

УДК 004.45:004:942

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-27.75-83

О. В. Славiк, канд. фіз.-мат. наук

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків,
ННІ «Українська інженерно-педагогічна академія»

Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, м. Харків

ОГЛЯД МЕТОДІВ ІНТЕРСТРІПАЦІЇ У ФОРМІ ЛАГРАНЖА НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

У статті представлено огляд сучасних підходів до побудови та дослідження нових інформаційних операторів О. М. Литвина для функцій, інформація про які відома лише на певній системі смуг та особливості їх застосування для неперервних функцій двох змінних. Для апроксимації значень двовимірних неперервних функцій наведено інформаційні оператори поліноміальної інтерстріпації у формі Лагранжа для функцій, інформація про які відома на певній системі смуг спеціального виду. Такі проблеми часто виникають під час обробки даних дистанційного зондування планети, аеророзвідки тощо. У цій роботі представлено основні поняття сліду функції на смузі, сліду функції на прямій. На основі цих визначень наведено оператори інтерстріпації для смуг, межі яких паралельні координатним осям. Розглянуто поліноміальні оператори інтерстріпації Лагранжа для апроксимації значень між неперетинними смугами, межі яких паралельні одна одній та паралельні осі Ox , поліноміальні оператори інтерстріпації Лагранжа для апроксимації значень між неперетинними смугами, межі яких паралельні осі Oy , та поліноміальні оператори інтерстріпації Лагранжа для апроксимації значень між перетинними смугами, межі яких паралельні осям координат. Проведено серію обчислювальних експериментів для відновлення значень функції між різними системами смуг, за допомогою запропонованих інформаційних операторів інтерстріпації у формі Лагранжа. Оператори інтерстріпації, як і інші інформаційні оператори О. М. Литвина, використовуються в різних галузях науки і техніки. Оператори інтерстріпації можуть бути використані при обробці даних дистанційного зондування планети, аеророзвідки, радіолокаційної локації за допомогою радарів бокового огляду тощо. Крім того, у подальших дослідженнях, пов'язаних з інформаційними операторами інтерстріпації, перспективним напрямком є їх застосування в різних алгоритмах обробки зображень.

Ключові слова: *чисельні методи, математичне моделювання, інформаційні оператори, інтерлінація, інтерстріпація.*

Вступ. Останні дослідження та публікації в галузі інформаційних операторів, зокрема інтерлінації та класичних методів інтерполя-

ції, демонструють значний прогрес у теоретичних та прикладних аспектах. Ці методи знаходять широке застосування в різноманітних задачах, від геометричного моделювання до фінансового аналізу.

Класичні методи інтерполяції, такі як поліноміальна інтерполяція Лагранжа та Ньютона, сплайни та інші, продовжують активно застосовуватися в чисельному моделюванні. Наприклад, у задачах геометричного моделювання та інженерії використовуються різноманітні методи інтерполяції для побудови поверхонь та кривих.

Відносно новим напрямком у інформаційних операторах є інформаційні оператори, що були запропоновані О. М. Литвиним [1]. Запропоновані інформаційні оператори дозволяють використовувати інформацію про об'єкт дослідження не тільки на системі точок, а і на лініях, локусах, смугах та площинах. Такі інформаційні оператори застосовуються для широкого класу прикладних задач у різноманітних галузях науки та техніки.

Так, наприклад, інтерлінація неперервних функцій двох змінних (від англ. *inter* – між, *line* – лінія) дозволяє наближувати значення функції, інформація про яку відома лише на деякій системі ліній [2]. Такі задачі часто виникають на практиці при дослідженні морського дна засобами ехолокації.

Інтерфлєтація функцій трьох змінних (від англ. *inter* – між, *flat* – площа) дозволяє наближувати значення функції, інформація про яку є відома лише на системі площин [3]. Такого роду задачі виникають при обробці даних комп'ютерної томографії у медицині або у сейсмічній томографії при розвідці корисних копалин.

Окрім того, інформаційні оператори О. М. Литвина також використовуються і у інших чисельних методах, зокрема у чисельному інтегруванні [4]. Тому розробка та дослідження інформаційних операторів для наближення значень функції за неповною інформацією про неї є актуальною задачею.

Метою даної роботи є побудова інформаційних операторів інтерстріпації, які відновлюють (можливо наближено) функцію у точках області, значення в яких є невідомими, використовуючи наявну інформацію про функцію на смугах, де функція задана точно.

Постановка задачі. Нехай $f(x, y)$ – функція двох змінних, що задана на деякій прямокутній області $D = [a, b] \times [c, d]$, яка називається областю інтерстріпації. Припустимо, що значення цієї функції відомі точно на деякій системі смуг:

$$\Omega_k = \{(x, y) : \alpha_k \leq \omega_k(x, y) \leq \beta_k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що границі смуг є прямими, що паралельні осям координат. В такому випадку систему смуг можна записати у спрощеному вигляді, якщо границі смуг паралельні між собою та паралельні осі Oy :

$$\Omega_{x,k} = \{(x, y) : a_k \leq x \leq b_k\}, \quad k = \overline{1, n},$$

або, якщо границі смуг паралельні між собою та паралельні осі Ox :

$$\Omega_{y,p} = \{(x, y) : c_p \leq y \leq d_p\}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Введемо до розгляду наступні послідовності значень, які містять координати границь області інтерстріпації та границь смуг вигляду:

$$\{x_k\}_{k=1}^{2n} : a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n,$$

$$\{y_p\}_{p=1}^{2m} : c_1 < d_1 \leq c_2 < d_2 \leq \dots \leq c_{m-1} < d_{m-1} \leq c_m < d_m.$$

Отже, у точках із області D , які не належать жодній із наведених вище смуг $\Omega_{x,k}$ або $\Omega_{y,p}$, інформація про функцію є невідомою. Позначимо такі області через:

$$\bar{\Omega}_{x,k,k+1} = \{(x, y) : b_k < x < a_{k+1}\}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$\bar{\Omega}_{y,p,p+1} = \{(x, y) : d_p < y < c_{p+1}\}, \quad p = \overline{1, m-1}.$$

Інформаційні оператори інтерстріпації Лагранжа. Введемо поняття сліду функції на смугі та на лінії.

Слідом функції $f(x, y)$ на смугі Ω називається функція двох змінних $f(x, y)|_{\Omega}$, яка в кожній точці цієї смуги приймає такі ж значення, як і функція $f(x, y)$.

Слідом функції $f(x, y)$ на лінії Γ називається функція однієї змінної $f(x)|_{\Gamma}$ або $f(y)|_{\Gamma}$, яка в кожній точці цієї лінії приймає такі ж значення, як і функція $f(x, y)$.

Інтерстріпацією неперервної функції двох змінних $f(x, y)$ (від англ. *inter* – між, *stripe* – лінія) на системі смуг Ω_k , $k \in \mathbb{N}$ називається її відновлення за допомогою її слідів на смугах $f(x, y)|_{\Omega_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Загальний вигляд оператора інтерстріпації, який на кожній смугі повертає значення функції у вигляді сліду функції на смугі, а між смугами наближує функцію за відомою інформацією про неї на системі смуг, має вигляд [5]:

$$Of(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega_{x,k} \cup \Omega_{y,p}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m}, \\ Lf(x, y), & (x, y) \notin \Omega_{x,k} \cup \Omega_{y,p}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Припустимо, що інформація про функцію відома лише на системі смуг, границі яких паралельні між собою та паралельні осі Oy . Для наближення значень функції між смугами $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1, n}$, границі яких паралельні між собою, паралельні осі Ox і можуть бути предста-

влені у вигляді послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{2n}$, пропонується використовувати оператор інтерстріпації у формі Лагранжа вигляду:

$$Lf(x, y) = \sum_{k=1}^{2n} f(x, y)|_{x=x_k} \prod_{i=1, i \neq k}^{2n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \sum_{k=1}^{2n} f(x_k, y) \prod_{i=1, i \neq k}^{2n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Властивості оператора інтерстріпації для наближення значень функції між смугами $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1, n}$:

$$Of(x, y)|_{\Omega_{x,k}} = f(x, y)|_{\Omega_{x,k}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

У випадку якщо $b_k = a_{k+1}$, $k = \overline{1, n-1}$, то оператор інтерстріпації буде точно наближувати функцію по заданим слідам функції на кожній смузі $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1, n}$.

Для наближення значень функції між смугами $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, m}$, границі яких паралельні між собою, паралельні осі Ox і можуть бути представлені у вигляді послідовності $\{y_p\}_{p=1}^{2m}$, пропонується використовувати оператор інтерстріпації у формі Лагранжа вигляду:

$$Lf(x, y) = \sum_{p=1}^{2m} f(x, y)|_{y=y_p} \prod_{j=1, j \neq p}^{2m} \frac{y - y_j}{y_p - y_j} = \sum_{p=1}^{2m} f(x, y_p) \prod_{j=1, j \neq p}^{2m} \frac{y - y_j}{y_p - y_j}.$$

Властивості оператора інтерстріпації для наближення значень функції між смугами $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, m}$:

$$Of(x, y)|_{\Omega_{y,p}} = f(x, y)|_{\Omega_{y,p}}, \quad p = \overline{1, m}.$$

У випадку якщо $d_p = c_{p+1}$, $p = \overline{1, m-1}$, то оператор інтерстріпації буде точно наближувати функцію по заданим слідам функції на кожній смузі $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, m}$.

Найбільш загальним випадком є випадок, коли інформація про функцію відома на системі смуг, границі яких є взаємно перпендикулярними між собою. Тобто відомими є сліди функції на смугах $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1, n}$, границі яких паралельні осі Oy , та на смугах $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, m}$, границі яких паралельні осі Ox . Об'єднання інформації з усіх смуг утворює систему перетинних смуг із прямокутними областями, де інформація про функцію є невідомою:

$$\bar{\Omega}_{k,k+1,p,p+1} = \{(x, y) : (x, y) \in (b_k, a_{k+1}) \times (d_p, c_{p+1})\}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad p = \overline{1, m-1}.$$

Для наближення значень функції такій системі смуг пропонується використовувати оператор інтерстріпації у формі Лагранжа вигляду:

$$Lf(x, y) = \sum_{k=1}^{2n} f(x_k, y) \prod_{i=1, i \neq k}^{2n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} + \sum_{p=1}^{2m} f(x, y_p) \prod_{j=1, j \neq p}^{2m} \frac{y - y_j}{y_p - y_j} - \sum_{k=1}^{2n} \sum_{p=1}^{2m} f(x_k, y_p) \prod_{i=1, i \neq k}^{2n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \prod_{j=1, j \neq p}^{2m} \frac{y - y_j}{y_p - y_j}.$$

Властивості оператора інтерстріпації для наближення значень функції на системі смуг, границі яких взаємно перпендикулярні та паралельні осям координат:

$$Of(x, y)|_{\Omega_{x,k}} = f(x, y)|_{\Omega_{x,k}}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$Of(x, y)|_{\Omega_{y,p}} = f(x, y)|_{\Omega_{y,p}}, \quad p = \overline{1, m}.$$

У випадку якщо $b_k = a_{k+1}$, $k = \overline{1, n-1}$ та $d_p = c_{p+1}$, $p = \overline{1, m-1}$, то оператор інтерстріпації буде точно наближувати функцію по заданим слідам функції на кожній смузі $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1, n}$, $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, m}$.

Приклад наближення значень функції двох змінних інформаційними операторами інтерстріпації Лагранжа. Розглянемо область інтерстріпації $D = [-3, 3] \times [-3, 3]$. Припустимо, що інформація про функцію $f(x, y) = x^2 + y^2$ відома нам лише на трьох смугах із границями:

$$\Omega_{x,1} = \{(x, y) : -2.5 \leq x \leq -1.5\},$$

$$\Omega_{x,2} = \{(x, y) : -0.5 \leq x \leq 0.5\},$$

$$\Omega_{x,3} = \{(x, y) : 1.5 \leq x \leq 2.5\}.$$

Тестові дані для інтерстріпації (сліди функції на кожній із смуг) утворюються за допомогою тестової функції. Інформація між смугами вважається невідомою. Графічне зображення тестових даних наведено на рис. 1.

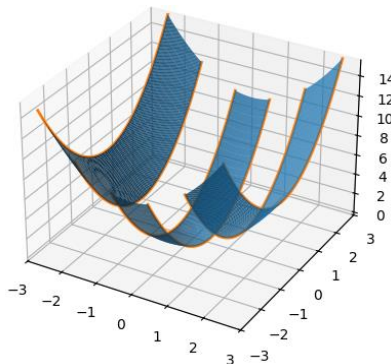


Рис. 1. Сліди функції на неперетинних смугах, із границями, що паралельні осі Oy

Використовуючи наведений вище оператор інтерстріпації для наближення значень функції між смугами $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1,3}$, границі яких паралельні між собою та паралельні осі Оу, було отримано аналітичний вираз для оператора засобами мови програмування Python із використанням бібліотеки SymPy. Після зведення подібних доданків аналітичний вигляд інтерстріпанту набуває вигляду:

$$Lf(x, y) = x^2 + y^2.$$

Отже, наведений оператор інтерстріпації у формі Лагранжа наближує функцію $f(x, y) = x^2 + y^2$ точно по слідах функції на заданій системі смуг $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1,3}$, границі яких паралельні між собою та паралельні осі Оу.

Припустимо, що інформація про функцію $f(x, y) = x^2 + y^2$ відома нам лише на трьох смугах із границями:

$$\Omega_{y,1} = \{(x, y) : -2.5 \leq y \leq -1.5\},$$

$$\Omega_{y,2} = \{(x, y) : -0.5 \leq y \leq 0.5\},$$

$$\Omega_{y,3} = \{(x, y) : 1.5 \leq y \leq 2.5\}.$$

Тестові дані для інтерстріпації (сліди функції на кожній із смуг) утворюються за допомогою тестової функції. Інформація між смугами вважається невідомою. Графічне зображення тестових даних наведено на рис. 2.

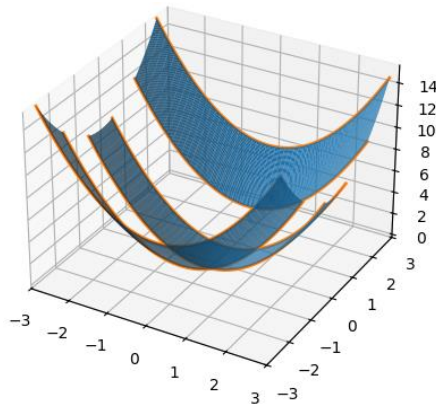


Рис. 2. Сліди функції на неперетинних смугах, із границями, що паралельні осі Ох

Використовуючи наведений вище оператор інтерстріпації для наближення значень функції між смугами $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1,3}$, границі

яких паралельні між собою та паралельні осі Ox , було отримано аналітичний вираз для оператора засобами мови програмування Python із використанням бібліотеки SymPy. Після зведення подібних доданків аналітичний вигляд інтерстріпанту набуває вигляду:

$$Lf(x, y) = x^2 + y^2.$$

Отже, наведений оператор інтерстріпації у формі Лагранжа наближує функцію $f(x, y) = x^2 + y^2$ точно по слідам функції на заданій системі смуг $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1, 3}$, границі яких паралельні між собою та паралельні осі Ox .

Припустимо, що інформація про функцію $f(x, y) = x^2 + y^2$ відома нам лише на смугах із границями:

$$\Omega_{x,1} = \{(x, y) : -2.5 \leq x \leq -1.5\},$$

$$\Omega_{x,2} = \{(x, y) : -0.5 \leq x \leq 0.5\},$$

$$\Omega_{x,3} = \{(x, y) : 1.5 \leq x \leq 2.5\},$$

$$\Omega_{y,1} = \{(x, y) : -2.5 \leq y \leq -1.5\},$$

$$\Omega_{y,2} = \{(x, y) : -0.5 \leq y \leq 0.5\},$$

$$\Omega_{y,3} = \{(x, y) : 1.5 \leq y \leq 2.5\}.$$

Тестові дані для інтерстріпації (сліди функції на кожній із смуг) утворюються за допомогою тестової функції. Об'єднання інформації з усіх смуг утворює систему перетинних смуг із прямокутними областями, де інформація про функцію є невідомою. Графічне зображення тестових даних наведено на рис. 3.

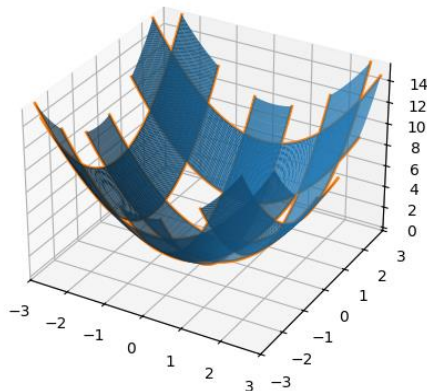


Рис. 3. Сліди функції на перетинних смугах, із границями, що паралельні осям координат

Використовуючи наведений вище оператор інтерстріпації для наближення значень функції за відомою інформацією про неї на смугах $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1,3}$, границі яких паралельні осі Оу, та на смугах $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1,3}$, границі яких паралельні осі Ох, було отримано аналітичний вираз для оператора засобами мови програмування Python із використанням бібліотеки SymPy.

Після зведення подібних доданків аналітичний вигляд інтерстріпantu набуває вигляду:

$$Lf(x, y) = x^2 + y^2.$$

Отже, наведений оператор інтерстріпації у формі Лагранжа наближує функцію $f(x, y) = x^2 + y^2$ точно по слідам функції на заданій системі смуг $\Omega_{x,k}$, $k = \overline{1,3}$ та $\Omega_{y,p}$, $p = \overline{1,3}$, границі яких взаємно перпендикулярні між собою та паралельні осям координат.

Висновки. Інформаційні оператори О. М. Литвина застосовуються у різних сферах науки та техніки. В цій роботі було проведено огляд інформаційних операторів інтерстріпації наближення значень неперервних функцій двох змінних за відомою інформацією про неї на слідах функції на деякій системі смуг. Наведені оператори поліноміальної інтерстріпації дають змогу отримати точні значення функції на відомих ділянках смуг, а між смугами наближено за допомогою відомої інформації про функцію на смугах, побудованих у формі Лагранжа. На відміну від операторів інтерлінації, які дають змогу відновлювати значення функції по відомих слідах функції на лініях, оператори інтерстріпації дають змогу відновлювати значення функції по відомих слідах функції на смугах, гарантуючи при цьому, що інформація на смугах буде відповідати точним значенням функції (слідам функції на відповідній смузі).

Оператори інтерстріпації можуть бути застосовані у обробці даних дистанційного зондування планети, аеророзвідки, радіолокації радарми бокового огляду тощо. Окрім того в подальших дослідженнях, пов'язаних із інформаційними операторами інтерстріпації перспективним напрямком є їх застосування в різноманітних алгоритмах обробки зображень.

Список використаних джерел:

1. Сергієнко І. В., Литвин О. М. Нові інформаційні оператори в математичному моделюванні: монографія. Київ: Наукова думка, 2018. 444 с.
2. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування: монографія. Харків: Основа, 2002. 544 с.

3. Сергієнко І. В., Литвин О. М., Першина Ю. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетатії функцій: монографія. Харків: ХНУРЕ, 2008. 160 с.
4. Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації функцій: монографія. Харків: УПА, 2009. 136 с.
5. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Slavik O. V. Generalized Interstripation of Functions of Two Variables. *Cybernetics and System Analysis*. 2018. Vol. 54. № 3. P. 465-475.

REVIEW OF INTERSTRIPATION METHODS IN THE LAGRANGE FORM FOR APPROXIMATING CONTINUOUS FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

The article presents a review of modern approaches to the construction and study of new information operators. For functions, information about which is known only on a certain system of strips, examples of information operators of interstripation are given for approximating the values of continuous functions of two variables.

This work is devoted to information operators of polynomial interstripation in the Lagrange form for approximating the values of two-dimensional continuous functions, information about which is known on a certain system of strips of a special form. Such problems often arise when processing data from remote sensing of the planet, aerial reconnaissance, etc. This paper presents the basic concepts of the trace of a function on a strip, the trace of a function on a line. Based on these definitions, interstripation operators are given for strips, the boundaries of which are parallel to the coordinate axes. The polynomial Lagrange interstripation operators for approximating values between non-intersecting strips whose boundaries are parallel to each other and parallel to the Ox axis, the polynomial Lagrange interstripation operators for approximating values between non-intersecting strips whose boundaries are parallel to the Oy axis, and the polynomial Lagrange interstripation operators for approximating values between intersecting strips whose boundaries are parallel to the coordinate axes are considered. A series of computational experiments were conducted to restore the values of the function between different systems of strips proposed by the interstripation operators in the Lagrange form.

Information operators are used in various fields of science and technology. Interstripation operators can be used in processing data of remote sensing of the planet, aerial reconnaissance, radar location by side-scan radars, etc. In addition, in further research related to information interstripation operators, a promising direction is their application in various image processing algorithms.

Key words: *numerical methods, mathematical modeling, information operators, interlination, interstripation.*

Отримано: 30.05.2025