УДК 517.9; 531.19
DOI: 10.32626/2308-5878.2024-26.20-36

В. І. Герасименко*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
І. В. Гап'як*,**, канд. фіз.-мат. наук

*Інститут математики НАН України, м. Київ,
**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м. Київ

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ КУМУЛЯНТІВ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ СИСТЕМ ЧАСТИНОК З ТОПОЛОГІЧНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

У статті сформульовано концепцію кумулянтного зображення для функцій розподілу, якими описується стан систем багатьох частинок з топологічною взаємодією, тобто за допомогою потенціалу взаємодії який визначається рангом близькості частинок. Кумулянти функцій розподілу ймовірностей інтерпретуються як кореляції станів частинок та визначаються як розв'язки відповідних кластерних розкладів функцій розподілу ймовірностей. Підкреслимо, що кореляції які виникають при еволюції системи частинок з топологічною взаємодією природно відрізняються від структури кореляцій систем багатьох частинок, стан яких традиційно описується симетричними функціями розподілу ймовірностей. У статті встановлено ієрархію еволюційних нелінійних рівнянь для кореляційних функцій (ієрархія рекурсивних рівнянь Ліувілля). У просторі послідовностей інтегрованих функцій побудовано непертурбативний розв'язок задачі Коші для ієрархії таких нелінійних еволюційних рівнянь. Досліджено типові властивості розкладу такого розв'язку, які породжуються властивостями його твірних операторів, а саме, кумулянтами груп операторів рівнянь Ліувілля. На основі динаміки кореляцій встановлено структуру розкладів в ряд, якими визначаються редуковані функції розподілу, а також редуковані кореляційні функції, що, зокрема, дозволило обґрунтувати структуру твірних операторів розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ (Боголюбов – Борн – Ґрін – Кірквуд – Івон). Доведено, що структура розкладів для кореляційних функцій, твірними операторами яких є відповідного порядку кумулянти груп операторів рівнянь Ліувілля, індукує кумулянтну структуру розкладів в ряд для редукованих функцій розподілу та редукованих кореляційних функцій. Таким чином, динаміка систем багатьох частинок з топологічною взаємодією породжується динамікою кореляцій станів.

Ключові слова: *системи багатьох частинок, топологічна взаємодія, кластерні розклади, кумулянтні розклади, напівгрупа операторів.*

Вступ. Як відомо [1-2], еволюція стану системи багатьох частинок традиційно описується функцією розподілу ймовірностей, яка визначається рівнянням Ліувілля. У статті [3] було розвинуто альтернативний підхід до опису еволюції стану, який полягає у використанні функцій, визначених як кумулянти функцій розподілу ймовірностей. Кумулянти функцій розподілу ймовірностей інтерпретуються як кореляції між станами частинок, тому для них використовується також термін кореляційні функції [4-5]. Еволюція кореляційних функцій описується ієрархією нелінійних еволюційних рівнянь Ліувілля, побудованою для системи багатьох твердих сфер в статті [3].

Кілька років тому, для опису складних систем, зокрема, систем математичної біології, були введені «топологічні» моделі взаємодії [6-9]. А саме, було введено поняття взаємодії, якою описується як компонент системи реагує на присутність іншого не відповідно до відстані між ними, аналогічно до систем багатьох частинок, а відповідно до рангу близькості або їхньому порядку переваги. Взаємодії між живими істотами в природі зважені функцією їх рангу, незалежно від відносної відстані, тобто ймовірність взаємодії особини з її «найближчим» сусідом однакова близько чи далеко ця особа. Цей новий тип взаємодії назвали «топологічним» на відміну від звичайної «метричної» взаємодії, яка є функцією відносної відстані між суб'єктами. Типовим прикладом топологічної моделі взаємодії для систем багатьох частинок є одновимірна система часток із взаємодією між найближчими сусідами, зокрема, одновимірна несиметричних система пружних куль, яка описується в термінах функцій не інваріантних відносно заміни нумерації частинок [10-11].

У статті сформульовано концепцію кумулянтного зображення для функцій розподілу, якими описується еволюція кореляцій стану систем багатьох частинок з топологічною взаємодією. Встановлено, що структура кумулянтних розкладів для таких систем залежить від симетрії функцій розподілу ймовірності систем багатьох частинок. У просторі послідовностей інтегрованих функцій побудовано розв'язок задачі Коші для ієрархії еволюційних нелінійних рівнянь для кумулянтів функцій розподілу таких систем. На основі динаміки кореляцій встановлено розклади в ряди, якими визначаються редуковані функції розподілу та редуковані кореляційні функції, що, зокрема, дозволило пояснити структуру твірних операторів непертурбативного розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (Боголюбов – Борн – Ґрін – Кірквуд – Івон) для систем частинок з топологічною взаємодією.

Приклад системи з топологічною взаємодією частинок. В одновимірному просторі розглянемо систему багатьох однакових частинок які взаємодіють з найближчими сусідніми через потенціал Φ фінітного радіуса дії, а саме, $\Phi(q)=0$, якщо $|q|>R>0$, та з твердою серцевиною довжиною σ, тобто $\Phi(q)=+\infty$, якщо $|q|<\sigma$. Нехай потенціал взаємодії Φ задовольняє таким умовам: $\Phi\in C^2[\sigma,R]$ та $\Phi^{'}(\sigma+0)=0$. Для конфігурацій такої системи виконуються нерівності: $\sigma+q_i\le q_{i+1}$, де $q_i\in\mathbb{R}$ – координата центра i-ої частинки. Внаслідок цього природно нумерувати частинки за допомогою цілих чисел з множини $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ і, отже, множина

$$\mathbb{W}_{n_1+n_2}\equiv\{(q_{-n_1},\dots,q_{-1},q_1,\dots,q_{n_2})\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}\mid\sigma+q_i<q_{i+1}$$

хоча б для однієї пари

$$(i,i+1)\in((-n_1,-n_1+1),\dots,(-1,1),\dots,(n_2-1,n_2))\}$$

є множиною заборонених конфігурацій.

Нехай $L^1_{n_1+n_2}$ – банахів простір подвійних послідовностей $f=$ $=\{f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\dots,x_{n_2})\}_{n_1+n_2\ge0}$ інтегрованих функцій $f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\dots,x_{n_2})$, визначених на фазовому просторі $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{W}_n)$ та несиметричних відносно перестановки аргументів $x_i\equiv(q_i,p_i)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ з нормою

$$\|f_{n_1+n_2}\|_{L^1_{n_1+n_2}}=\int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}}dx_{-n_1}\dots dx_{n_2}\,|f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\dots,x_{n_2})|.$$

У просторі $L^1_{n_1+n_2}$ визначена група операторів рівняння Ліувілля [1-2]

$$S^*_n(t)f_n\equiv(S^*_{n_1+n_2}(t,-n_1,\dots,n_2)f_{n_1+n_2})(x_{-n_1},\dots,x_{n_2})=$$
$$=\begin{cases}f_{n_1+n_2}(X_{-n_1}(-t,x_{-n_1},\dots,x_{n_2}),\dots,X_{n_2}(-t,x_{-n_1},\dots,x_{n_2})),\\ \qquad\qquad(x_{-n_1},\dots,x_{n_2})\in(\mathbb{R}^{n_1+n_2}\times(\mathbb{R}^{n_1+n_2}\setminus\mathbb{W}_{n_1+n_2})),\\ 0,\qquad(q_{-n_1},\dots,q_{n_2})\in W_{n_1+n_2},\end{cases}\tag{1}$$

де функції $X_i(-t,x_{-n_1},\dots,x_{n_2}),\ i\in(-n_1,\dots,-1,1,\dots,n_2)$ – розв'язки задачі Коші для рівнянь Гамільтона системи $n=n_1+n_2$ частинок з початковими даними $X_i(0,x_{-n_1},\dots,x_{n_2})=x_i,\ i\in(-n_1,\dots,-1,1,\dots,n_2)$, які за умов сформульованих вище на потенціал взаємодії Φ визначені майже всюди на фазовому просторі $\mathbb{R}^{n_1+n_2}\times(\mathbb{R}^{n_1+n_2}\setminus\mathbb{W}_{n_1+n_2})$ [1].

У просторі інтегрованих функцій однопараметричне відображення (1) є сильно неперервною групою ізометричних операторів. Інфінітезимальний генератор групи операторів (1) має таку структуру

$$\mathcal{L}^*_{n_1+n_2}=\sum_{j\in(-n_1,\dots,-1,1,\dots,n_2)}\mathcal{L}^*(j)+\sum_{(j,j+1)\in((-n_1,-n_1+1),\dots,(n_2-1,n_2))}\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j,j+1),\tag{2}$$

де на підпросторі неперервно диференційовних функцій з компактними носіями оператори Ліувілля при $t \geq 0$ визначаються відповідно такими формулами [11]:

$$(\mathcal{L}^*(j) f_{n_1+n_2})(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2}) \doteq -p_j \frac{\partial}{\partial q_j} f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2}),$$

$$(\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j,j+1) f_{n_1+n_2})(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2}) \doteq$$

$$\doteq \frac{\partial}{\partial q_j}\Phi(q_j - q_{j+1})(\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_{j+1}}) f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2}) +$$

$$+ | p_j - p_{j+1} | (\theta(p_{j+1} - p_j) f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,q_j,p_{j+1},q_{j+1},p_j,\ldots,x_{n_2}) -$$

$$-\theta(p_j - p_{j+1}) f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2}))\delta(q_j - q_{j+1} + \sigma),$$

де $\theta(\circ)$ – характеристична функція. У випадку $t \leq 0$ оператор $\mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j,j+1)$ визначається відповідним виразом [11].

Нехай $D^0_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{-1},x_1,\ldots,x_{n_2})$ – функція розподілу ймовірності, яка визначена на фазовому просторі $\mathbb{R}^{n_1+n_2} \times (\mathbb{R}^{n_1+n_2} \setminus \mathbb{W}_{n_1+n_2})$ та несиметрична відносно перестановки аргументів $x_i \equiv (q_i, p_i) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Тоді всі можливі стани системи $n_1 + n_2$ частинок в довільний момент часу $t \in \mathbb{R}$ описуються функціями $D_{n_1+n_2}(t) = S^*_{n_1+n_2}(t) D^0_{n_1+n_2}$, які є єдиним розв'язком задачі Коші для рівняння Ліувілля в слабкому сенсі [2].

Кластерні та кумулянтні розклади систем частинок з топологічною взаємодією. Для системи не фіксованого числа частинок, яка надалі розглядаються, стан описується подвійною послідовністю $D = \{D_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{-1},x_1,\ldots,x_{n_2})\}_{n_1+n_2 \geq 0}$ несиметричних відносно перестановки аргументів $x_i \equiv (q_i, p_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ функцій розподілу ймовірностей, які визначені на множині $\mathbb{R}^{n_1+n_2} \setminus \mathbb{W}_{n_1+n_2}$ дозволених конфігурацій.

Введемо послідовність кореляційних функцій

$$g = \{g_s(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})\}_{s=s_1+s_2 \geq 0}$$

станів частинок, як кумулянти функцій розподілу ймовірностей, за допомогою кластерних розкладів:

$$D_{s_1+s_2}(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2}) =$$

$$= g_{s_1+s_2}(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2}) + \sum_{\substack{P:(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2}) = \bigcup_i X_i,\; X_i \subset P \\ |P|>1}} \prod g_{|X_i|}(X_i), \qquad (3)$$

$$s = s_1 + s_2 \geq 1,$$

де символом $\sum_P$ позначено суму по всіх впорядкованих розбиттях P частково впорядкованої множини $(x_{-s_1},\ldots,x_{-1},x_1,\ldots,x_{s_2})$ на $|P|$ непорожніх частково впорядкованих підмножин $X_i \subset (x_{-s_1},\ldots,x_{-1},x_1,\ldots,x_{s_2})$, які взаємно не перетинаються. Наведемо приклади кластерних розкладів (3):

$$D_{0+1}(x_1) = g_{0+1}(x_1),$$
$$D_{1+1}(x_{-1},x_1) = g_{1+1}(x_{-1},x_1) + g_{1+0}(x_{-1})g_{0+1}(x_1),$$
$$D_{1+2}(x_{-1},x_1,x_2) = g_{1+2}(x_{-1},x_1,x_2) + g_{1+1}(x_{-1},x_1)g_{0+1}(x_2) +$$
$$+ g_{1+0}(x_{-1})g_{0+2}(x_1,x_2) + g_{1+0}(x_{-1})g_{0+1}(x_1)g_{0+1}(x_2).$$

Зауважимо, що поняття кластерного розкладу вперше було введено для гібсовських функцій розподілу в роботі [12] для опису рівноважного стану за допомогою функцій Урселла для систем багатьох частинок які описуються симетричними відносно перестановок аргументів функціями розподілу. Підкреслимо, що структура кластерних розкладів (3) суттєво відрізняється від структури аналогічного кластерного розкладу для симетричних систем [3].

На множині $\mathbb{R}^{s_1+s_2} \setminus \mathbb{W}_{s_1+s_2}$ дозволених конфігурацій розв'язки рекурсивних співвідношень (3) зображуються такими кумулянтними розкладами:

$$g_{s_1+s_2}(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2}) =$$
$$= D_{s_1+s_2}(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2}) + \sum_{\substack{P:(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=\bigcup_i X_i,\\ |P|>1}} (-1)^{|P|-1} \prod_{X_i \subset P} D_{|X_i|}(X_i), \qquad (4)$$
$$s_1 + s_2 \geq 1,$$

де використано позначення аналогічні до рекурсивних рівнянь (3). Наведемо приклади кумулянтних розкладів (4):

$$g_{0+1}(x_1) = D_{0+1}(x_1),$$
$$g_{1+1}(x_{-1},x_1) = D_{1+1}(x_{-1},x_1) - D_{0+1}(x_{-1})D_{0+1}(x_1),$$
$$g_{1+2}(x_{-1},x_1,x_2) = D_{1+2}(x_{-1},x_1,x_2) - D_{1+1}(x_{-1},x_1)D_{0+1}(x_2) -$$
$$- D_{1+0}(x_{-1})D_{0+2}(x_1,x_2) + D_{1+0}(x_{-1})D_{0+1}(x_1)D_{0+1}(x_2).$$

Таким чином, структура розкладів (4) для кореляційних функцій така, що вони мають сенс кумулянтів (семіінваріантів) відповідного порядку функцій розподілу ймовірностей [2;13-14]. Зазначимо, що кореляційні функції дають еквівалентний метод опису станів систем багатьох частинок аналогічний функціям розподілу. Характеристики флуктуацій спостережуваних в макроскопічному масштабі безпосередньо визначаються кореляційними функціями в мікроскопічному масштабі. Інтерпретація кореляційних функцій пов'язана з тією обставиною, що стан статистично незалежних частинок на дозволених конфігураціях описується добутком одночастинкових кореляційних функцій, тобто функцій розподілу ймовірностей кожної частинки.

Для порівняння структури розкладів (3) та (4) з аналогічними розкладами для симетричних функцій зобразимо їх на послідовностях функцій. У множині подвійних послідовностей $f=\{f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{-1},x_1,\ldots,x_{n_2})\}_{n_1+n_1=n\geq 0}$ вимірних функцій $f_{n_1+n_2}$, де f_0 – довільне число, введемо такий тензорний $\star$-добуток

$$(f_1\star f_2)_{|X|}(X)\doteq\sum_{Y\subset X}(f_1)_{|Y|}(Y)(f_2)_{|X\setminus Y|}(X\setminus Y),$$

де символом $\sum_{Y\subset X}$ позначено суму за всіма можливими частково впорядкованих підмножинах Y частково впорядкованої множини $X\equiv(x_{-n_1},\ldots,x_{-1},x_1,\ldots,x_{n_2})$.

На множині подвійних послідовностей f вимірних функцій відображення $(I-\circ)^{-\mathbb{I}_\star}$ визначається як $\star$-резольвента, а саме,

$$(I-f)^{-\mathbb{I}_\star}=I+\sum_{n=1}^{\infty}f^{\star n},\tag{5}$$

де $I=(1,0,0,\ldots)$ – одинична послідовність, та покомпонентно зображується такими розкладами:

$$((I-f)^{-\mathbb{I}_\star})_{s_1+s_1}(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=$$
$$=\delta_{s_1+s_2,0}+\sum_{P:(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=\bigcup_i X_i}\ \prod_{X_i\subset P}f_{|X_i|}(X_i),\quad s_1+s_2\geq 0.$$

Обернене відображення $I-(I+\circ)^{-\mathbb{I}_\star}$ до відображення $(I-\circ)^{-\mathbb{I}_\star}$ визначається в термінах $\star$-добутку таким рядом

$$I-(I+f)^{-\mathbb{I}_\star}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f^{\star n},\tag{6}$$

який покомпонентно зображується розкладами:

$$(I-(I+f)^{-\mathbb{I}_\star})_{s_1+s_1}(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=$$
$$=\sum_{P:(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|-1}\prod_{X_i\subset P}f_{|X_i|}(X_i),\quad s_1+s_2\geq 0.$$

Таким чином, кластерні розклади функцій розподілу ймовірностей (3) системи частинок, які взаємодіють з найближчими сусідами, мають структуру, яка визначається відображенням (5), а саме,

$$I+D(t)=(I-g(t))^{-\mathbb{I}_\star}.$$

Структура кумулянтних розкладів для кореляційних функцій (4), визначається оберненим відображенням (6)

$$g(t) = I - (I + D(t))^{-\mathbb{I}_\star}.$$

У випадку систем частинок стан яких описується симетричними функціями розподілу структура кластерних та кумулянтних розкладів визначається відповідними експоненційним та логарифмічним відображеннями [3].

Ієрархія еволюційних рівнянь для кумулянтів функцій розподілу. Як було зазначено вище, послідовність кореляційних функцій (4) описує стан систем не фіксованого числа частинок в альтернативний спосіб до послідовності функцій розподілу ймовірностей.

Еволюція стану системи частинок з топологічною взаємодією яка описується в термінах кореляційних функцій визначається задачею Коші для ієрархії таких нелінійних рівнянь Ліувілля:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{s_1+s_2}(t, x_{-s_1}, \ldots, x_{s_2}) = \mathcal{L}^*_{s_1+s_2} g_{s_1+s_2}(t, x_{-s_1}, \ldots, x_{s_2}) + \\ + \sum_{P:(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=X_1 \cup X_2} \sum_{j=\max X_1} \mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(j, j+1) g_{|X_1|}(t, X_1) g_{|X_2|}(t, X_2), \tag{7}$$

$$g_{s_1+s_2}(t)\big|_{t=0} = g^0_{s_1+s_2}, \quad s_1 + s_2 \geq 1, \tag{8}$$

де оператор Ліувілля $\mathcal{L}^*_{s_1+s_2}$ визначається виразом (2), $\sum_{P:(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=X_1 \cup X_2}$ – сума за всіма можливими впорядкованими розбиттями P частково впорядкованої множини $(x_{-s_1}, \ldots, x_{s_2})$ на дві підмножини X_1 and X_2 які взаємно не перетинаються, символом X_i позначено множину індексів відповідної множини X_i фазових координат частинок та $\max X_1$ – максимальне значення множини індексів X_1.

Відмітимо, що ієрархія рівнянь Ліувілля (7) являє собою ієрархію рекурентних еволюційних рівнянь. Наведемо приклади еволюційних рівнянь (7):

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{0+1}(t, x_1) = \mathcal{L}^*(1) g_1(t, x_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{1+1}(t, x_{-1}, x_1) = \Big(\sum_{j \in (-1,1)} \mathcal{L}^*(j) + \mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(-1,1)\Big) g_{1+1}(t, x_{-1}, x_1) + \\ + \mathcal{L}^*_{\mathrm{int}}(-1,1) g_{1+0}(t, x_{-1}) g_{0+1}(t, x_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{1+2}(t, x_{-1}, x_1, x_2) = \Big(\sum_{j \in (-1,1,2)} \mathcal{L}^*(j) +$$

$$+\sum_{(j,j+1)\in((-1,1),(1,2))}\mathcal{L}^{*}_{\mathrm{int}}(j,j+1))g_{1+2}(t,x_{-1},x_1,x_2)+$$

$$+\mathcal{L}^{*}_{\mathrm{int}}(-1,1)g_{1+0}(t,x_{-1})g_{0+2}(t,x_1,x_2)+\mathcal{L}^{*}_{\mathrm{int}}(1,2)g_{1+1}(t,x_{-1},x_1)g_{0+1}(t,x_2).$$

Для побудови розв'язку задачі Коші для ієрархія рівнянь Ліувілля (7) введемо поняття кумулянтів груп операторів (1) рівнянь Ліувілля. Кумулянт (s_1+s_2)-го порядку груп операторів (1) визначається таким розкладом

$$\mathfrak{A}_{s_1+s_2}(t,-s_1,\ldots,s_2)\doteq\sum_{P:(-s_1,\ldots,s_2)=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|-1}\prod_{X_i\subset P}S^{*}_{|X_i|}(t,X_i), \tag{9}$$

де використано позначення аналогічні до рекурсивних рівнянь (3). Наведемо деякі приклади кумулянтних розкладів (9):

$$\mathfrak{A}_{0+1}(t,1)=S^{*}_{0+1}(t,1),$$

$$\mathfrak{A}_{1+1}(t,-1,1)=S^{*}_{1+1}(t,-1,1)-S^{*}_{0+1}(t,-1)S^{*}_{0+1}(t,1),$$

$$\mathfrak{A}_{1+2}(t,-1,1,2)=S^{*}_{1+2}(t,-1,1,2)-S^{*}_{1+1}(t,-1,1)S^{*}_{0+1}(t,2)-$$

$$-S^{*}_{1+0}(t,-1)S^{*}_{0+2}(t,1,2)+S^{*}_{1+0}(t,-1)S^{*}_{0+1}(t,1)S^{*}_{0+1}(t,2).$$

Для довільних початкових станів з простору подвійних послідовностей інтегрованих функцій $L^{1}_{s_1+s_2}$ розв'язок задачі Коші для ієрархія рівнянь Ліувілля (7), (8) зображується такими розкладами:

$$g_{s_1+s_2}(t,x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=$$

$$=\sum_{P:(x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=\bigcup_i X_i}\mathfrak{A}_{|P|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|P|}\})\prod_{X_i\subset P}g^{0}_{|X_i|}(X_i),\ s_1+s_2\geq 1. \tag{10}$$

Твірний оператор $\mathfrak{A}_{|P|}(t)$ розкладу (10) є $|P|$-го порядку кумулянтом (9) груп операторів (1) який зображується розкладом

$$\mathfrak{A}_{|P|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|P|}\})\doteq$$

$$\doteq\sum_{P^{'}:(\{X_1\},\ldots,\{X_{|P|}\})=\bigcup_k Z_k}(-1)^{|P^{'}|-1}\prod_{Z_k\subset P^{'}}S^{*}_{|\theta(Z_k)|}(t,\theta(Z_k)), \tag{11}$$

де зв'язна множина впорядкованих індексів X_i, тобто один елемент множини, позначено символом $\{X_i\}$, відображення декластерізації $\theta(\cdot)$ визначено рівністю: $\theta(\{X_i\})=(X_i)$ та символом $\sum_{P^{'}:(\{X_1\},\ldots,\{X_{|P|}\})=\bigcup_k Z_k}$ позначено суму за всіма можливими впорядкованими розбиттями $P^{'}$ впорядкованої множини індексів $(\{X_1\},\ldots,\{X_{|P|}\})$ на $|P^{'}|$ непорожніх частково впорядкованих підмножин $Z_k\subset(\{X_1\},\ldots,\{X_{|P|}\})$. Наведемо приклади кореляційних функцій (10):

$$g_{0+1}(t,x_1) = \mathfrak{A}_1(t,1)g^0_{0+1}(x_1),$$
$$g_{1+1}(t,x_{-1},x_1) = \mathfrak{A}_1(t,\{-1,1\})g^0_{1+1}(x_{-1},x_1) + \mathfrak{A}_2(t,-1,1)g^0_{1+0}(x_{-1})g^0_{0+1}(x_1),$$
$$g_{1+2}(t,x_{-1},x_1,x_2) = \mathfrak{A}_1(t,\{-1,1,2\})g^0_{1+2}(x_{-1},x_1,x_2) +$$
$$+\mathfrak{A}_2(t,\{1,2\},-1)g^0_{1+0}(x_{-1})g^0_{0+2}(x_1,x_2) +$$
$$+\mathfrak{A}_2(t,\{-1,1\},2)g^0_{0+1}(x_2)g^0_{1+1}(x_{-1},x_1) +$$
$$+\mathfrak{A}_3(t,-1,1,2)g^0_{1+0}(x_{-1})g^0_{0+1}(x_1)g^0_{0+1}(x_2).$$

Справедливість розкладів (10) для розв'язку ієрархії рівнянь Ліувілля (7) встановлюється поточковим диференціюванням за змінною часу.

Для початкових кореляційних функцій з простору інтегрованих функцій для ієрархії рівнянь Ліувілля справедлива така теорема існування.

Теорема 1. *Для* $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь Ліувілля (7), (8) зображується розкладом (10). Для нескінченно диференційованих початкових кореляційних функцій з компактними носіями з простору* $L^1_{n_1+n_2}$, $n_1+n_2 \geq 1$, *розкладом (10) зображується сильний (класичний) розв'язок та для довільних початкових кореляційних функцій з простору – слабкий (узагальнений) розв'язок.*

Підкреслимо, що характерні властивості побудованого розв'язку (10) породжуються властивостями кумулянтів (11) груп операторів рівнянь Ліувілля.

Ієрархія рівнянь ББГКІ систем з топологічною взаємодією частинок. Надалі сформулюємо підхід до опису еволюції стану системи багатьох частинок з топологічною взаємодією в термінах редукованих функцій розподілу на основі динаміки кореляцій (7). Нагадаємо [11], що редуковані функції розподілу визначаються за допомогою послідовності $D(0) = \{D^0_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{-1},x_1,\ldots,x_{n_2})\}_{n_1+n_2\geq 0}$ функцій розподілу ймовірностей в початковий момент часу та груп операторів (1):

$$F_{s_1+s_2}(t,x_{-s_1},\ldots,x_{s_2}) \doteq (I,D(0))^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\geq 0}}\int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{n_1+n_2}} dx_{-(n_1+s_1)}\ldots \quad (12)$$
$$dx_{-(s_1+1)}dx_{s_2+1}\ldots dx_{s_2+n_2}(S^*(t)D(0))_{n_1+s_1+s_2+n_2}(x_{-(n_1+s_1)},\ldots,x_{s_2+n_2}),\ s_1+s_2\geq 1,$$

де нормувальний множник

$$(I,D(0)) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\geq 0}}\int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{n_1+n_2}} dx_{-n_1}\ldots dx_{n_2}D^0_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{-1},x_1,\ldots,x_{n_2})$$

відомий як велика канонічна статистична сума. Послідовність редукованих функцій розподілу задовольняє ієрархії рівнянь ББГКІ [11].

Можливість перевизначення редукованих функцій розподілу природно виникає в результаті ділення ряду у виразі (12) на ряд, яким зображується нормувальний множник. Означення редукованих функцій розподілу, еквівалентне визначенню (12), формулюється на основі кореляційних функцій (10) за допомогою такого розкладу в ряд:

$$F_{s_1+s_2}(t, x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=n_1+n_2 \\ n_1, n_2 \geq 0}} \int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{n_1+n_2}} dx_{-(n_1+s_1)} \dots dx_{-(s_1+1)} \times$$

$$\times dx_{s_2+1} \dots dx_{s_2+n_2}\, g_{1+n_1+n_2}(t, x_{-(n_1+s_1)}, \dots, x_{s_2+1}, \{x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}\}, x_{s_2+1}, \dots, x_{s_2+n_2}), \quad (13)$$

$$s_1 + s_2 \geq 1,$$

де на множині дозволених конфігурацій кореляційні функції кластеру частинок та частинок $g_{1+n_1+n_2}(t),\ n_1 + n_2 \geq 1,$ визначаються такими розкладами:

$$g_{1+n_1+n_2}(t, x_{-(n_1+s_1)}, \dots, x_{s_2+1}, \{x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}\}, x_{s_2+1}, \dots, x_{s_2+n_2}) =$$

$$= \sum_{\substack{P:(x_{-(n_1+s_1)}, \dots, x_{s_2+1}, \{x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}\}, \\ x_{s_2+1}, \dots, x_{s_2+n_2}) = \bigcup_i X_i}} \mathfrak{A}^*_{|P|}(t, \{\theta(X_1)\}, \dots, \{\theta(X_{|P|})\}) \prod_{X_i \subset P} g^0_{|X_i|}(X_i). \quad (14)$$

Нагадаємо, що твірні оператори розкладів (14) зображуються $|P|$-го порядку кумулянтами (11) груп операторів (1) та символом $\sum_P$ позначено суму за всіма впорядкованими розбиттями множини індексів $(-(n_1+s_1), \dots, s_2+1, \{-s_1, \dots, -1, 1, \dots, s_2\}, s_2+1, \dots, s_2+n_2)$ на підмножини X_i які взаємно не перетинаються.

Зауваження. *Кореляційні функції кластера частинок і частинок пов'язані з кореляційними функціями частинок такими співвідношеннями:*

$$g_{1+n_1+n_2}(t, x_{-(n_1+s_1)}, \dots, x_{s_2+1}, \{x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}\}, x_{s_2+1}, \dots, x_{s_2+n_2}) =$$

$$= \sum_{\substack{P:(x_{-(n_1+s_1)}, \dots, x_{s_2+1}, \{x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}\}, \\ x_{s_2+1}, \dots, x_{s_2+n_2}) = \bigcup_i X_i}} (-1)^{|P|-1} \prod_{X_i \subset P} \sum_{P': \theta(X_i) = \bigcup_{j_i} Z_{j_i}} \prod_{Z_{j_i} \subset P'} g_{|Z_{j_i}|}(t, Z_{j_i}), \quad n_1 + n_2 \geq 0.$$

У частинному випадку $n_1 + n_2 = 0,$ тобто кластера $s_1 + s_2$ частинок такі співвідношення набувають вигляду

$$g_{1+0}(t, \{x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}\}) = \sum_{P:(x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}) = \bigcup_i X_i} \prod_{X_i \subset P} g_{|X_i|}(t, X_i).$$

Введемо простір $L_{\alpha}^{1}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\geq 0}}\bigoplus\alpha^{n_1+n_2}L_{n_1+n_2}^{1}$ подвійних послідовностей $f=\{f_{n_1+n_2}\}_{n_1+n_2\geq 0}$, інтегрованих функцій $f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2})$, визначених на фазовому просторі $\mathbb{R}^{n_1+n_2}\times(\mathbb{R}^{n_1+n_2}\setminus\mathbb{W}_{n_1+n_2})$ з нормою

$$\|f\|=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\geq 0}}\alpha^{n_1+n_2}\int_{\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}}dx_{-n_1}\ldots dx_{n_2}\,|\,f_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2})\,|,$$

де параметр $\alpha>1$.

На послідовностях функцій $f\in L_{\alpha}^{1}$ визначені такі обмежені оператори:

$$(\mathfrak{a}_{+}f)_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2})=$$
$$=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}dx_{n_2+1}\,f_{n_1+n_2+1}(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2},x_{n_2+1}),$$
$$(\mathfrak{a}_{-}f)_{n_1+n_2}(x_{-n_1},\ldots,x_{n_2})=$$
$$=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}dx_{-(n_1+1)}\,f_{n_1+1+n_2}(x_{-(n_1+1)},x_{-n_1},\ldots,x_{n_2}),$$

які є аналогами оператора знищення частинок квантової теорії поля, а також наступні оператори:

$$(I-\mathfrak{a}_{\pm})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{a}_{\pm}^{n}. \tag{15}$$

Оскільки кореляційні функції (14) визначаються ієрархією рівнянь Ліувілля (7), редуковані функції розподілу (13) задовольняють ієрархією рівнянь ББГКІ для системи багатьох частинок з топологічною взаємодією [10]

$$\frac{d}{dt}F(t)=\mathcal{L}^{*}F(t)+[\mathfrak{a}_{-},\mathcal{L}^{*}]F(t)+[\mathfrak{a}_{+},\mathcal{L}^{*}]F(t), \tag{16}$$

де $\mathcal{L}^{*}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\geq 0}}\bigoplus\mathcal{L}_{n_1+n_2}^{*}$ – пряма сума операторів Ліувілля (2), дужками $[\circ,\circ]$ позначено комутатор двох операторів.

Розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (16) системи багатьох частинок з топологічною взаємодією визначається такою формулою [15-16]:

$$\begin{aligned}F_{s_1+s_2}(t,x_{-s_1},\ldots,x_{s_2})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\geq 0}}\int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{n_1+n_2}}dx_{-(n_1+s_1)}\ldots dx_{-(s_1+1)}\times\\ \times dx_{s_2+1}\ldots dx_{s_2+n_2}\,\mathfrak{A}_{1+n_1+n_2}(t,-(n_1+s_1),\ldots,-s_1+1,\{-s_1,\ldots,s_2\},\\ s_2+1,\ldots,s_2+n_2)F_{s_1+n_1+s_2+n_2}^{0}(x_{-(n_1+s_1)},\ldots,x_{s_2+n_2}),\quad s_1+s_2\geq 1,\end{aligned} \tag{17}$$

де твірні оператори цих розкладів в ряди є кумулянтами груп операторів рівнянь Ліувілля

$$\mathfrak{A}_{1+n_1+n_2}(t) =$$

$$= \sum_{\substack{P:(-(n_1+s_1),\ldots,-s_1+1,\{-s_1,\ldots,s_2\},\\ s_2+1,\ldots,s_2+n_2)=\bigcup_i X_i}} (-1)^{|P|-1} \prod_{X_i\subset P} S^*_{|\theta(X_i)|}(t,\theta(X_i)), \;\; n_1+n_2\geq 0. \quad (18)$$

У розкладі для кумулянта $(1+n_1+n_2)$-го порядку груп операторів (1) використано такі позначення: символом $\sum_P$ позначено суму по кожному впорядкованому розбитті P частково впорядкованої множини індексів $(-(n_1+s_1),\ldots,-s_1+1,\{-s_1,\ldots,s_2\},s_2+1,\ldots,s_2+n_2)$ на $|P|$ непорожніх частково впорядкованих підмножин X_i, які взаємно не перетинаються, а зв'язна множина $\{-s_1,\ldots,s_2\}$ цілком належить одній з підмножин X_i.

В термінах введених операторів (15) в просторі L^1_α розклади в ряд (17) послідовності редукованих функцій розподілу мають таку структуру

$$F(t) = (I-\mathfrak{a}_-)^{-1}(I-\mathfrak{a}_+)^{-1}(I-S^*(t))^{-\mathbb{I}}\star F(0).$$

Ряд (17) визначений для початкових редукованих функцій розподілу з простору $L^1_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n=n_1+n_2\\ n_1,n_2\geq 0}} \bigoplus \alpha^{n_1+n_2} L^1_{n_1+n_2}$. Оскільки для твірних операторів (18) розкладів в ряд (17) в просторі $L^1_{s_1+n_1+s_2+n_2}$ справедлива оцінка:

$$\| \mathfrak{A}_{1+n_1+n_2}(t) f_{s_1+n_1+s_2+n_2} \|_{L^1_{s_1+n_1+s_2+n_2}} \leq 2^{n_1+n_2} \| f_{s_1+n_1+s_2+n_2} \|_{L^1_{s_1+n_1+s_2+n_2}},$$

тоді для послідовності функцій (17) в просторі L^1_α, за умови $\alpha>2$, маємо таку оцінку

$$\| F(t) \|_{L^1_\alpha} \leq c_\alpha \| F^0 \|_{L^1_\alpha},$$

де $c_\alpha = (1-\frac{2}{\alpha})^{-1}$. Параметр α можна інтерпретувати як величину обернено пропорційну щільності системи багатьох частинок, тобто середнього числа частинок в одиниці об'єму.

Таким чином, для непертурбативного розв'язку (17) задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ систем частинок з топологічною взаємодією справедлива теорема [15-16].

Теорема 2. *Якщо* $F(0)\in L^1_\alpha$ *– подвійна послідовність невід'ємних початкових функцій розподілу, тоді для* $t\in\mathbb{R}$ *за умови*

$\alpha > 2$, *існує єдиний розв’язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (16) систем частинок з топологічною взаємодією який зображується розкладами в ряд (17). Для початкових даних з підпростору фінітних послідовностей неперервно диференційовних функцій з компактними носіями – це сильний розв’язок, а для довільних початкових даних з простору* L^1_α *– слабкий розв’язок.*

Зауваження. *У статтях [10-11] було побудовано розв’язок задачі Коші для ієрархії ББГКІ (16) в редукованій формі, вираз якої в термінах операторів (15) має таку структуру*

$$F(t) = (I - \mathfrak{a}_-)^{-1}(I - \mathfrak{a}_+)^{-1} S^*(t)(I - \mathfrak{a}_-)(I - \mathfrak{a}_+)F(0).$$

Покомпонентна така послідовність редукованих функцій розподілу зображується розкладами в ряд:

$$F_{s_1+s_2}(t, x_{-s_1}, \ldots, x_{s_2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=n_1+n_2 \\ n_1, n_2 \geq 0}} \int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{n_1+n_2}} dx_{-(n_1+s_1)} \ldots dx_{-(s_1+1)} \times$$

$$\times dx_{s_2+1} \ldots dx_{s_2+n_2} U_{1+n_1+n_2}(t, -(n_1+s_1), \ldots, -(s_1+1), \{-s_1 \ldots, -1, 1, \ldots, s_2\}, \tag{19}$$

$$s_2+1, \ldots, s_2+n_2) F^0_{n_1+s_1+s_2+n_2}(x_{-(n_1+s_1)}, \ldots, x_{s_2+n_2}), \quad s_1+s_2 \geq 1,$$

де твірні оператори $\{U_{1+n_1+n_2}(t)\}_{n_1+n_2 \geq 0}$, розкладу в ряд (19) визначаються виразами:

$$U_{1+n_1+n_2}(t, -(n_1+s_1), \ldots, -(s_1+1), \{-s_1, \ldots, -1, 1, \ldots, s_2\}, s_2+1, \ldots, s_2+n_2) =$$

$$\sum_{k_1=0}^{min(1,n_1)} \sum_{k_2=0}^{min(1,n_2)} (-1)^{k_1+k_2} S^*_{n_1+s_1-k_1+s_2+n_2-k_2}(t, -(n_1+s_1-k_1), \ldots, -1, 1, \ldots, s_2+n_2-k_2).$$

Такі вирази є розв’язками редукованих кластерних розкладів груп операторів (1) по кумулянтах (семиінваріантах).

У просторі L^1_α послідовностей інтегрованих функцій внаслідок ізометричності групи операторів (1) зображення (17) та (19) розв’язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (16) є еквівалентними. Підкреслимо, що поширеною формою зображення розв’язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББҐКІ є зображення розкладом в ряд теорії збурень [1; 17]. За відповідних умов на початкові дані та потенціал взаємодії частинок еквівалентність зображень розв’язків доводиться внаслідок справедливості аналогів рівнянь Дюамеля для твірних операторів ряду (19).

Редуковані кореляційні функції. Альтернативний підхід до опису еволюції системи частинок з топологічною взаємодією ґрунтується на редукованих кореляційних функціях, які визначаються кумулянтними розкладами редукованих функцій розподілу (12):

$$G_{s_1+s_2}(t, x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}) = \\ = \sum_{P:(x_{-s_1},\dots,x_{s_2})=\bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} \prod_{X_i \subset P} F_{|X_i|}(t, X_i), \quad s_1 + s_2 \geq 1. \tag{20}$$

Характеристики флуктуацій середніх значень спостережуваних в макроскопічному масштабі безпосередньо визначаються редукованими кореляційними функціями, якими описується стан системи багатьох частинок в мікроскопічному масштабі [2].

Означення редукованих кореляційних функціях формулюється на основі розв'язку (10) задачі Коші для ієрархії рівнянь Ліувіля (7), (8) наступним розкладом в ряд:

$$G_{s_1+s_2}(t, x_{-s_1}, \dots, x_{s_2}) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=n_1+n_2 \\ n_1,n_2 \geq 0}} \int_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^{n_1+n_2}} dx_{-(n_1+s_1)} \dots \\ dx_{-(s_1+1)} dx_{s_2+1} \dots dx_{s_2+n_2}\, g_{n_1+s_1+s_2+n_2}(t, x_{-(n_1+s_1)}, \dots, x_{s_2+n_2}), \quad s_1 + s_2 \geq 1, \tag{21}$$

де твірні функції $g_{n_1+s_1+s_2+n_2}(t)$ визначаються розкладами (10). Оскільки кореляційні функції $g_{n_1+s_1+s_2+n_2}(t)$ визначаються ієрархією рівнянь Ліувіля (7), редуковані кореляційні функції (21) задовольняють ієрархією нелінійних еволюційних рівнянь.

Підкреслимо, що (n_1+n_2)-й член розкладів (21) редукованих кореляційних функцій визначається кореляційною функцією $(n_1+s_1+s_2+n_2)$ частинок (10) на відміну від розкладів редукованих функцій розподілу (13), які визначаються $(1+n_1+n_2)$-ю кореляційною функцією кластера частинок та частинок (14).

Для систем багатьох частинок стани яких описуються симетричними функціями розподілу непертурбативні розв'язки задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ побудовані в роботах [3; 18-20].

Висновки. У статті встановлено, що динаміка кореляцій, тобто фундаментальні рівняння (7), складає основу опису еволюції всіх можливих станів як скінченого, так і нескінченного числа частинок з топологічною взаємодією (2). Такий підхід ґрунтується на описі стану за допомогою функцій, які визначаються кластерними розкладами функцій розподілу ймовірностей (3). Підкреслимо, що кореляції які виникають при еволюції системи частинок з топологічною взаємодією (4) природно відрізняються від структури кореляцій систем частинок стан яких традиційно описується симетричними функціями розподілу [3].

Вище було також доведено, що побудована динаміка кореляції складає основу опису еволюції стану нескінченних систем частинок в термінах редукованих функцій розподілу (17) або редукованих кореляційних функцій (21), а саме кумулянтів редукованих функцій розподілу (20). Зауважимо, статистичні властивості фізичних систем моделюються колективною поведінкою нескінченних систем частинок [1].

Структура розкладів для кореляційних функцій (10), твірними операторами яких є відповідного порядку кумулянти (11) груп операторів (1), індукує кумулянтну структуру розкладів в ряд для редукованих функцій розподілу (13) та редукованих кореляційних функцій (21). Таким чином, динаміка систем нескінченного числа частинок з топологічною взаємодією породжується динамікою кореляцій станів частинок (7).

Нарешті відзначимо важливість математичного опису процесів створення та поширення кореляцій, зокрема, для численних застосувань. У випадку систем багатьох частинок із зіткненнями динаміка кореляцій побудована в роботі [3] та для квантових систем багатьох частинок в роботах [21-22].

Подяки. Героям слава!

Список використаних джерел:

1. Cercignani C., Gerasimenko V., Petrina D. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. Second ed. Netherlands: Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-94-011-5558-8.
2. Gerasimenko V. I., Gapyak I. V. Boltzmann-Grad asymptotic behavior of collisional dynamics. *Reviews in Math. Phys.* 2021. Vol. 33. 2130001. 32. DOI: 10.1142/S0129055X21300016.
3. Gerasimenko V. I., Gapyak I. V. Propagation of correlations in a hard-sphere system. *J Stat. Phys.* 2022. Vol. 189. № 2. DOI: 10.1007/s10955-022-02958-8.
4. Prigogine I. Non-Equilibrium Statistical Mechanics. N.Y.: John Wiley & Sons, 1962.
5. Balescu R. Dynamical correlation patterns: a new representation of the Liouville equation. *Physica.* 1971. Vol. 56. № 1. P. l-24. DOI: 10.1016/0031-8914(71)90002-4.
6. Blanchet A., Degond P. Topological interactions in a Boltzmann-type framework. *J. Stat. Phys.* 2016. Vol. 163. P. 41-60. DOI: 10.1007/s10955-016-1471-6.
7. Blanchet A., Degond P. Kinetic models for topological nearest-neighbor interactions. *J. Stat. Phys.* 2017. Vol. 169. P. 929-950. DOI: 10.1007/s10955-017-1882-z.
8. Degond P., Pulvirenti M. Propagation of chaos for topological interactions. *Ann. Appl. Prob.* 2019. Vol. 29. P. 2594-2612. DOI: 10.1214/19-AAP1469.
9. Benedetto1 D., Paul Th., Rossi S. Propagation of chaos and hydrodynamic description for topological models. *Kinetic and Related Models*. 2025. Vol. 18. № 1. P. 19-34. DOI: 10.3934/krm.2024010.
10. Gerasimenko V. I. Evolution of infinite particle systems interacting with nearest neighbors. *Reports of Acad. Sci. Ukrainian SSR*. 1982. № 5. P. 10-13.

11. Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I. A mathematical description of the evolution of states of infinite systems of classical statistical mechanics. *Russ. Math. Surv. (Uspekhi Mat. Nauk)*. 1983. Vol. 38. № 3. P. 1-61. DOI: 10.1070/RM1983v038n05ABEH003499.
12. Mayer J. E., Montroll E. Molecular distribution. *J. Chemical Physics*. 1941. Vol. 9. № 2. P. 2-16. DOI: 10.1063/1.1750822.
13. Duerinckx M. On the size of chaos via Glauber calculus in the classical mean-field dynamics. *Commun. Math. Phys*. 2021. Vol. 382. P. 613-653. DOI: 10.1007/s00220-021-03978-3.
14. Duerinckx M., Saint-Raymond L. Lenard–Balescu correction to mean-field theory. *Probab. Math. Phys*. 2021. Vol. 2. № 1. P. 27-69. DOI: 10.2140/pmp.2021.2.27.
15. Gerasimenko V. I., Stashenko M. O. Nonequilibrium cluster expansion of non-symmetric particle systems. *Sci. Bulletin of Volyn Univ*. 2002. Vol. 4. P. 5-13.
16. Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O. On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions, *J. Phys. A: Math. Gen*. 2004. Vol. 37. P. 9861-9872. DOI: 10.1088/0305-4470/37/42/002.
17. Gerasimenko V. I. Solutions of Bogolyubov equations for one-dimensional system of hard spheres. *Theor. Math. Phys.* 1992. Vol. 91. P. 120-132. DOI: 10.1007/BF01019833.
18. Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V. Cumulant representation of solutions of the BBGKY hierarchy of equations. *Ukrainian Math. J.* 2002. Vol. 54. P. 1583-1601. DOI: 10.1023/A:1023771917748.
19. Gerasimenko V. I., Gapyak I. V. Non-perturbative solution of the dual BBGKY hierarchy of hard-sphere fluids. *Reports of NAS of Ukraine*. 2023. Vol. 4. P. 3-10. DOI: 10.15407/dopovidi2023.04.003.
20. Gerasimenko V. I., Gapyak I. V. Non-perturbative solutions of hierarchies of evolution equations for colliding particles. *AIP Advances*. 2024. Vol. 14, 125006. DOI: 10.1063/5.0223487.
21. Gerasimenko V. I. Hierarchies of quantum evolution equations and dynamics of many-particle correlations. In: *Statistical Mechanics and Random Walks: Principles, Processes and Applications*. N.Y.: Nova Science Publ., Inc. 2012. P. 233-288.
22. Gerasimenko V. I. Nonlinear kinetic equations of quantum systems. In: *Modern Problems of Mathematics and its Applications. I.* (Eds. V. I. Gerasimenko et al.). Kyiv: IM. 2020. P. 82-112.

EVOLUTION EQUATIONS FOR CUMULANTS OF DISTRIBUTION FUNCTIONS OF PARTICLE SYSTEMS WITH TOPOLOGICAL INTERACTION

The article formulates the concept of a cumulant representation for distribution functions that describe the state of many-particle systems with topological interaction, i.e., using the interaction potential determined by the proximity rank of particles. Cumulants of probability distribution functions are interpreted as correlations of particle states and are defined as solutions of the corresponding cluster expansions of probability distribution functions. We emphasize that the correlations that arise during the evolution of a system of particles with topological interaction naturally differ from the structure of correlations of many-particle systems, the state of which is traditionally described by symmetric probability distribution functions. The article establishes a hierarchy of evolution nonlinear equations for correlation functions (hierarchy of recursive Liouville equations). In the space sequences of integrated functions, a non-perturbative solution of the Cauchy problem for a hierarchy of such nonlinear evolution equations is constructed. Typical properties of the expansion of such a solution, which are generated by the properties of its generating operators, namely, cumulants of groups of operators of Liouville equations, are investigated. Based on the dynamics of correlations, the structure of series expansions is established, which determines reduced distribution functions, as well as reduced correlation functions, which, in particular, made it possible to substantiate the structure of generating operators of the solution of the Cauchy problem for the hierarchy of BBGKY equations (Bogolyubov–Born–Green–Kirkwood–Yvon). It is proved that the structure of expansions for correlation functions, the generating operators of which are cumulants of groups of operators of the corresponding order of Liouville equations, induces the cumulant structure of series expansions for reduced distribution functions and reduced correlation functions. Thus, the dynamics of state correlations generate the dynamics of many-particle systems with topological interaction.

Key words: *many-particle systems, topological interaction, cluster expansions, cumulant expansions, semigroup of operators.*

Отримано: 11.12.2024