

УДК 519.624.2:517.988

DOI: 10.32626/2308-5878.2025-27.39-52

В. Г. Пархоменко,

М. В. Сидоров, д-р фіз.-мат. наук, професор

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ДОДАТНИХ АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ СИНГУЛЯРНИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

У роботі розглядається знаходження додатних аксіально-симетричних розв'язків крайових задач для нелінійних еліптичних диференціальних рівнянь методом двобічних наближень.

Розв'язується перша крайова задача, або задача Діріхле. Нелінійність за характером у даному випадку є антимонотонною: вона описується степеневою залежністю з показником від -1 до 0 . Після переходу до полярної системи координат у крайовій задачі для еліптичного рівняння за рахунок аксіальної симетрії розв'язку розглядувана задача зводиться до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння на відрізку. Розв'язок залежить тільки від полярного радіуса, тобто залежність від кута повороту зникає. У такому випадку полюс полярної системи координат стає особливою точкою, в якій виникає необхідність поставити для розв'язку умову обмеженості.

Для крайової задачі знаходиться функція Гріна, після чого задача зводиться до інтегрального рівняння Гаммерштейна. Це інтегральне рівняння розглядається як нелінійне операторне рівняння в банаховому просторі неперервних на відрізку функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних на цьому відрізку функцій. Проводиться дослідження оператора на наявність таких властивостей, як антимонотонність (антитонність), додатність, обмеженість і псевдоувітність.

Наступним етапом є знаходження початкового наближення як кінців сильно інваріантного конусного відрізка для антитонного оператора так, щоб забезпечити найвищу швидкість збіжності ітераційного процесу. Далі будуються дві ітераційні послідовності двобічних наближень. Перша послідовність не спадає за конусом, друга послідовність не зростає за конусом. За наближення на кожній ітерації обирається середнє арифметичне верхнього і нижнього наближень. Ітераційний процес продовжується доти, поки оцінка похибки розв'язку не задовольнить заданій точності.

Теоретичні результати, які були отримані в роботі, було перевірено шляхом обчислювального експерименту. Проаналізовано залежність розв'язку і швидкість збіжності ітераційного процесу від параметрів у правій частині, що проілюстровано відповідними графіками.

Ключові слова: аксіально-симетричний додатний розв'язок, антимонотонний оператор, сильно інваріантний конусний відрізок, метод двобічних наближень, крайова задача для нелінійного еліптичного рівняння, функція Гріна, інтегральне рівняння Гаммерштейна.

Вступ. При математичному моделювання різноманітних механічних і природних процесів, як наприклад, процесів нелінійної теплопровідності [1], виникає необхідність знаходження розв'язків крайових задач для нелінійного еліптичного рівняння вигляду

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Особливий інтерес становить випадок, коли область Ω є кругом радіуса R у просторі $\mathbb{R}^2$. Тоді ставиться задача знаходження аксіально-симетричного розв'язку рівняння, тобто залежного лише від $\rho = |\mathbf{x}|$, де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Таким чином, вихідна задача зведеться до крайової задачі для нелінійного звичайного диференціального рівняння.

Клас задач для нелінійних диференціальних рівнянь, у яких можливо знайти точний розв'язок, дуже обмежений, тому такі задачі розв'язують засобами чисельних методів, як наприклад, сітковими, варіаційними та ітераційними. Окремої уваги заслуговують ітераційні методи через свою зручність з точки зору обчислювальної реалізації. Також є корисною їхня властивість самовиправності. Серед ітераційних методів особливо виділяються методи двобічних наближень, оскільки вони є як універсальним інструментом дослідження існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, так і надають можливість фактичного їх знаходження. Окрім того, двобічні наближення дозволяють одержати верхню та нижню оцінку розв'язку на кожному кроці, а отже, отримати зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Теоретичним підґрунтям двобічних ітераційних методів є теорія нелінійних операторів у напівупорядкованих банахових просторах. Ці методи були застосовані до нелінійних диференціальних рівнянь у роботах [3, 10, 11]. У тому числі мало місце знаходження аксіально-симетричних розв'язків, але розглядався випадок монотонної степеневі нелінійності, який є окремим випадком, а отже аналогічні задачі для двовимірного простору потребують досліджень.

Таким чином, наукова задача вдосконалення існуючих методів двобічних наближень у застосування їх до задачі знаходження додатних аксіально-симетричних розв'язків нелінійних еліптичних рівнянь зі степеневою сингулярною нелінійністю є актуальною.

Дана стаття продовжує дослідження, розпочаті в роботах [2-6, 9-12], в частині їх перенесення на двовимірний випадок і розглядання випадку антимонотонної нелінійності.

1. Постановка задачі. Розглянемо у крузі $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < R\}$ рівняння нелінійної стаціонарної теплопровідності

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

з першим типом крайових умов

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Типовим випадком залежності функції щільності теплових джерел від температури є степенева залежність вигляду $f(\mathbf{x}, u) = \mu u^{-q}$, де $0 < q < 1$, $\mu > 0$.

Поставимо задачу знаходження додатного аксіально-симетричного (тобто залежного лише від $\rho = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) розв'язку крайової задачі (1), (2) і з правою частиною вигляду $f(\mathbf{x}, u) = \mu u^{-q}$.

2. Основна частина. Розв'яжемо задачу (1), (2) за допомогою методу двобічних наближень, заснованого на використанні методів теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах.

Не обмежуючи загальності, покладемо $R = 1$. Отже, в одиничному крузі

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$$

розглянемо нелінійне еліптичне диференціальне рівняння (1) з правою частиною вигляду $f(\mathbf{x}, u) = \mu u^{-q}$, де $0 < q < 1$, $\mu > 0$.

Перейдемо до полярної системи координат за формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi, \quad \rho \geq 0. \end{aligned}$$

Таким чином, оператор Лапласа набуде вигляду

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

У даному випадку розв'язок крайової задачі є аксіально-симетричним, тому його значення в будь-якій точці області Ω залежить тільки від відстані цієї точки до початку координат. Отже, функція u залежить тільки від змінної $\rho = |\mathbf{x}|$, де $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Тоді рівняння (1) перетворюється на звичайне диференціальне рівняння

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = \mu u^{-q},$$

або

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right)=\mu\rho u^{-q}. \quad (3)$$

Крайова умови (2), задана на крузі $|\mathbf{x}|=1$, зводиться до вигляду

$$u(1)=0.$$

Оскільки точка $\rho=0$ є особливою точкою рівняння (3), для функції $u=u(\rho)$ це призводить до необхідності поставити умову обмеженості при $\rho=0$:

$$|u(0)|<+\infty.$$

Таким чином, крайова задача (1), (2) зводиться до наступної крайової задачі

$$-\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right)=\mu\rho u^{-q}, \quad \rho\in(0,1), \quad (4)$$

$$|u(0)|<+\infty, \quad u(1)=0. \quad (5)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння $-\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right)=0$

має вигляд $u=C_1\ln\rho+C_2$. Умову обмеженості $|u(0)|<+\infty$ буде виконано, якщо обрати $C_1=0$, $C_2=1$, тобто крайову умову при $\rho=0$ задовольнятиме частинний розв'язок $u_1(\rho)=1$. Очевидно, що крайову умову $u(1)=0$ задовольнятиме частинний розв'язок $u_2(\rho)=\ln\rho$. Визначник Вронського для цих функцій дорівнює

$$|W(\rho)|=\begin{vmatrix} u_1(\rho) & u_2(\rho) \\ u_1'(\rho) & u_2'(\rho) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \ln\rho \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}.$$

Отже, функція Гріна розглядуваної крайової задачі має вигляд

$$G(\rho,s)=-\begin{cases} \frac{u_1(\rho)u_2(s)}{s|W(s)|}, & 0\leq\rho\leq s, \\ \frac{u_1(s)u_2(\rho)}{s|W(s)|}, & s<\rho\leq 1, \end{cases}=\begin{cases} \ln\frac{1}{s}, & 0\leq\rho\leq s, \\ \ln\frac{1}{\rho}, & s<\rho\leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

Тоді задача (4), (5) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\rho)=\mu\int_0^1 Q(\rho,s)u^{-q}(s)ds, \quad (7)$$

де $Q(\rho,s)=sG(\rho,s)$.

Означення. Узагальненим розв'язком крайової задачі (4), (5) називається функція $u^* \in C[0,1]$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (7).

У сенсі даного означення розуміється еквівалентність крайової задачі (4), (5) і інтегрального рівняння (7).

Пов'яжемо з рівнянням (7) нелінійний інтегральний оператор, що діє у просторі $C[0,1]$ за таким правилом:

$$T(u)(\rho) = \int_0^1 Q(\rho, s) u^{-q}(s) ds. \quad (8)$$

Таким чином, рівняння (7) можна подати у вигляді $u = \mu T(u)$. Дане рівняння розглядатимемо в банаховому просторі $C[0,1]$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних на $C[0,1]$ функцій [7, 8].

Дослідимо, які властивості має оператор T .

Оскільки $Q(\rho, s) u^{-q}(s) \geq 0$ для всіх $q > 0$ і $\rho, s \in [0,1]$, то $T(u) \geq \theta$ для всіх $u \geq \theta$, а отже, оператор T є додатним (θ – нульовий елемент простору).

Оскільки $u_1^{-q} \leq u_2^{-q}$, якщо $u_1 \geq u_2$ і $q > 0$, та функція $Q(\rho, s)$ є невід'ємною, то для всіх $\rho \in [0,1]$ $\int_0^1 Q(\rho, s) u_1^{-q}(s) ds \leq \int_0^1 Q(\rho, s) u_2^{-q}(s) ds$,

а отже, з нерівності $u_1 \geq u_2$ випливає нерівність $T(u_1) \leq T(u_2)$, тобто оператор T є антитонним.

Для функції Гріна (6) $u_0(\rho) = \int_0^1 Q(\rho, s) ds = \frac{1}{4}(1 - \rho^2)$ і справедлива оцінка

$$\varphi(s) u_0(\rho) \leq Q(\rho, s) \leq \psi(s) u_0(\rho), \quad (9)$$

де, наприклад, $\varphi(s) = \min \left\{ s \ln \frac{1}{s}, 3s^2 \right\}$, $\psi(s) = 2$ – неперервні та невід'ємні для $s \in [0,1]$ функції.

З нерівності (9) випливає, що для будь-якої $u \in C[0,1]$ справедлива нерівність:

$$\alpha u_0(\rho) \leq \int_0^1 Q(\rho, s) u(s) ds \leq \beta u_0(\rho), \quad (10)$$

де $\alpha = \alpha(u) = \int_0^1 \varphi(s) u(s) ds$, $\beta = \beta(u) = \int_0^1 \psi(s) u(s) ds$.

Нерівність (10) говорить про u_0 -обмеженість лінійного оператора $\int_0^1 Q(\rho, s)u(s)ds$.

Дослідимо оператор T вигляду (8) на псевдоувігнутість та u_0 -псевдоувігнутість з функцією $u_0(\rho) = \frac{1}{4}(1 - \rho^2)$.

Для будь-якої $u \in C[0, 1]$ справедлива нерівність

$$\alpha u_0(\rho) \leq \int_0^1 Q(\rho, s)u^{-q}(s)ds \leq \beta u_0(\rho), \quad (11)$$

де $\alpha = \alpha(u) = \int_0^1 \varphi(s)u^{-q}(s)ds$, $\beta = \beta(u) = \int_0^1 \psi(s)u^{-q}(s)ds$, тобто $T(u) \in K(u_0)$.

Нехай $u \in K_+$ таке, що $\alpha_1 u_0 \leq u \leq \beta_1 u_0$ ($\alpha_1 = \alpha_1(u) > 0$, $\beta_1 = \beta_1(u) > 0$). Розглянемо при $\tau \in (0, 1)$ нерівність $T\left(\frac{1}{\tau}u\right) > \tau T(u)$.

Оскільки

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{\tau}u\right) - \tau T(u) &= \tau^q \int_0^1 Q(\rho, s)u^{-q}(s)ds - \tau \int_0^1 Q(\rho, s)u^{-q}(s)ds = \\ &= (\tau^q - \tau) \int_0^1 Q(\rho, s)u^{-q}(s)ds, \end{aligned}$$

то нерівність $T\left(\frac{1}{\tau}u\right) > \tau T(u)$ виконуватиметься, якщо $\tau^q - \tau > 0$, тобто (з урахуванням умови $\tau \in (0, 1)$), якщо $q \in (0, 1)$.

Отже, за умови $q \in (0, 1)$ оператор T є псевдоувігнутим.

Доведемо також u_0 -псевдоувігнутість оператора T за умови $q \in (0, 1)$.

Нехай $u \in K(u_0)$, $\tau \in (0, 1)$ і $q \in (0, 1)$. Тоді з урахуванням нерівності (11)

$$T\left(\frac{1}{\tau}u\right) - \tau T(u) = (\tau^q - \tau) \int_0^1 Q(\rho, s)u^{-q}(s)ds \geq \alpha_1 u_0(\rho),$$

де $\alpha_1 = \alpha_1(u) = (\tau^q - \tau) \int_0^1 \varphi(s)u^{-q}(s)ds > 0$.

Таким чином,

$$T\left(\frac{1}{\tau}u\right) \geq \tau T(u) + \alpha_1 u_0(\rho) = \tau \int_0^1 Q(\rho, s) u^{-q}(s) ds + \alpha_1 u_0(\rho),$$

або (з урахуванням (11))

$$T\left(\frac{1}{\tau}u\right) \geq \tau \int_0^1 Q(\rho, s) u^{-q}(s) ds + \frac{\alpha_1}{\beta} \int_0^1 Q(\rho, s) u^{-q}(s) ds = \tau \left(1 + \frac{\alpha_1}{\beta\tau}\right) T(u),$$

тобто

$$T\left(\frac{1}{\tau}u\right) \geq \tau(1+\eta)T(u),$$

де $\eta = \eta(u, \tau) = \frac{\alpha_1}{\beta\tau} > 0$.

Отже, оператор T вигляду (8) є u_0 -псевдоувігнутим.

Таким чином, справедлива наступна лема.

Лема. Оператор T , що діє за правилом (8), має такі властивості:

- а) є додатним оператором
- б) є антитонним оператором для $q > 0$;
- в) є псевдоувігнутим і навіть u_0 -псевдоувігнутим для $q \in (0, 1)$, де

$$u_0(\rho) = \frac{1}{4}(1 - \rho^2).$$

Оскільки оператор T перетворює конус K_+ в $K(u_0)$, то кінці інваріантного конусного відрізка $\langle v_0, w_0 \rangle$ шукатимемо у вигляді

$$v_0 = \alpha u_0, \quad w_0 = \beta u_0.$$

Тут $K(u_0)$ – множина тих елементів $u \in K_+$, для яких можна вказати такі $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, що $\alpha u_0 \leq u \leq \beta u_0$.

Тоді умови $\mu T(w_0) \geq v_0$, $\mu T(v_0) \leq w_0$, що визначають кінці сильно інваріантного конусного відрізка, приводять до наступних нерівностей для визначення сталих α і β ($0 < \alpha < \beta$):

$$\mu \beta^{-q} \int_0^1 Q(\rho, s) u_0^{-q}(s) ds \geq \alpha u_0(\rho) \quad \text{для всіх } \rho \in [0, 1], \quad (12)$$

$$\mu \alpha^{-q} \int_0^1 Q(\rho, s) u_0^{-q}(s) ds \leq \beta u_0(\rho) \quad \text{для всіх } \rho \in [0, 1]. \quad (13)$$

Нерівності (12) і (13) можуть бути зведені до вигляду

$$\alpha \leq \mu m \beta^{-q}, \quad \beta \geq \mu M \alpha^{-q}, \quad (14)$$

де $m = \min_{\rho \in [0, 1]} \int_0^1 \frac{Q(\rho, s)}{u_0(\rho)} u_0^{-q}(s) ds$, $M = \max_{\rho \in [0, 1]} \int_0^1 \frac{Q(\rho, s)}{u_0(\rho)} u_0^{-q}(s) ds$.

Знаходимо, що

$$m = \frac{4^q}{1-q}, \quad M = \frac{4^q H_{1-q}}{1-q},$$

де H_x – гармонічне число.

Зауважимо, що гармонічне число має інтегральне подання

$$H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt, \quad \operatorname{Re} x > -1.$$

Тоді з нерівностей (14) знаходимо, що

$$\alpha \leq (mM^{-q} \mu^{1-q})^{\frac{1}{1-q^2}}, \quad \beta \geq (m^{-q} M \mu^{1-q})^{\frac{1}{1-q^2}}. \quad (15)$$

Для швидшої збіжності двобічних ітерацій слід обрати максимальне значення α і мінімальне значення β , що задовольняють нерівності (15). Таким чином, остаточно одержимо, що для кінців $v_0 = \alpha u_0$, $w_0 = \beta u_0$ сильно інваріантного конусного відрізка оберемо значення

$$\alpha = (mM^{-q} \mu^{1-q})^{\frac{1}{1-q^2}}, \quad \beta = (m^{-q} M \mu^{1-q})^{\frac{1}{1-q^2}},$$

при цьому, очевидно, виконується умова $0 < \alpha < \beta$.

Для крайової задачі (4), (5) сформуємо ітераційний процес за формулами

$$v^{(n)}(\rho) = \mu \int_0^1 Q(\rho, s) [w^{(n-1)}(s)]^{-q} ds, \quad n=1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$w^{(n)}(\rho) = \mu \int_0^1 Q(\rho, s) [v^{(n-1)}(s)]^{-q} ds, \quad n=1, 2, \dots, \quad (17)$$

$$v^{(0)}(\rho) = \alpha u_0(\rho), \quad w^{(0)}(\rho) = \beta u_0(\rho). \quad (18)$$

З огляду на властивості оператора T можна зробити висновок, що ітераційний процес (16)-(18) з двох боків збігається до єдиного в конусі K_+ додатного розв'язку крайової задачі (4), (5). А саме, справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$ – одиничний круг в $\mathbb{R}^2$. *Крайова задача*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \mu u^{-q}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

при $\mu > 0$, $q \in (0,1)$ має єдиний додатний аксіально-симетричний розв'язок

$$u^*(\rho) = u^*\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

до якого двобічно збігаються послідовні наближення, які формуються за схемою (16)-(18). При цьому виконується апіорна оцінка розв'язку

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(mM^{-q}\mu^{1-q})^{\frac{1}{1-q^2}}(1-\rho^2) &\leq u^*(\rho) \leq \\ &\leq \frac{1}{4}(m^{-q}M\mu^{1-q})^{\frac{1}{1-q^2}}(1-\rho^2), \end{aligned}$$

$$\text{де } \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Двобічна збіжність послідовних наближень (16)-(18) розуміється у сенсі виконання нерівностей

$$\begin{aligned} \alpha u_0 = v^{(0)} &\leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(n)} \leq \dots \leq \\ &\leq u^* \leq \dots \leq w^{(n)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} \leq \beta u_0. \end{aligned}$$

З огляду на двобічний характер процесу (16)-(18) ітерації слід проводити до виконання умови

$$\frac{1}{2} \max_{\rho \in [0,1]} (w^{(k)}(\rho) - v^{(k)}(\rho)) < \varepsilon$$

і тоді з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(\rho) \approx u^{(k)}(\rho) = \frac{w^{(k)}(\rho) + v^{(k)}(\rho)}{2}.$$

3. Результати обчислювального експерименту. Обчислювальний експеримент було проведено для задачі (4), (5) при $q = 0,1; 0,2; \dots; 0,9$ та $\mu = 1, 2, 3$.

При $q = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$ збіжність з точністю 10^{-4} було досягнуто за 7 ітерацій. При цьому $\|u^{(7)}\| = 0,445409$. Знайдено, що

$$m = 4H_{1/2}, \quad M = 4, \quad \alpha = 2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{H_{3/4}^4}, \quad \beta = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{H_{1/2}^2}}.$$

На рис. 1 зображено графіки верхніх $w^{(k)}(\rho)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(\rho)$ (пунктирна лінія) наближень. На рис. 2 наведено графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(\rho)$, на рис. 3 – графік функції

$u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, а на рис. 4 – лінії рівня функції $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$. В таблиці 1 наведено як зменшується апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку при $q = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$.

На рис. 5 наведено графіки залежності $\|u\|$ від $q \in (0,1)$ для значень $\mu = 1, 2, 3$. Як бачимо, зі збільшенням μ і наближенням q до 1 збільшується і норма розв'язку крайової задачі.

$v^{(k)}(\rho), w^{(k)}(\rho)$

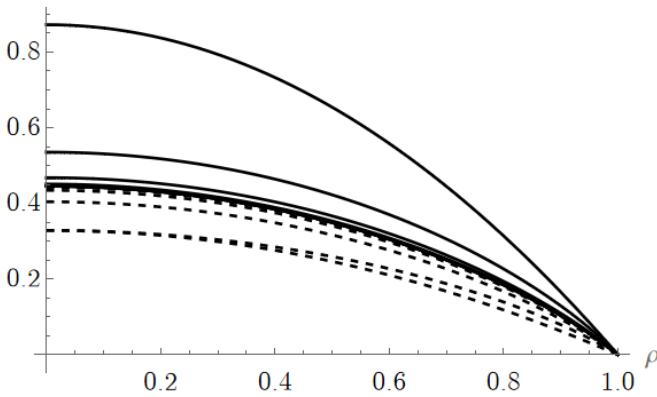


Рис. 1. Графіки верхніх і нижніх наближень

$u^{(7)}(\rho)$

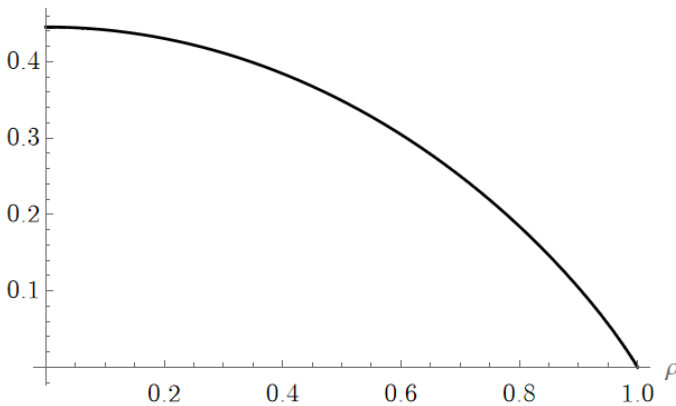


Рис. 2. Графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(\rho)$

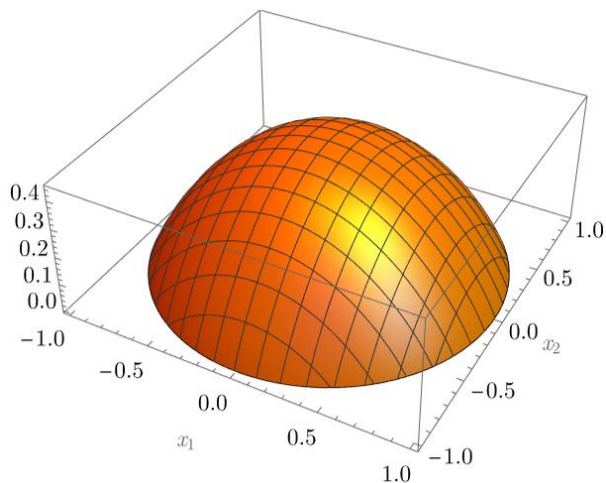


Рис. 3. Графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$

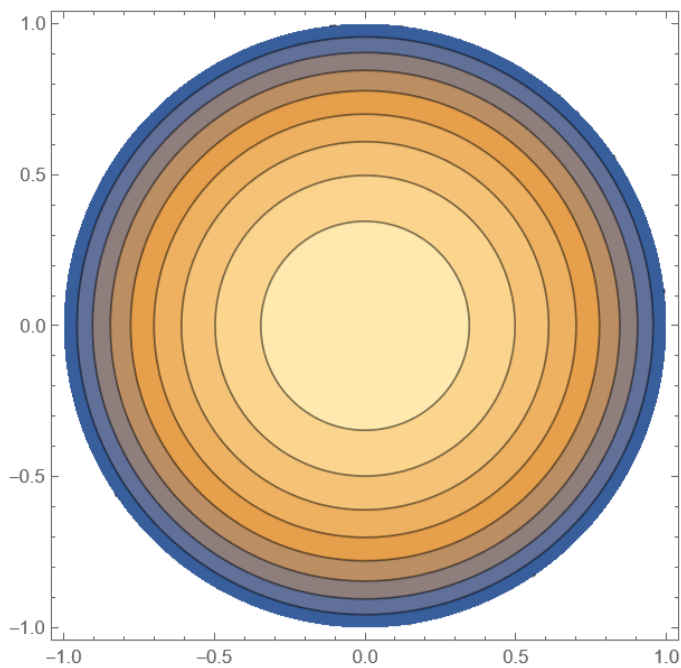


Рис. 4. Лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(7)}(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$

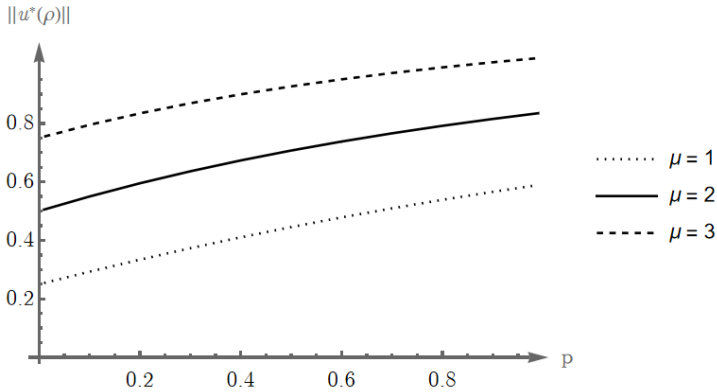


Рис. 5. Графіки залежності норми наближеного розв'язку від значень параметра ρ , $\mu = 1, 2, 3$

Таблиця 1

Апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку на k -й ітерації

Номер ітерації k	1	2	3	4
$\varepsilon^{(k)}$	$0,10 \cdot 10^0$	$0,32 \cdot 10^{-1}$	$0,82 \cdot 10^{-2}$	$0,21 \cdot 10^{-2}$
Номер ітерації k	5	6	7	
$\varepsilon^{(k)}$	$0,52 \cdot 10^{-3}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,32 \cdot 10^{-4}$	

Висновки. У статті продовжено дослідження застосовності методу двобічних наближень до знаходження аксіально-симетричних розв'язків першої крайової задачі, розпочаті в [2], в частині розгляду рівняння $-\Delta u = \mu u^{-q}$. Результати, які було одержано в роботі, можна поширити на рівняння з іншими типами нелінійностей, іншим характером монотонності та на еліптичні рівняння більш загального вигляду. Окрім того, отримані результати застосовні для розв'язування прикладних задач, пов'язаних з розрахунком фізико-механічних полів. Подібні дослідження можна також провести для крайових умов інших типів. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих у роботі результатів.

Список використаних джерел:

1. Oliva F., Petitta F. Singular elliptic PDEs: an extensive overview. *Partial Differential Equations and Applications*. 2025. Vol. 6, Article No. 6. URL: <https://doi.org/10.1007/s42985-024-00308-9>.
2. Пархоменко В. Г. Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних аксіально-симетричних розв'язків крайової задачі.

- вих задач з монотонними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2024. Вип. 25. С. 121-133. URL: <https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.121-133>.
3. Вороненко М. Д., Сидоров М. В. Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1 (80). С. 48-54.
 4. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 107-120.
 5. Колосова С. В., Луханин В. С., Сидоров М. В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2013. № 1. С. 35-42.
 6. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2013. № 3 (62). С. 28-31.
 7. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Москва: Физматгиз, 1962. 394 с.
 8. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
 9. Пархоменко В. Г. Метод двобічних наближень пошуку аксіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Матеріали XVIIІ Міжнародного молодіжного форуму «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»* (Харків, ХНУРЕ, 16-18 квітня 2024). 2024. Т. 7. С. 259-261.
 10. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних радіально-симетричних розв'язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2019. № 3 (86). С. 16-23.
 11. Сидоров М. В. Метод двобічних наближень розв'язання першої крайової задачі для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь на основі використання функції Гріна. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2019. № 1 (48). С. 57-66.
 12. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. On positive solutions of Liouville-Gelfand problem. *Казахского Национального университета им аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика*. 2018. № 3 (99). С. 78-91.

APPLICATION OF THE METHOD OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS FOR FINDING POSITIVE AXIALLY SYMMETRIC SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH SINGULAR NONLINEARITIES

In this paper, we consider the problem of finding positive axially symmetric solutions to boundary value problems for nonlinear elliptic differential equations using the method of two-sided approximations.

The first boundary value problem, or Dirichlet problem, is solved. The nonlinearity involved is of an anti-monotonic type, characterized by a

power-law dependence with an exponent ranging from -1 to 0 . By transitioning to a polar coordinate system and exploiting the axial symmetry of the solution, the original boundary value problem for an elliptic equation is reduced to a boundary value problem for an ordinary differential equation on a finite interval. The solution depends solely on the radial coordinate, eliminating the dependence on the angular variable. In this case, the pole of the polar coordinate system becomes a singular point, where it is necessary to impose a boundedness condition on the solution.

For the boundary value problem, the Green's function is constructed, after which the problem is reduced to a Hammerstein integral equation. This integral equation is treated as a nonlinear operator equation in a Banach space of continuous functions on a finite interval, partially ordered by the cone of non-negative functions on that interval. The corresponding operator is studied with respect to properties such as anti-monotonicity (antitonicity), positivity, boundedness, and pseudo-concavity.

The next stage involves determining the initial approximation as the endpoints of a strongly invariant conical segment for the antitone operator, in a way that ensures the highest possible convergence rate of the iterative process. Two iterative sequences of two-sided approximations are then constructed. The first sequence is non-decreasing with respect to the cone, while the second is non-increasing. At each iteration, the arithmetic mean of the upper and lower approximations is chosen as the current estimate. The iterative process continues until the error estimate for the solution meets the prescribed accuracy.

The theoretical results obtained in this work were verified through computational experiments. The dependence of the solution and the convergence rate of the iterative process on the parameters in the right-hand side was analyzed and illustrated with corresponding graphs.

Key words: *axially symmetric positive solution, antimonotone operator, strongly invariant conical segment, method of two-sided approximations, boundary problem for nonlinear elliptic differential equation, Green's function, Hammerstein integral equation.*

Отримано: 12.06.2025