

УДК 517.958:517.988.8

DOI: 10.32626/2308-5878.2024-26.50-61

А. В. Савченко

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З БІГАРМОНІЧНИМ ОПЕРАТОРОМ, ЩО Є МАТЕМАТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

У статті розглянуто задачу Діріхле для напівлінійного диференціального рівнянням з бігармонічним оператором, що виникає при математичному моделюванні різних фізичних процесів. Зокрема, пропонується розглянути процес прогину круглої пластини під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску, що моделює роботу актюатора – основного механізму більшості мікроелектромеханічних систем (МЕМС).

У статті пропонується до розв'язання відповідної крайової задачі застосувати метод двобічних наближень на основі обумовлення функцій Гріна. Вибір методу обумовлено тим, що він дає змогу отримати умови існування розв'язку вихідної задачі та має зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Процес розв'язання методом двобічних наближень ґрунтується на тому, що задача для нелінійного диференціального рівнянням з бігармонічним оператором за допомогою методу функцій Гріна була зведена до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке було досліджено методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Побудовано ітераційний процес знаходження додатного розв'язку задачі та отримано умови його двобічної збіжності. Для конкретних значень параметрів моделі проведено низку обчислювальних експериментів та виконано порівняння з результатами, отриманими іншими авторами. Проведено аналіз зміни максимального відхилення пластини при різних значеннях тиску та постійному значенні напруги.

Новизна роботи полягає у тому, що до нелінійного рівняння з бігармонічним оператором метод двобічних наближень було застосовано вперше. Результати, отримані у роботі, свідчать про успішність застосування розробленого алгоритму до моделювання розглядуваного процесу.

Оскільки було розглянуто моделювання актюатора, який складається з круглих пластин, то отримані результати можуть бути використані при проектуванні та дослідженні поведінки

ультразвукових перетворювачів, датчиків тиску, мініатюрних насосів і детекторів газу тощо.

Ключові слова: *актюатор, бігармонічний оператор, задача Діріхле, ізотонний оператор, інваріантний конусний відрізок, крайова задача, кругла пластина, математичне моделювання, мікроелектромеханічна система, метод двобічних наближень, прогин, рівняння Гаммерштейна, функція Гріна, чисельні методи.*

Вступ. Бурхливий розвиток науки та техніки протягом останніх 50-ти років привів до значних змін у розробці та використанні більшості існуючих технічних засобів. Одним з факторів такого розвитку стала можливість мініатюризації електронних пристроїв, що в свою чергу викликало необхідність у дослідженні мініатюрних електричних систем – мікроелектромеханічних системи (МЕМС).

Складність при проектуванні та дослідженні роботи МЕМС полягає в тому, що, по-перше, макрофізичні закон не можуть коректно описати поведінку мікрооб'єктів, і, по-друге, складові компоненти таких систем дуже чутливі й постає необхідність у проведенні великої кількості експериментів. Саме тому ефективним методом дослідження таких систем є математичне моделювання, перевагами якого є: зменшення витрат на дослідження, прискорення розробки, можливість аналізу різних умов і параметрів, прогнозування робочої характеристики, аналіз структурної надійності тощо.

Математичне моделювання МЕМС приводить до необхідності дослідження задач математичної фізики. Зокрема, розглядаючи актюатор, який є основним елементом МЕМС, необхідно аналізувати процес прогину пластини під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску. Математичною моделлю даного процесу є нелінійне рівняння з бігармонічним оператором [1-5]:

$$D\Delta^2 w(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2}{2[d - w(\mathbf{x})]^2} + P, \quad (1)$$

де $w(\mathbf{x})$ – величина прогину пластини, D – жорсткість на прогин, ε_0 – електрична стала, ε – діелектрична проникність середовища, V – прикладена напруга, d – відстань між пластинами, P – рівномірний гідростатичний тиск.

Крім рівняння (1) для дослідження МЕМС також використовують і інші моделі. Наприклад, у [6] розглядають рівняння вигляду

$$T\nabla w(\mathbf{x}) - D\Delta^2 w(\mathbf{x}) = \frac{C \cdot V^2}{[d - w(\mathbf{x})]^2}, \quad (2)$$

де C – коефіцієнт, що характеризує діелектричну проникність середовища, T – коефіцієнт напруги розтягування.

У [7] запропоновано еталонну математичну модель актюатора. Система складається з двох пластин, одна з яких закріплена на межі та під дією напруги відхиляється від свого стаціонарного положення $w=0$ до нерухокої пластини, розташованої на висоті $w=1$. Тоді для прогину верхньої пластини отримуємо рівняння вигляду:

$$\alpha \Delta^2 w = \left(\beta \int_{\Omega} |\nabla w|^2 d\mathbf{x} + \gamma \right) \Delta w + \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-w)^2 \left(1 + \chi \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{x}}{(1-w)^2} \right)}, \quad (3)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \geq 0$ – коефіцієнти, що характеризують відповідно товщину, процеси розтягу, залежність зміни ємності, прикладену напругу; $f(\mathbf{x})$ – функція, що моделює діелектричні властивості матеріалу, Ω – обмежена область у \mathbb{R}^2 .

Якщо у моделі актюатора замість пластини розглядати мембрану, то було отримано наступну математичну модель [8, 9]

$$-\Delta w = \lambda \frac{f(\mathbf{x})}{(1-w)^2}. \quad (4)$$

Нехтуючи ефектами розтягу та враховуючи товщину пластини, у роботі [7] запропоновано розглянути для моделювання прогину пластини наступне рівняння:

$$\Delta^2 w = \lambda \frac{f(\mathbf{x})}{(1-w)^2}. \quad (5)$$

Рівняння (1)-(5) є найбільш уживаними під час математичного моделювання роботи актюатора як основного елемента МЕМС.

Розглядувана система породжує природні крайові умови, якими необхідно доповнити відповідні рівняння. Оскільки верхня пластина закріплена на межі $\partial\Omega$, то на ній маємо нульовий вертикальний прогин та нахил [10]. Таким чином, мають місце наступні крайові умови:

$$w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6)$$

де \mathbf{n} – зовнішня до межі $\partial\Omega$ нормаль.

Розв'язання наведених вище задач аналітичними методами практично неможливе, а тому виникає потреба у розробці відповідних чисельних методів, зокрема ітераційних методів з двобічним характером збіжності. Теоретичним підґрунтям цих методів є теорія нелінійних операторів у напівопорядкованих банахових просторах [11, 12]. Двобічні ітераційні методи у аналізі МЕМС використовувались у роботах [9, 13], але в них розглядалося лише рівняння другого порядку. Отже, актуальною науковою задачею є розробка методів цього класу для рівнянь четвертого порядку вигляду (1).

Постановка задачі. Розглянемо актюатор (рис. 1), який складається з двох тонких однорідних та ізотропних пластин круглої форми.

Верхня гнучка пластина має радіус R , товщину h і закріплена на межі. На неї діє рівномірний гідростатичний тиск P , джерелом якого є, наприклад, повітря або рідина. Нижня пластина закріплена паралельно на відстані d . Вважаємо, що простір між верхньою та нижньою пластинами заповнено повітрям або вакуумом з діелектричною проникністю ε .

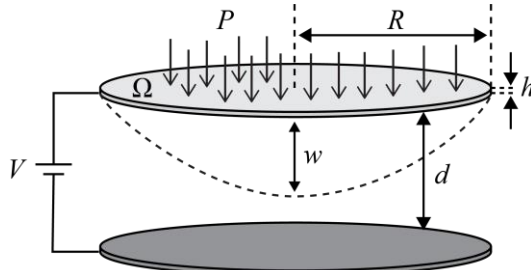


Рис 1. Актюатор МЕМС

Під дією електростатичної сили та гідростатичного тиску верхня пластина відхиляється до фіксованої нижньої пластини і рівняння для прогину w має вигляд [5]:

$$D\Delta^2 w = F_e + P, \quad (7)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – жорсткість на прогин, E – модуль пружності Юнга,

ν – коефіцієнт Пуассона, $\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}$ – бігармонічний оператор,

$F_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2}{2(d-w)^2}$ – електростатична сила, ε_0 – електрична стала, ε – діелектрична проникність середовища, V – прикладена напруга між пластинами, P – рівномірний гідростатичний тиск.

Враховуючи крайові умови (6), отримуємо наступну крайову задачу, що моделює прогин круглої закріпленої на межі пластини під дією електростатичної сили та гідравлічного тиску:

$$\Delta^2 w(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2}{2D[d-w(\mathbf{x})]^2} + \frac{P}{D}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8)$$

$$w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (9)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, Ω – круг радіуса R з центром у початку координат, \mathbf{n} – зовнішня до межі $\partial\Omega$ нормаль.

У (8), (9) перейдемо до безрозмірних величин

$$u = \frac{w}{d}, \quad x = \frac{x_1}{R}, \quad y = \frac{x_2}{R}.$$

Після заміни отримуємо наступну крайову задачу:

$$\Delta^2 u = \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \mu, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (11)$$

$$\text{де } \lambda = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2 R^4}{2Dd^3}, \quad \mu = \frac{PR^4}{Dd}.$$

Модель (10), (11) використовується при дослідженні поведінки ультразвукових перетворювачів [1], датчиків тиску [14], мініатюрних насосів [15], детекторів газу [16] тощо.

Метод розв'язання. До розв'язання задачі (10), (11) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Для задачі (10), (11) функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ має вигляд [17]

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2 \int_1^{\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|}{|\mathbf{x}|}} \frac{v^2 - 1}{v} dv, \quad (12)$$

$$\text{де } |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Значимо, що $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq 0$, якщо $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$ [17].

Таким чином, задача (10), (11) буде еквівалентною інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] ds. \quad (13)$$

Рівняння (13) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних у $\bar{\Omega}$. Норма у $C(\bar{\Omega})$ вводиться за правилом $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$. У просторі $C(\bar{\Omega})$ виділимо конус невід'ємних функцій $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$.

Узагальненим розв'язком крайової задачі (10), (11) називатимемо функцію $u^* \in \mathcal{K}_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (13).

З рівнянням (13) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор, що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] d\mathbf{s}. \quad (14)$$

Враховуючи останнє співвідношення, рівняння (13) матиме вигляд $u = T(u)$. Очевидно, що оператор T є додатним, тобто залишає інваріантним конус \mathcal{K}_+ .

Функція $f(\mathbf{x}, u) = \frac{\lambda}{(1-u)^2} + \mu$ є неперервною і додатною при

$\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $0 < u < 1$ і монотонно зростає за u , а отже, інтегральний оператор (14) буде ізотонним.

Для оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$, який є апіорною оцінкою невідомого розв'язку u^* . Оскільки $f(0) = \lambda + \mu > 0$, то шукатимемо його у вигляді $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$, де $0 < \beta < 1$. Тоді умови, що виділяють інваріантний конусний відрізок, набувають вигляду

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} &\geq 0 \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \\ \left[\frac{\lambda}{(1-\beta)^2} + \mu \right] \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} &\leq \beta \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Оскільки функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ вигляду (12) є невід'ємною, то перша нерівність завжди виконуватиметься, а другу можемо записати у вигляді

$$\frac{\lambda M}{(1-\beta)^2} + \mu M \leq \beta, \quad (15)$$

де $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$.

З нерівності (15) випливає, що

$$\lambda \leq \frac{4(1-\mu M)^3}{27M}.$$

Для швидшої збіжності ітерацій величина

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^0(\mathbf{x}) - v^0(\mathbf{x})) = \beta$$

має бути якомога меншою, тому за β слід обрати найменший корінь рівняння

$$\lambda M = (1 - \beta)^2 (\beta - \mu M). \quad (16)$$

Ітераційний процес сформулюємо за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda}{(1 - v^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] d\mathbf{s}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda}{(1 - w^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + \mu \right] d\mathbf{s}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

$$v^0(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) = 0, \quad w^0(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}) = \beta. \quad (19)$$

Перевіримо, за яких умов ітераційний процес (17)-(19) двобічно збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (10), (11).

При $0 < v, w < \beta$ має місце нерівність

$$|f(\mathbf{x}, w) - f(\mathbf{x}, v)| \leq L|w - v|,$$

де $L = \frac{2\lambda}{(1 - \beta)^3}$.

Тоді

$$\begin{aligned} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| &= \|T(w^{(k)}) - \hat{T}(v^{(k)})\| = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} [T(w^{(k)})(\mathbf{x}) - T(v^{(k)})(\mathbf{x})] = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [f(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s})) - f(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}))] d\mathbf{s} \leq \\ &\leq LM \max_{\mathbf{x} \in \Omega} [w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})] = LM \|w^{(k)} - v^{(k)}\|. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| \leq (LM)^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\|.$$

Тоді рівність $v^* = w^*$ матиме місце, якщо $\gamma = LM < 1$. Таким чином, можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо рівняння (16) має розв'язок $\beta \in (0; 1)$ і $\frac{2\lambda M}{(1 - \beta)^3} < 1$, то крайова задача (10), (11) має єдиний додатний розв'язок*

$i^(\mathbf{x})$, до якого двобічно збігається ітераційний процес (17)-(19).*

Обчислювальний експеримент. Обчислювальний експеримент проведено для задачі (10), (11) з наступним набором параметрів

$$h = 20 \text{ мкм}, \quad d = 1 \text{ мкм}, \quad R = 250 \text{ мкм}, \quad E = 169 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0,3,$$

$$\varepsilon_0 = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}, \quad \varepsilon = 1,005, \quad P = 200 \text{ кПа}, \quad V = 200 \text{ В}. \quad (20)$$

Знаходимо, що

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V^2 R^4}{2Dd^3} = 5,61501.$$

Для функції Гріна (12) маємо, що $M = 0,0156249$. Інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді $\langle 0, \beta \rangle$, де β – визначається з рівності (16). Обчисливши отримуємо, що $\beta = 0,257909$.

Тоді $\frac{2\lambda M}{(1-\beta)^3} = 0,4294... < 1$, а отже, виконана умова збіжності

ітераційного процесу відповідно до теореми 1.

Задаємо точність $\delta = 10^{-4}$. Проводимо ітераційний процес (17)-(19). Процес зійшовся із заданою точністю за п'ять ітерацій. На рисунку 2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ наближень, $k = 0, 5$, у перерізі $x_2 = 0$. На рисунку 3 наведено графік поверхні наближеного розв'язку.

Задача (10), (11) з зазначеними у (20) параметрами була чисельно розв'язана у [1, 4].

У [4] було застосовано покрокову лінеаризацію рівняння (10), а потім метод скінченних різниць. Авторами було отримано значення максимального відхилення пластини, що дорівнює $0,22639$ мкм.

У [1] авторами було запропоновано розглянути замість моделі (10), (11) спрощену модель та застосувати до неї метод Гальоркіна. Провівши обчислювальний експеримент для параметрів моделі, які задані у (20), ними було отримано максимальне відхилення пластини, що дорівнює $0,225$ мкм.

При застосуванні методу двобічних наближень нами отримано, що максимальне відхилення пластини становить $0,21829$ мкм.

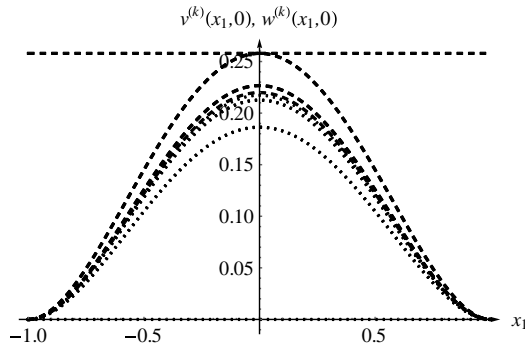


Рис. 2. Графіки перерізів верхніх $w^{(k)}(\mathbf{x})$ (штрихова лінія) та нижніх $v^{(k)}(\mathbf{x})$ (пунктирна лінія) наближень при $x_2 = 0$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Бачимо, що отримане за допомогою методу двобічних наближень значення максимального відхилення пластини менше ніж отримані в [1, 4], але цілком узгоджується з ними. Це може вказувати на те, що застосовані авторами спрощення при розгляді моделі (10), (11) призводять до більш грубих оцінок максимального відхилення пластини. При застосуванні методу двобічних наближень було отримано значення похибки наближеного розв'язку, що дорівнює $0,44 \cdot 10^{-4}$, а тому з такою точністю можемо стверджувати, що максимальне відхилення пластини дорівнює $0,21829$ мкм для параметрів (20).

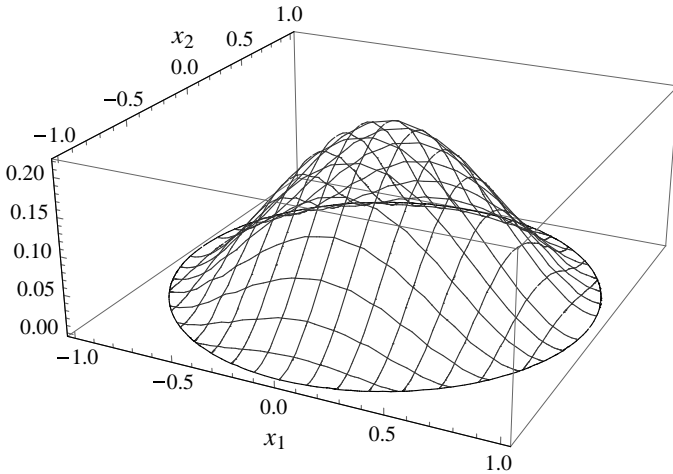


Рис. 3. Поверхня наближеного розв'язку $u^{(5)}(\mathbf{x})$

Дослідимо залежність прогину пластини від гідростатичного тиску. У таблиці 1 наведено значення тиску P , кількість виконаних ітерацій N , оцінка похибки δ та значення максимального відхилення пластини u_{\max} .

Таблиця 1

Значення гідростатичного тиску P , кількість виконаних ітерацій N , оцінка похибки δ та значення максимального відхилення пластини u_{\max}

P , кПа	100	200	300	400	500
N	4	5	6	7	8
δ	$0,83 \cdot 10^{-4}$	$0,44 \cdot 10^{-4}$	$0,37 \cdot 10^{-4}$	$0,54 \cdot 10^{-4}$	$0,95 \cdot 10^{-4}$
u_{\max} , мкм	0,15771	0,21829	0,27970	0,34558	0,41762

На рисунку 4 наведено графіки наближених розв'язків $u^*(x_1, x_2)$ у перерізі $x_2 = 0$ для різних значень тиску.

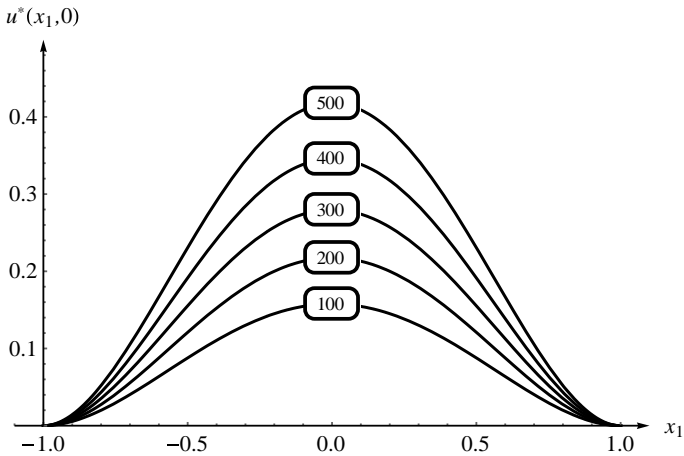


Рис. 4. Графіки перерізів верхніх $u^(x_1, x_2)$ при $x_2 = 0$ для різних значень тиску*

З таблиці 1 та рисунку 4 бачимо, що при збільшенні гідростатичного тиску відхилення пластини збільшується, що узгоджується з фізикою перебігу розглядуваного процесу.

Висновки. У статті розглянуто задачу Діріхле для нелінійного рівняння з бігармонічним оператором і вперше до її розв'язання застосовано метод двобічних наближень на основі використання функцій Гріна. За допомогою методу функцій Гріна розглядувана задача була зведена до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке в свою чергу було досліджено методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих банахових просторах. Сформовано ітераційний процес методу двобічних наближень та наведено умови його збіжності до єдиного додатного розв'язку крайової задачі. Проведено обчислювальні експерименти для конкретних значень параметрів моделі. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні та дослідженні роботи МЕМС, основою яких є актюатор.

Список використаних джерел:

1. Ahmad B., Pratap R. Elasto-electrostatic analysis of circular microplates used in capacitive micromachined ultrasonic transducers. *IEEE Sensors Journal*. 2010. № 10 (11). P. 1767-1773.
2. An Improved Method for the Mechanical Behavior Analysis of Electrostatically Actuated Microplates Under Uniform Hydrostatic Pressure / Z. Li, L. Zhao,

- Z. Jiang, Z. Ye, Y. Zhao. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 2015. № 2 (24). P. 474-485.
3. Koochi A., Abadyan M. Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics: Application in micro/nanostructures and electromechanical systems. Amsterdam: Elsevier, 2020. 270 p.
 4. Mechanical behavior of a circular micro plate subjected to uniform hydrostatic and non-uniform electrostatic pressure / A. Nabian, G. Rezazadeh, M. Haddad-derafshi, A. Tahmasebi. *Microsystem Technologies*. 2008. № 14. P. 235-240.
 5. Modeling of electrostatically actuated microplates / L. Zhao, Z. Jiang, Z. Li, Y. Zhao. Q.-A. Huang (Ed.). *Micro Electro Mechanical Systems*. 2018. № 3. P. 99-153.
 6. Esposito P., Ghoussoub N., Guo Y. Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS. New York: American Mathematical Soc. 2010. 318 p.
 7. Cassani D., Bezerra J., Ghoussoub N. On a Fourth Order Elliptic Problem with a Singular Nonlinearity. *Advanced Nonlinear Studies*. 2009. № 9. P. 177-197.
 8. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2018. № 39. С. 33-41.
 9. Ghoussoub N., Guo Y. On the Partial Differential Equations of Electrostatic MEMS Devices: Stationary Case. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2007. № 5 (38). P. 1423-1449.
 10. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964. 379 p.
 11. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
 12. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Двобічний ітераційний метод на основі використання функції Гріна в задачах чисельного аналізу деяких електромеханічних систем. *Вісник ХНУ ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2022. № 55. С. 19-31.
 13. Lin F., Yang Y. Nonlinear non-local elliptic equation modelling electrostatic actuation. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2007. № 463 (2081). P. 1323-1337.
 14. A new analytical solution for diaphragm deflection and its application to a surfacemicromachined pressure sensor / W. P. Eaton, F. Bitsie, J. H. Smith, D. W. Plummer. *International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems: Technical Proceedings*. 1999. P. 640-643.
 15. Saif M. T. A., Alaca B. E., Sehitoglu H. Analytical modeling of electrostatic membrane actuator for micro pumps. *Journal of Microelectromechanical Systems*. 1999. № 3 (8). P. 335-345.
 16. Detection of individual gas molecules adsorbed on graphene / F. Schedin, A. K. Geim, S. V. Morozov [та ін.]. *Nature Mater*. 2007. № 6. P. 652-655.
 17. Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. 1905. № 20. P. 97-135.

THE APPLICATION OF THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS TO SOLVING THE DIRICHLET PROBLEM FOR A SEMILINEAR EQUATION WITH A BIHARMONIC OPERATOR, WHICH IS A MATHEMATICAL MODEL OF A MICROELECTROMECHANICAL SYSTEM

The article addresses the Dirichlet problem for a semilinear differential equation with a biharmonic operator, which arises in the mathematical modeling of various physical processes. Specifically, the study considers the deflection of a circular plate under the action of electrostatic force and hydrostatic pressure, modeling the operation of an actuator, the primary mechanism in most microelectromechanical systems (MEMS).

The boundary value problem is solved using the method of two-sided approximations based on the method of Green's functions. This approach is chosen because it provides conditions for the existence of a solution to the original problem and offers a convenient a posteriori error estimation for the approximate solution.

The solution process using the method of two-sided approximations is grounded in reducing the problem for a semilinear differential equation with a biharmonic operator to a nonlinear Hammerstein integral equation via the method of Green's functions. This equation was then analyzed using the theory of nonlinear operators in semi-ordered Banach spaces. An iterative process for finding a positive solution to the problem has been constructed, and conditions for its two-sided convergence have been established. Computational experiments for specific parameter values of the model were carried out and compared with the results obtained by other authors. Additionally, an analysis of the maximum deflection of the plate under varying pressure values and constant voltage was conducted.

The novelty of this work lies in the fact that the method of two-sided approximations has been applied to a semilinear equation with a biharmonic operator for the first time. The results of the study demonstrate the successful application of the developed algorithm to model the considered process.

Since the modeling focuses on an actuator consisting of circular plates, the obtained results can be utilized in the design and analysis of ultrasonic transducers, pressure sensors, miniature pumps, gas detectors, etc.

Key words: *actuator, biharmonic operator, Dirichlet problem, isotonic operator, invariant cone segment, boundary value problem, circular plate, mathematical modeling, microelectromechanical system, method of two-sided approximations, deflection, Hammerstein's equation, Green's function, numerical method.*

Отримано: 10.12.2024