

УДК 536.2

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-27.19-29

Р. С. Мусій, д-р фіз.-мат. наук, професор,

М. І. Клапчук, канд. фіз.-мат. наук,

О. В. Назарук, аспірант,

В. К. Шиндер, канд. фіз.-мат. наук,

Р. Я. Пелех, аспірант

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

АНАЛІЗ ДВОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У МІДНІЙ ПАНЕЛІ ЗА ЇЇ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВУ

Розглянуто електропровідну панель прямокутного перерізу, яка індукційно нагрівається квазіусталеним електромагнітним полем. Внаслідок цього у панелі виникають нестационарні об'ємні розподілені джерела тепла Джоуля. Ці джерела створюють нестационарний двовимірний розподіл температури по поперечному перерізу панелі. На основах і бічних гранях панелі виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Сформульовано нестационарну двовимірну задачу теплопровідності для визначення температурного поля у панелі. Розв'язок задачі побудовано з використанням апроксимації розподілу температури по товщинній координаті панелі кубічним поліномом. Коефіцієнти апроксимаційного полінома подаються через інтегральні по товщинній координаті характеристики температури та умови на крайові значення температури на основах і бічних гранях панелі. У результаті вихідні двовимірні початково-крайові задачі на температуру зведено до одновимірних початково-крайових задач на інтегральні характеристики температури.

Розв'язок задач на інтегральні характеристики температури знайдено з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом і скінченного інтегрального перетворення за поперечною координатою панелі. Його отримано у вигляді згорток функцій, що відповідають однорідним розв'язкам початково-крайових задач на інтегральні характеристики температури та функцій, що описують наявні нестационарні джерела тепла Джоуля і поверхневі значення температури.

Чисельно проаналізовано температурні режими мідної панелі за її індукційного нагріву однорідним квазіусталеним електромагнітним полем. Розглянуто два характерні режими приповерхневого та суцільного індукційного нагріву панелі. Результати обчислень розподілів температури залежно від параметрів індукційного нагріву та умов теплообміну приведено у вигляді 2D і 3D графіків.

Ключові слова: електропровідна панель, індукційний нагрів, квазіусталене електромагнітне поле, режими приповерхневого та суцільного нагріву, нестационарне температурне поле.

Вступ. Електропровідні, зокрема, мідні панелі є конструктивними елементами багатьох сучасних промислових пристроїв, які використовуються в енергетиці, машино- та авіа-будуванні. Такими елементами, зокрема, є електричні генератори і двигуни, магнітопроводи, трансформатори тощо. У процесі функціонування пристроїв на ці елементи можуть впливати нестационарні електромагнітні поля (ЕМП) таких типів: усталені, квазіусталені, неусталені та імпульсні. У більшості випадків промислового використання мідні панелі зазнають впливу зовнішніх квазіусталених ЕМП, дія яких зумовлює виникнення в них джерел тепла Джоуля. Врахування такого додаткового теплового фактору, як тепло Джоуля, набуває особливого значення при розробці інженерних рішень для прогнозування температурних режимів, роботоздатності та надійності експлуатації мідних панелей.

Для технологічної термообробки електропровідних елементів конструкцій, зокрема мідних панелей, все більшої популярності набуває технологія індукційного нагріву. Основи теплопередачі та індукційного нагріву, його теоретичні засади та важливість в сучасному контексті детально проаналізовані в роботах [1, с. 27-75; 77-131; 2, с. 1-55; 57-81]. В них ґрунтовно розглянуті головні засади електротеплотехніки та технологічного індукційного нагріву, що дозволяє отримати глибше розуміння сутності процесу. Фізичні моделі та чисельно-експериментальні підходи до нагрівання електропровідних матеріалів вихровими струмами, індукованими змінним ЕМП, розглянуті у роботі [3, с. 438-442; 4, с. 72-88].

У літературі, як правило, розглянуто розрахунки температури в одновимірних тілах. У роботах [5, 6] проаналізовано теплові режими в однорідній та двошаровій електропровідних пластинах за короткочасного індукційного нагріву неусталеним ЕМП.

Для більш повного аналізу температурного поля у електропровідних панелях прямокутного поперечного перерізу необхідне використання двовимірної фізико-математичної моделі.

У цій роботі розглянуто таку модель для визначення компонент векторів напруженостей магнітного та електричного полів, питомої густини тепла Джоуля, а також температури у електропровідній панелі прямокутного перерізу за дії квазіусталеного ЕМП. На її основі чисельно проаналізовано температурні режими мідної панелі за приповерхневого та суцільного індукційного нагріву залежно від умов конвективного теплообміну основ і бічних граней панелі із зовнішнім середовищем.

Двовимірна фізико-математична модель. Розглядається електропровідна панель прямокутного перерізу. Панель виготовлена з однорід-

ного, ізотропного і неферомагнітного матеріалу. Електрофізичні параметри матеріалу вважаються сталими і дорівнюють їх середнім значенням на відповідних інтервалах нагріву. Панель віднесена до Декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$. Початок системи (точка O) співпадає з центром симетрії прямокутника перерізу. Панель індукційно нагрівається зовнішнім однорідним квазіусталеним ЕМП. Внаслідок електромагнітної індукції у панелі виникають індукційні струми, які зумовлюють тепло Джоуля, що створює нестационарний розподіл температурного поля по поперечному перерізу панелі. Основи і бічні грані панелі знаходяться за умов конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Залежно від параметрів індукційного нагріву та конвективного теплообміну панель перебуває у відповідних температурних режимах. Таким чином, фізико-математична модель складається з двох етапів. На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначаємо параметри нестационарного ЕМП та питому густину тепла Джоуля. На другому етапі за знайденим теплом Джоуля з рівняння теплопровідності знаходимо розподіл температурного поля у поперечному перерізі панелі.

Визначення ЕМП та тепла Джоуля. Вздовж осі Ox_1 відкладається ширина панелі, вздовж осі Ox_2 – її довжина, а вздовж осі Ox_3 – її товщина. Панель безмежно довга. Її прямокутний поперечний переріз має товщину $2h$ і шириною $2d_*$, де h – півтовщина панелі. Віднесемо Декартові координати x_1, x_3 до величини h , тобто надалі будемо розглядати безрозмірні координати $x_1 = X_1/h, x_3 = X_3/h$.

На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначаємо вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}(x_1, x_3, t) = \{0; H_2(x_1, x_3, t); 0\}$. Компонента $H_2(x_1, x_3, t)$ паралельна до всіх чотирьох граней панелі, які описуються виразами: $x_3 = \pm 1, x_1 = \pm d$. Тут t – час, $x_3 = \pm 1, x_1 = \pm d, d = d_*/h$ – безрозмірна ширина панелі.

Для визначення компоненти $H_2(x_1, x_3, \tau)$ отримуємо рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) H_2 - \frac{\partial H_2}{\partial \tau} = 0. \quad (1)$$

Тут $\tau = t/(\sigma\mu h^2)$ – безрозмірний час, характерний для дифузії магнітного поля через півтовщину h панелі; σ – коефіцієнт електропровідності, μ – магнітна проникливість матеріалу панелі.

Дія зовнішнього квазіусталеного ЕМП задається значеннями компоненти $H_2(x_1, x_3, t)$ на всіх гранях панелі. Відповідно граничні умови для розв'язування рівняння (1) мають вигляд:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau); H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau). \quad (2)$$

Тут $H_2^{\pm(0)}$ і $H_2^{\pm(0)*}$ – задані вирази функції $H_2(x_1, x_3, \tau)$ на гранях $x_3 = \pm 1$, $x_1 = \pm d$.

За відсутності ЕМП в початковий момент часу $\tau = 0$ початкова умова на функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ має вигляд:

$$H_2(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (3)$$

У кутових точках поперечного перерізу панелі крім граничних умов (2) повинні виконуватись також умови узгодження функцій $H_2^{\pm(0)}$ і $H_2^{\pm(0)*}$, а саме:

$$\begin{aligned} H_2^{+(0)}(d, \tau) &= H_2^{-(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(d, \tau) = H_2^{-(0)*}(-1, \tau) \\ H_2^{+(0)}(-d, \tau) &= H_2^{-(0)*}(1, \tau), \quad H_2^{-(0)}(-d, \tau) = H_2^{-(0)*}(-1, \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

За знайденою функцією $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ у панелі знаходимо зі співвідношення

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma}(\text{rot} \vec{H}). \quad (5)$$

Відповідно вектор

$$\vec{E}(x_1, x_3, \tau) = \{ E_1(x_1, x_3, \tau); 0; E_3(x_1, x_3, \tau) \}$$

напруженості електричного поля має компоненти, які описуються виразами:

$$E_1 = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_2(x_1, x_3, \tau)}{\partial x_1}. \quad (6)$$

Тепло Джоуля визначається за знайденим виразом вектора $\vec{E}$ напруженості електричного поля формулою

$$Q = \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}. \quad (7)$$

Через функцію $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вираз тепла Джоуля має вигляд:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Визначення температурного поля. Температурне поле $T(x_1, x_3, Fo)$, яке зумовлене теплом Джоуля Q , описується рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + (\Delta_1 - \frac{\partial}{\partial Fo})T = -\frac{h^2}{\lambda} Q. \quad (9)$$

Тут $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$; $Fo = \frac{at}{h^2}$ – критерій Фур'є; t – час; a і λ – коефіцієнти температуро- і теплопровідності.

На поверхнях панелі $x_3 = \pm 1$ виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^{\pm} \pm Bi^{\pm} (T^{\pm} - T_c^{\pm}) = 0. \quad (10)$$

Тут $Bi^{\pm} = H^{\pm} h$ – критерій Бю; $H^{\pm}$ – відносний коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $x_3 = \pm 1$; $T^{\pm}$ і $\left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^{\pm}$ – значення температури і її похідної

на поверхнях $x_3 = \pm 1$; $T_c^{\pm}$ – температури зовнішніх середовищ, які контактують із поверхнями $x_3 = \pm 1$ ($T_c^{\pm}(x_1, x_2, 0) = T_c^{(0)}(x_1, x_2, 0)$); $T_c^{(0)}$ – початкова температура зовнішнього середовища.

Зауважимо, що аналогічні умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем мають місце і на торцевих поверхнях панелі. Значення температури T у початковий момент часу $Fo = 0$ є відомим і рівне

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_c^{(0)}(x_1, x_2, 0). \quad (11)$$

Методика розв'язування початково-крайових задач. Початково-крайові задачі (1)-(4) і (9)-(11) стосовно визначальних функцій $\Phi = \{H_2(x_1, x_3, t); T(x_1, x_3, t)\}$ будемо розв'язувати використовуючи апроксимацію їх розподілів по товщинній змінній x_3 кубічними поліномами [7]

$$\Phi(x_1, x_3, t) = \sum_{j=1}^3 a_{(j-1)}^{\Phi}(x_1, t) x_3^{j-1}. \quad (12)$$

Коефіцієнти $a_{(j-1)}^{\Phi}(x_1, t)$ апроксимаційних поліномів (12) запишемо через інтегральні характеристики $\Phi_s(x_1, t)$ визначальних функцій $\Phi(x_1, x_3, t)$:

$$\Phi_s(x_1, t) = \frac{2s-1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x_1, x_3, t) x_3^{s-1} dx_3, \quad (s=1, 2) \quad (13)$$

і задані граничні значення $\Phi^{\pm}(x_1, t)$ цих функцій на основах $x_3 = \pm h$ панелі. Рівняння для визначення інтегральних характеристик $\Phi_s(x_1, t)$ отримуємо множенням рівнянь (1) і (9) на x_3^{s-1} та їх інтегруванням по змінній x_3 з врахуванням формул (12) і (13).

Система рівнянь на інтегральні характеристики $H_{2s}(x_1, t)$ ($s=1, 2$) функції $H_2(x_1, x_3, t)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) H_{21} - 3H_{22} &= \frac{3}{2}(H_2^+ + H_2^-); \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) H_{22} - 15H_{21} &= \frac{15}{2}(H_2^+ - H_2^-). \end{aligned} \quad (14)$$

Відповідно система рівнянь на інтегральні характеристики $T_s(x_1, t)$, ($s=1, 2$) температури $T(x_1, x_3, t)$ записується:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial Fo} \right) T_1 - 3T_1 &= -W_1 - \frac{3}{2}(T_c^+ + T_c^-); \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial Fo} \right) T_2 - 15T_2 &= -W_2 - \frac{15}{2}(T_c^+ - T_c^-). \end{aligned} \quad (15)$$

Тут $W_s = \frac{h^2}{\lambda} \frac{2S-1}{2} \int_{-1}^1 Q x_3^{s-1} dx_3$ ($s=1, 2$) – інтегральні характеристики джерел тепла Джоуля Q .

Отримані системи вихідних рівнянь (14)-(15) для знаходження інтегральних характеристик $\Phi_s(x_1, t)$ ($s=1, 2$) визначальних функцій є системами одновимірних рівнянь за просторовою змінною x_1 . Для знаходження їх розв'язків використовуємо скінченні інтегральні перетворення [8] по змінній x_1 відповідно до заданих на визначальні функції крайових умов на бічних гранях $x_1 = \pm d$ розглядуваної панелі та інтегральне перетворення Лапласа за безрозмірними часовими змінними τ і Fo .

Числовий аналіз температурних режимів мідної панелі за її індукційного нагріву. Розглядаємо індукційний нагрів мідної панелі однорідним квазіусталеним ЕМП. Відповідно значення компоненти вектора напруженості магнітного поля на основах $x_3 = \pm 1$ і торцевих перетинах $x_1 = \pm d$ панелі задаються виразами:

$$H_2(x_1, \pm 1, \tau) = H_0 \varphi(\tau) e^{ib\tau}; \quad H_2(\pm d, x_3, \tau) = H_0 \varphi(\tau) e^{ib\tau}. \quad (16)$$

При цьому граничні умови узгодження значень функцій $H_2^{\pm(0)}(x_1, \tau)$ і $H_2^{\pm(0)*}(x_3, \tau)$ та умови спряження значень функцій $\Psi(x_1, \tau)$ і $\sigma_{13}(x_1, \tau)\sigma_{13}$ у кутових точках поперечного перерізу панелі виконуються тотожно.

У виразах (16) функція $\varphi(\tau)$ має вигляд $\varphi(\tau) = 1 - e^{\beta\tau}$, де $i = \sqrt{-1}$; $b = 1/(2\delta_0^2)$; $\delta_0 = (2\omega\sigma\mu h^2)^{-1/2}$ – параметр, що визначає відносно до півтовщини панелі h глибину проникання індукційних струмів частоти ω ; $\beta = \ln\varepsilon / \tau_*$; τ_* – безрозмірний час, що відповідає виходу електромагнітних коливань частоти ω на усталений режим з амплітудою H_0 ; $\varepsilon = 0.001$.

Дослідження здійснено для мідної електропровідної панелі товщиною $2h = 2\text{ mm}$ і шириною $2d_* = 20\text{ mm}$, тобто $d = 10$.

Проведено чисельні експерименти для індукційного нагріву мідної панелі квазіусталеним ЕМП для двох значень параметра δ_0 : $\delta_0 = 0.1$ (приповерхневий індукційний нагрів) та $\delta_0 = 10$ (суцільний індукційний нагрів). Обчислення проведено у характерних точках $M_1(0.25d, 0.25)$, $M_2(0.5d, 0.5)$, $M_3(0.9d, 0.9)$ поперечного перерізу панелі. Кругова частота електромагнітних коливань у першому випадку $\omega_1 = 6.7 \cdot 10^5\text{ 1/s}$ відповідає радіочастотному діапазону, а у другому випадку частота $\omega_2 = 6.7 \cdot 10^3\text{ 1/s}$ відповідає діапазону промислових частот для суцільного індукційного нагріву електропровідних елементів.

Результати обчислень представлені на рис. 1–4 при значенні критерію Біо $Bi = 1$. На рис. 1, 2 приведено залежності температури від безрозмірного часу Fo . Рис. 1 відповідає значенню параметра $\delta_0 = 0.1$, а рис. 2 – значенню параметра $\delta_0 = 10$.

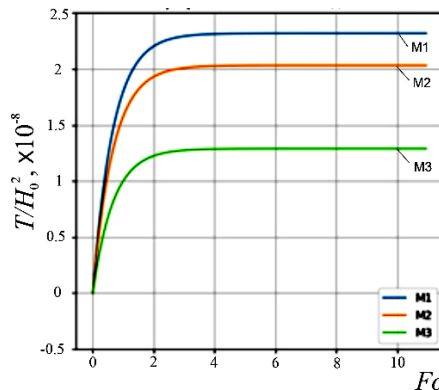


Рис. 1. Залежність температури від безрозмірного часу Fo у характерних точках поперечного перерізу мідної панелі у випадку приповерхневого індукційного нагріву (параметр $\delta_0 = 0.1$)

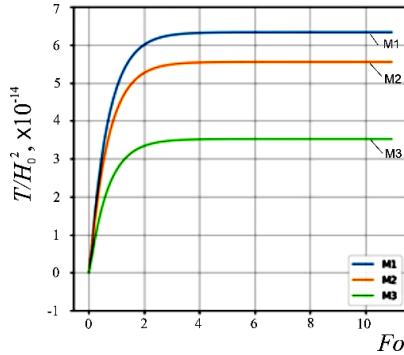


Рис. 2. Залежність температури від безрозмірного часу Fo у характерних точках поперечного перерізу мідної панелі у випадку суцільного індукційного нагріву (параметр $\delta_0 = 10$)

На основі аналізу залежностей, приведених на рис. 1 і рис. 2, встановлено, що вихід температури на усталений режим індукційного нагріву розглядуваної мідної панелі (досягнення максимальних значень температури) за значення критерію Біо $Bi = 1$ відбувається у випадку приповерхневого і суцільного нагріву в моменти безрозмірного часу $Fo \geq 4$.

Виявлено, що зі зменшенням значення критерію Біо на порядок величини час виходу температури на усталений режим індукційного нагріву збільшується на порядок. Зокрема, при значенні $Bi = 0.001$ залежності температури у характерних точках поперечного перерізу панелі практично співпадають. Це означає, що при $Bi = 0.001$ при обох режимах індукційного нагріву зміна температури по поперечному перерізу панелі відбувається в умовах теплоізоляції її основ і бічних граней.

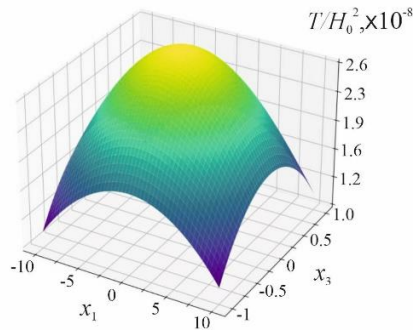


Рис. 3. Розподіл температури T / H_0^2 по площі поперечного перерізу мідної панелі в моменті часу $Fo = 4$ при $\delta_0 = 0.1$ (приповерхневий індукційний нагрів)

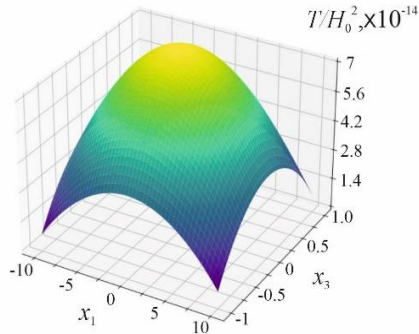


Рис. 4. Розподіл температури T / H_0^2 по площі поперечного перерізу мідної панелі в момент часу $Fo = 4$ при $\delta_0 = 10$ (суцільний індукційний нагрів)

Розподіл температури T / H_0^2 по площі поперечного перерізу мідної панелі в момент часу $Fo \geq 4$ при $\delta_0 = 0.1$ зображено 3d-графіком на рис. 3, а в момент часу $Fo \geq 4$ при $\delta_0 = 10$ – 3d-графіком на рис. 4.

На основі аналізу 3d-графіків, поданих на рис. 3, 4 встановлено, що в усталеному режимі розподіл температури T / H_0^2 по площі поперечного перерізу мідної панелі має однаковий якісний характер в обох розглянутих випадках індукційного нагріву і суттєво залежить при фіксованому значенні критерію Біо від параметра, що характеризує відносну до півтовщини панелі глибину проникання індукційних струмів.

Висновки. З використанням кубічних поліномів для апроксимації розподілів компоненти вектора напруженості магнітного поля і температури по товщинній координаті панелі прямокутного поперечного перерізу вихідні двовимірні початково-крайові задачі стосовно цих визначальних функцій зведено до одновимірних початково-крайових задач на їх інтегральні характеристики.

Для знаходження інтегральних характеристик використано скінченне інтегральне перетворення по поперечній координаті, а також інтегральні перетворення Лапласа за часовими змінними.

Запропонована методика знаходження визначальних функцій дає змогу суттєво спростити аналітичні розв'язки сформульованих двовимірних початково-крайових задач для їх комп'ютерного аналізу.

Виявлені закономірності зміни в часі та розподілу температури по поперечному перерізу мідної панелі мають важливе теоретичне і прикладне значення для прогнозування температурних режимів мідних пластинчастих елементів при їх технологічній термообробці з допомогою індукційного нагріву квазіусталеним ЕМП.

Список використаних джерел:

1. Holman J. P. Heat Transfer. New York: Mc Graw Hill, 2009.
2. Lupi S. Fundamentals of Electroheat, Electrical Technologies for Process Heating. Cham: Springer, 2017. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-46015-4>.
3. Bobart G. F. Induction heating. *Access Science*. 2020. URL: <https://www.accessscience.com/content/article/a341500>.
4. Rudnev V., Loveless D., Cook R. Handbook of Induction Heating. London: CRC Press, 2018.
5. Musii R., Pukach P., Kohut I., Vovk M., Šlahor, L. Determination and Analysis of Joule's Heat and Temperature in an Electrically Conductive Plate Element Subject to Short-Term Induction Heating by a Non-Stationary Electromagnetic Field. *Energies*. 2022. Vol. 15. Art. 5250.
6. Musii R., Pukach P., Melnyk N., Vovk M., Šlahor L. Modeling of the Temperature Regimes in a Layered Bimetallic Plate under Short-Term Induction Heating. *Energies*. 2023. Vol. 16. Art. 4980. URL: <https://doi.org/10.3390/en16134980>.
7. Мусій Р., Клапчук М., Пелех Р., М'яус О. Визначення двовимірних нестационарних температурних полів у плитах та панелях з плоскопаралельними межами за наявності джерел тепла. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2023. Вип. 23. С. 91-100.
8. Galitsyn A. S., Zhukovsky A. N. Integral transformations and special functions in heat conduction problems. Kyiv: Nauk. Dumka, 1976. 283 p.

ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY TEMPERATURE FIELDS IN A COPPER PANEL DURING ITS INDUCTION HEATING

An electroconductive panel of rectangular cross-section is considered, which is inductively heated by a quasi-steady electromagnetic field. As a result, unsteady volumetrically distributed Joule heat sources appear in the panel. These sources create a non-stationary two-dimensional temperature distribution across the panel cross-section. The conditions of convective heat exchange with the external environment are fulfilled at the bases and side faces of the panel. A non-stationary two-dimensional heat conduction problem is formulated to determine the temperature field in the panel. The solution to the problem is constructed using the approximation of the temperature distribution along the thickness coordinate of the panel by a cubic polynomial. The coefficients of the approximation polynomial are represented by the temperature characteristics integral along the thickness coordinate and the conditions for the temperature boundary values at the bases and side faces of the panel. As a result, the original two-dimensional initial-boundary value problems on temperature are reduced to one-dimensional initial-boundary value problems on the integral temperature characteristics.

The solution to the problems on the integral temperature characteristics was found using the Laplace integral transform in time and the finite integral transform in the transverse coordinate of the panel. It is obtained in the form of convolutions of functions corresponding to homogeneous solutions of initial-boundary value problems for the integral temperature characteristics and functions describing the available unsteady Joule heat sources and surface temperature values.

The temperature regimes of a copper panel during its induction heating by a homogeneous quasi-steady electromagnetic field are analyzed numerically. Two characteristic modes of near-surface and continuous induction heating of the panel are considered. The results of calculations of temperature distributions depending on the parameters of induction heating and heat transfer conditions are presented in the form of 2D and 3D graphs.

Key words: *electroconductive panel, induction heating, quasi-steady-state electromagnetic field, near-surface and continuous heating modes, unsteady temperature field.*

Отримано: 28.05.2025

UDC 519.21

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-27.29-38

Serhii Nechyporuk, PhD Student

National University of «Ostroh Academy», Ostroh

APPROXIMATE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION FOR A TWO-THRESHOLD LÉVY PROCESS: CONVERGENCE ASSESSMENT AND DATA APPLICATIONS

This paper presents an approach to modelling complex dynamical systems using a two-threshold Lévy process, which allows for changes in process properties when crossing critical values. The proposed model combines three key components – drift, diffusion, and jump – which together enable the description of both smooth and abrupt changes in system behaviour. An important feature is the division of the process into three regimes, which enables separate parameter estimation in each the ranges. This approach enhances the flexibility of the model and makes it suitable for analysing processes with complex hierarchical dynamics. To estimate the model parameters, an algorithm based on Approximate Maximum Likelihood Estimation (AMLE) was developed. It is implemented as an iterative procedure, which refines the parameters at each step with respect to the current threshold values and continues calculations until convergence is achieved. The algorithm enables estimation of drift parameters, diffusion coefficients and jump components, as well as the identification of the optimal thresholds. Within the study, a methodology for parameter estimation across three regimes was developed, an iterative algorithm was constructed, and its software implementation was created. The algorithm was tested on a synthetically generated dataset, which made it possible to evaluate the accuracy of parameter recovery and to examine its robustness to variations in initial conditions. Particular attention was devoted to convergence analysis: numerical experiments demonstrated that, at each step of the iterative procedure, the parameter update function reduces the differences be-