{Be}$

$$\|b_1b_2\|\le\|b_1\|\|b_2\|, \tag{11}$$

Теорема 2. *Для норми (10) виконується «правило паралелограма», тобто для будь-яких* b_1, b_2 *з* $\boldsymbol{Be}$

$$\|b_1+b_2\|^2+\|b_1-b_2\|^2=2\|b_1\|^2+2\|b_2\|^2. \tag{12}$$

Доведення

$$\|b_1+b_2\|^2+\|b_1-b_2\|^2=2(x_1+x_2)^2+2(y_1+y_2)^2+2(x_1-x_2)^2+2(y_1-y_2)^2=$$

$$=2x_1^{\,2}+2x_2^{\,2}+2y_1^{\,2}+2y_2^{\,2}=2(x_1^{\,2}+x_2^{\,2})+2(y_1^{\,2}+y_2^{\,2})=2\|b_1\|^2+2\|b_2\|^2.$$

На підставі рівності (12) можна зробити висновок, що норма (10) породжується деяким скалярним добутком, а саме

$$\langle b_1,b_2\rangle=2x_1x_2+2y_1y_2\,, \tag{13}$$

а отже, алгебра $\boldsymbol{Be}$ є евклідів простір, наділений множенням елементів (3).

Означення 4. *Відповідність, яка кожному натуральному числу відносить бінарне число, називається* ***послідовністю бінарних чисел.***

Нехай дано послідовність бінарних чисел

$$(b_n)=x_ne_0+y_ne_1. \tag{14}$$

Означення 5. *Бінарне число* b_0 *називається* ***границею послідовності бінарних чисел*** $(\boldsymbol{b_n})$, *якщо для будь-якого* $\varepsilon>0$ *існує номер* n_0 *такий, що для всіх* $n>n_0$ *виконується нерівність*

$$\|b_n - b_0\| < \varepsilon$$

і позначається

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b_0 .$$

Очевидно, що за послідовністю бінарних чисел (14) можна побудувати дві послідовності дійсних чисел

$$(x_n) \text{ і } (y_n) . \tag{15}$$

Теорема 3. *Послідовність*

$$(b_n) = x_n e_0 + y_n e_1$$

збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються послідовності (x_n), (y_n), *причому*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} x_n e_0 + \lim_{n\to\infty} y_n e_1 .$$

Доведення.

Необхідність. Нехай

$$\lim_{n\to\infty} b_n = x_0 e_0 + y_1 e_1 .$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ маємо номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність:

$$|x_n - x_0| < \varepsilon ,$$

а це означає,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 .$$

Аналогічно

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0 .$$

Достатність. Нехай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 , \ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 .$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\frac{\varepsilon}{2}$, існує номер n_1 такий, що для всіх $n > n_1$ виконується нерівність:

$$\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Для того ж $\frac{\varepsilon}{2}$ існує номер n_2 виконується нерівність:

$$\|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Нехай

$$n_0 = \max(n_1, n_2).$$

Тоді для всіх $n > n_0$ виконуються нерівності. Ввівши позначення

$$b_0 = x_0 e_0 + y_1 e_1.$$

Отримаємо, що для всіх $n > n_0$

$$\|b_n - b_0\| = \sqrt{2(x_n - x_0)^2 + 2(y_n - y_0)^2} < \sqrt{2\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right)} = \varepsilon,$$

А це означає, що

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b_0.$$

Теорему доведено.

Означимо арифметичні операції над послідовностями бінарних чисел за такими правилами:

$$(b_n) + (c_n) := (b_n + c_n) = \left(\left(x_0^{(n)} + y_0^{(n)}\right)e_0 + \left(x_1^{(n)} + y_1^{(n)}\right)e_1\right),$$

$$(b_n)(c_n) := (b_n c_n) = \left(\left(x_0^{(n)} e_0 + y_0^{(n)} e_0\right)\left(x_1^{(n)} e_1 + y_1^{(n)} e_1\right)\right),$$

а у випадку, коли для кожного n $Nrc_n \neq 0$

$$\frac{(b_n)}{(c_n)} := \left(\frac{b_n}{c_n}\right) = \left(\frac{x_0^{(n)} e_0 + y_0^{(n)} e_0}{x_1^{(n)} e_1 + y_1^{(n)} e_1}\right).$$

Для збіжних послідовностей має місце результат.

Теорема 4. *Якщо послідовність бінарних чисел* (b_n) *і* (c_n) *збігаються, то збігаються послідовності* $(b_n + c_n)$, $(b_n c_n)$*, причому*

$$\lim_{n\to\infty}(b_n + c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n, \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n \lim_{n\to\infty} c_n. \tag{17}$$

Якщо для кожного n

$$Nrc_n \neq 0 \ \ i \ \left\|\lim_{n\to\infty} c_n\right\| \neq 0,$$

то і послідовність $\left(\dfrac{b_n}{c_n}\right)$ *збігається, причому*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} c_n}. \tag{18}$$

Доведення. Доведення аналогічне доведенню такої ж теореми комплексного аналізу. Продемонструємо це для добутку. Нехай послідовність бінарних чисел (b_n) і (c_n) збігаються і

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b_0, \ \lim_{n\to\infty} c_n = c_0.$$

Оскільки кожна послідовність обмежена, то існує число $M > 0$ таке, що для кожного n

$$\|b_n\| < M.$$

В силу збіжності послідовності (c_n), для кожного $\varepsilon > 0$, зокрема для $\frac{\varepsilon}{2M}$ існує номер n_1 такий, що для всіх $n > n_1$ виконується нерівність:

$$\|c_n - c_0\| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

А в силу збіжності послідовності (b_n), для кожного $\frac{\varepsilon}{2(\|c_0\|+1)}$ існує номер n_2 такий, що для всіх $n > n_2$ виконується нерівність:

$$\|b_n - b_0\| < \frac{\varepsilon}{2(\|c_0\|+1)}.$$

Нехай

$$n_0 = \max(n_1, n_2).$$

Тоді для віх $n > n_0$

$$\|b_n c_n - c_0 b_0\| = \|b_n c_n - b_n c_0 + b_n c_0 - c_0 b_0\| \le$$

$$\le \|b_n\|\|c_n - c_0\| + \|c_0\|\|b_n - b_0\| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{\|c_0\|}{(\|c_0\|+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А це означає, що має місце рівність (17). **Теорему доведено.**

Означення 6. *Символ вигляду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{19}$$

де для кожного n $b_n \in \boldsymbol{Be}$*, назвемо* ***бінарним рядом.***

Побудувавши за (14) послідовність бінарних чисел

$$(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_n \right)$$

(послідовність часткових сум), будемо вважати, що ряд (19) збігається, якщо збігається послідовність (S_n), причому якщо

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S ,$$

то казатимемо, що S є сумою цього ряду.

Якщо n-й член ряду (19) подати у вигляді

$$b_n = x_n e_0 + y_n e_1 ,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ породжує два ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \ . \tag{20}$$

Теорема 5. *Бінарний ряд (19) збігається тоді і лише тоді, коли збігаються дійсні ряди (20).*

Доведення. Ряд (19) збігається тоді і лише тоді, коли збігається послідовність

$$(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_n e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_n e_1 \right).$$

А остання в силу теореми (2) збігається тоді і лише тоді, коли збігаються послідовності

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right), \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n \right),$$

які є послідовностями часткових сум відповідно рядів (20). **Теорему доведено.**

Означення 7. *Символ вигляду*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n , \tag{21}$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \boldsymbol{R}$, $b = xe_0 + ye_1$, $b_0 = e_0$ *назвемо* ***бінарним степеневим рядом.***

Кожен ряд вигляду (21) збігається у точці $0e_0 + 0e_1$. Більше того, якщо він збігається у точці $b_0 \neq 0e_0 + 0e_1$, то він збігається для кожного бінарного числа, норма якого менша норми b_0.

Наступний результат є основою для побудови елементарних функцій бінарної змінної.

Теорема 6. *Якщо дійсний степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{22}$$

збігається на інтервалі $(-r; r)$ *і* $S(x)$ *– його сума, то бінарний степеневий ряд (21) збігається в області* $G = \{ b \,|\, |x+y| < r, |x-y| < r \}$, *причому сума цього ряду дорівнює*

$$S(b) = \frac{1}{2}\big(S(x+y)+S(x-y)\big)e_0 + \\ +\frac{1}{2}\big(S(x+y)-S(x-y)\big)e_1. \quad (23)$$

Доведення. Оскільки n-й член послідовності часткових сум ряду (21) подається у вигляді

$$S(b) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(xe_0 + ye_1\right)^k = a_0 e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \ .$$

$$\left(\frac{1}{2}\Big((x+y)^k + (x-y)^k\Big)e_0 + \frac{1}{2}\Big((x+y)^k - (x-y)^k\Big)e_1\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+y)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-y)^k\right)e_0 +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+y)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-y)^k\right)e_1 ,$$

то ряд (21) збігається тоді, коли збігаються ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+y)^n , \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-y)^n .$$

Згідно умови теореми, перший ряд збігається для всіх $(x;y)$, для яких $|x+y| < r$, а другий – за умови $|x-y| < r$**,** причому

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+y)^n = S(x+y), \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-y)^n = S(x-y).$$

Отже, для всіх $b = xe_0 + ye_1$ для яких $|x+y| < r$; $|x-y| < r$ ряд (21) збігається і його сума дорівнює (23). **Теорему доведено.**

Скориставшись теоремою 6. можна означити основні елементарні функції бінарної змінної. А також сформулювати загальне правило побудови функцій бінарної змінної. А саме: Якщо елементарна функція дійсної змінної $f(x)$ визначена на інтервалі $(\alpha;\beta)$, то в кожній точці бінарної області

$$b \in G = \{b | \alpha < x+y < \beta, \alpha < x-y < \beta\}$$

означається функція бінарної змінної

$$f(b) = \frac{1}{2}\big(f(x+y) + f(x-y)\big)e_0 + \frac{1}{2}\big(f(x+y) - f(x-y)\big)e_1 .$$

Висновки. Таким чином, ми побудували алгебру гіперкомплексних чисел, які назвали бінарними. Ізоморфізм цієї алгебри і матричної алгебри B, яку ми вивчали у роботі [9], дозволив нам наділити алгебру бінарних чисел топологічною структурою і ввести початки аналізу в ній. Наступним кроком нашого подальшого дослідження буде означення основних елементарних функцій бінарної змінної і побудова диференціального та інтегрального числення функцій бінарної змінної.

Список використаних джерел:

1. Синьков М. В., Боярінова Ю. Є., Каліновський Я. О. та ін. Розвиток теорії гіперкомплексного представлення інформації та її застосування. Київ: Ін-т проблем реєстрації інформації НАН України. С. 28-48.
2. Вотякова Л. А. Елементи диференціального числення функцій дуальної змінної. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти:* зб. наук. праць. Вінниця, 2009. Вип. 6. С. 27-32.
3. Hamilton W. R. On Quaternions or on new system of emaginaries in Algebra. *Phill. Mag.* 1844. 40 p.
4. Герус О. Ф. On the Cauchy theorem for hyperholomorphic functions of spatial variable. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018. Vol. 1. P. 1-6.
5. Мельниченко И. П., Плакса С. А. Комукативные алгебры и пространственные потенциальные поля. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. 230 с.
6. Shpakivskyi V. Hypercomplex method for solving linear PDEs. *Abstract of 12th ISAAC Congress, Aveiro University, Portugal*. 2019. P. 34-35.
7. Вотякова Л. А. Елементарні функції тернарної змінної. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки.* 2009. Вип. 1. С. 11-13.
8. Вотякова Л. А. Нормована алгебра тернарних чисел. *Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки.* 2008. Вип. 4. С. 7-9.
9. Вотякова Л. А., Боденчук В. А. Матрична алгебра B як евклідовий простір. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки.* 2023. Вип. 24. С. 5-13.

THE NORMED ALGEBRA OF BINARY NUMBERS

The richness of the theory of functions of a complex variable, the effectiveness of its methods have always served as a stimulus and a source of ideas when constructing a theory of the function of a hypercomplex variable. It should be noted that hypercomplex number systems are an extension of the field of complex numbers. Modern hypercomplex studies can be divided into algebraic and analytical; the latter are often called hypercomplex analysis in the broad sense.

Hypercomplex systems are an effective tool in mathematical modeling that allows representing complex multidimensional data and operations on them in a more compact form.

In this paper, a new system of hypercomplex numbers is constructed by establishing an isomorphism to a specific matrix algebra.

The matrix algebra is studied using classical methods of matrix theory and endowed with a norm, enabling the construction of analysis elements within it using matrix analysis techniques. The obtained results for matrices are transferred to elements of the isomorphic algebra of finite rank, namely, hypercomplex numbers called «binary numbers». This allows endowing the algebra of binary numbers with a topological structure and laying the foundations for analysis within it, including the construction of functions of a binary variable. The article introduces the concept of convergent sequences of binary numbers, and through them, convergent binary series.

The novelty of our approach is that the set of hypercomplex numbers is considered as an algebra of rank 2 over the field ***R*** and through the found matrix representation, the *n*-th power of a binary number, and therefore the sum of certain power series, is determined in algebraic form. Functions of a binary variable are defined by sums of corresponding power series. And as a result, a general formula for constructing elementary functions of a binary variable is derived.

Hypercomplex numbers are already used to describe quantum states, model dynamical systems, in computer graphics and cryptography. And the further development of hypercomplex analysis and the construction of new numerical systems leads to the expansion of the range of their applications in modeling real states and processes.

Key words: *finite rank algebra, binary number, norm, binary power series, function of a binary variable.*

Отримано: 16.11.2024